

常微分方程式の数値解法における
漸近的状态への接近について

日大理工 宇野利雄

常微分方程式 $dy/dx = F(x, y)$ の数値解法を行なうに当り、(A) 解の x または y の少なくとも一方が $\rightarrow \infty$ となる場合および (B) 解がリミットサイクルに近づく場合の二通りに分けて、それぞれの場合にあらわれるいちじるしい特徴を考察する。

(A) x または y の少なくとも一方が $\rightarrow \infty$
となる場合

可動特異点のあらわれる場合における数値解法の困難さはよく指摘されたところのものである [1]。また方程式 $dy/dx = -x^2 y$ のようなものにつぎ $x \rightarrow \infty$ とすると、真の解は非常に速く 0 に収束するはずであるのに、きざみ幅を刻々小さくして行かない限り数値解は $y=0$ に背を向けて $|y|$ がいくらかでも増大する方向に向ってしまうことなどが知られている。これらの困難を克服するためには数値解法を改良

していかなる場合にも適応し得るような方法を設定しようとする研究が着々行われている [2]

ここではこのような数値解法の方法の問題にはふれず、むしろ上記漸近的状态における微分方程式の特徴そのものをとらえるという点に主眼をおき、それがいくらかでも解法対策のための資料となり得るような考察をしようとする。

方程式は以後

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad (1)$$

あるいはパラメタ t を入れて

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2)$$

の形の表示で考える。又または y の少なくとも一方が $\rightarrow \infty$ となる状況を次のように把握する。 xy 平面上 原点 $(0, 0)$ においてこの平面に接する半径 1 の球面を考え、その中心を平面上の点 P に結ぶ。結んだ直線が球面と交わる点を Q とするとき、 Q を以て P の像と考える。この写像によって xy 面上の解曲線群が球面上の曲線群にうつる。 xy 面と平行で球の中心を通る平面が球面と交わって作る大円を大円 ∞ とよぶならば、 xy 面上の無窮遠点集合は球面上の大円 ∞ となる。このようにして x または y の少なくとも一方が $\rightarrow \infty$ となる

ことを球面上で交が大円 ∞ に近づくこととして解釈する。

これは実はポアンカレが微分方程式によって定められる曲線をしらべるときに考えた方法である。

以上のことは解析的にはどうあらわすべきであろうか。

xy 面は垂直且つ y 軸に平行な平面を球面に接させる。球の中心から球面上の交をこの平面上の交に中心射影する。この平面上に座標 u, z を次のように設定する。すなわち大円 ∞ の像を z 軸、これと垂直な直線を u 軸とする。 (x, y) と (u, z) との関係は

$$x = \frac{1}{u}, \quad y = \frac{z}{u} \quad (3)$$

で与えられる。またこの変換により微分方程式(1)は

$$\frac{dz}{du} = -\frac{g - zf}{uf} \quad (4)$$

となる。この形式にするともとの xy 面における $x \rightarrow \infty$ の状況は uz 面における $u \rightarrow 0$ としてとらえられ、多くの場合 $u=0$ 上における(4)の特異交すなわち

$$u=0, \quad g - zf = 0 \quad (5)$$

の交をしらべることに帰着できる。

x が有限のまま $y \rightarrow \infty$ となるときには上の方法では都合が悪いので、今度は xy 面に垂直且つ x 軸に平行な平面を

球面に接しさせて同様な取扱いをする。今度は

$$y = \frac{1}{v}, \quad x = \frac{w}{v} \quad (6)$$

とすれば, $v=0$ が大円 ∞ の像となる。また微分方程式(1)は

$$\frac{dw}{dv} = - \frac{f - wg}{vg} \quad (7)$$

となる。 $y \rightarrow \infty$ の状況は $v=0$ 上の(7)の特異点をしらべることで取扱える。

x, y 平面のままでは数値解法に困難を来たすが, 以上(3), (6)などの変換によって決定的に取扱い得る典型的な例を以下にあげる

例 A1. 可動特異点を持つ例: $\frac{dy}{dx} = y^2 \quad (8)$

変換(6)をほどこすと方程式は

$$\frac{dw}{dv} = \frac{w - v^2}{v} \quad (9)$$

となって, これの特異点は $v=0, w=0$ である。この点の付近では右辺分母分子とも v, w の1次項が優越し, 単純な結節点型特異点となるので数値積分もいって簡単である。

パラメタ t を入れ

$$\frac{dv}{dt} = -v, \quad \frac{dw}{dt} = v^2 w \quad (10)$$

とし、初期条件を $t=0$, $v=0.5$, $w=0.5$ とし、数値解法を行なった (Runge Kutta 法、きざみ幅 はじめは $h=0.02$ とし、だんだんふやして終りに $h=0.2$ とした) 肝心なところは $v=0$, $w=0$ に近づくところなのでその附近だけを抄記した

t	v	w	x	y
1.0	2.2701483^{-5}	4.1590578^{-5}	1.4999721^0	4.405^{+4}
12.4	2.0595101^{-6}	3.0892604^{-6}	1.4999977^0	4.856^{+5}
14.8	1.8684161^{-7}	2.8026233^{-7}	1.4999995^0	4.382^{+6}
15.0	1.5297345^{-7}	2.2946012^{-7}	1.4999996^0	6.537^{+6}
15.2	1.2524446^{-7}	1.8786665^{-7}	1.4999997^0	9.752^{+6}

初期条件に應ずる特異点の位置は $x=1.5$ であることが数値解法からすぐわかるが、これへの接近が w/v の値によって相当正確にたしかめられている。

例 A2. $\frac{dy}{dx} = -x^2 y$

解析解は $y = C e^{-x^3/3}$ であり、 $x \rightarrow \infty$ とともに非常に早く $y \rightarrow 0$ となるはずなのに、きざみ幅をこまかにして行かないと $|y| \rightarrow \infty$ になってしまう例である。変換(3)によれば

$$\frac{dz}{du} = \frac{u^3 z + z}{u^4} \quad (11)$$

であり、この特異点は $u=0$, $z=0$ である。ここの状

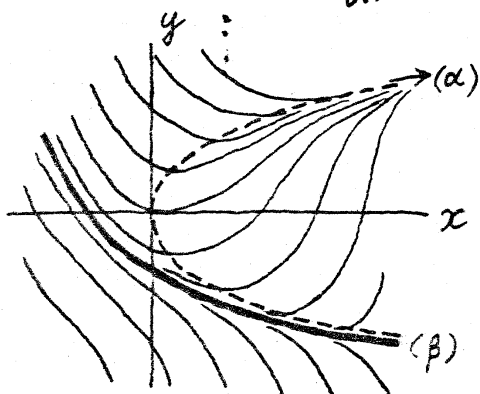
況はほとんど $d\pi/du = \pi/u^4$ の様子で示される。この点は曲線族の結節点であるが、ここには集まる曲線はみな非常に強く π 軸に接してあらわれる。パラメタ t を入れ

$$\frac{du}{dt} = -u^4, \quad \frac{d\pi}{dt} = -u^3\pi - \pi \quad (12)$$

として数値積分を行なうと、 x, y 面において取扱うときにはあらわれるような不安定性をおこすことなく、よく上のような状況が現示される。(紙幅の都合とデータ省略)

例 A3. Riccati 方程式の一例

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2 \quad (13)$$



これは x, y ともに $\rightarrow \infty$ となる例である。拋物線 $x = y^2$ の内側では $dy/dx > 0$, 外側では < 0 , その上では $= 0$ となるので図のような積分曲線が書ける。拋

物線 $x = y^2$ の $y > 0$ の分枝に接近して $x \rightarrow \infty$ のとき積分曲線の集中する曲線 (α) があり, またこれの $y < 0$ の分枝に接近して一本の積分曲線 (β) があって, (β) は $x \rightarrow \infty$ のとき (α) に向う領域と, $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow -\infty$ に向う領域との境界を構成している。

上の方程式の x, y のままでの 直接的な数値積分は案外に簡単ではなく、以下のような幻影解の出てくることがある。

例として漸近線 (α) をつきとめる目的で $x=110$, $y=10.528651$ から出立し、きざみ幅 $h=0.1$ で Runge Kutta 法による数値積分を行なった。主要なことは次のようである。これを見ると $x=200$ あたりまではほぼ (α) に近いと

x	y	y^2/x
110	10.528651	1.0077
120	10.952367	0.9996
130	11.399830	0.9997
140	11.830373	0.9997
150	12.245781	0.9997
160	12.647547	0.9998
170	13.036932	0.9998
180	13.415017	0.9998
190	13.782724	0.9998
200	14.140669	0.9998
201	14.175761	0.9998
202	14.210440	0.9997
203	14.244100	0.9995
204	14.274774	0.9989
205	14.295329	0.9969
206	14.245871	0.9893
207	14.047779	0.9533
208	11.767775	0.6658
209	9.0458676	0.3915
210	8.9569799	0.3820
215	8.5522933	0.3402

思われるあたりをたどって行くが、ここを越えると少し異状がおこり、 $x=205.2$ で y が極大 $=14.296504$ となって以後 y は少レづつ減って行く。これは事実と全然相反する事柄であるが、徐々に起こっていて、きざみ幅 $h=0.1$ づつの見かけのデータは至極おとなしい振舞いをする曲線をえがいて行く。(この附近でもきざみ幅を半分にし $h=0.05$ としてやり直すと回復して急速

に (α) に戻って行く。

ところでこの方程式を変換 (3) で扱ってみる。 $x=1/u$, $y=z/u$ として方程式は

$$\frac{dz}{du} = \frac{u - z^2 - zu^2}{-u^3} \quad (14)$$

となる。 xy 面における $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ の状態は $u=0$ 上の特異点 $u=0$, $z=0$ によってとらえられる。

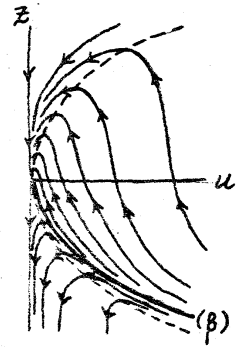
この特異点は分母分子の主要項に u , z のちがう次数のものが混在していて少し複雑であるが右図のようになる。破線は

$dz/du=0$ となる曲線であり、太線が (β) に相当する線。 (β) の右上の側の積分曲

線は一旦 ----- の上に出た上でまた下って (0,0) に近づく。

(β) の左下の部分では一旦 (β) に引きずられて (0,0) に近づく

ように見えながら、やが (0,0) に背を向けて $z \rightarrow -\infty$ の方向に出る。事情はややこみ入っているが、パラメタ t を入れ



$$\frac{du}{dt} = -u^3, \quad \frac{dz}{dt} = u - z^2 - zu^2 \quad (15)$$

として積分したものは相当多くの step 数を要しはするものの、 xy 面上での直接数値積分とはちがって安定して上の図であらわされるような状況を示してくれる。なお積分曲線全体は $u=0$, $z=0$ のほかの特異点として 2つの結節点 ($u=0$, $z=+\infty$), ($u=0$, $z=-\infty$) を持っている。

(B) リミットサイクルに近づく場合

x または y の少なくとも一方が $\rightarrow \infty$ である場合とちがって、積分曲線がリミットサイクルに接近するときには、1個の特異点に接近することに帰着せしめるというような簡単な手段は見当らない。一般論にはまだ追究がおよび得ないので、ここでは二三の特徴的な例をあげるにとどめる。

いまリミットサイクルが方程式 $P(x, y) = 0$ であらわされるとしよう。これに接近する積分曲線を持つ微分方程式を

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi(x, y) + \varphi_1(x, y)P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \psi(x, y) + \psi_1(x, y)P(x, y) \end{cases} \quad (16)$$

の形に書くことにする。ここには $\varphi : \psi = -\frac{\partial P}{\partial y} : \frac{\partial P}{\partial x}$ である。

例 B1.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\pi[y + \lambda x(x^2 + y^2 - 1)] \\ \frac{dy}{dt} = \pi[x - \lambda y(x^2 + y^2 - 1)] \end{cases} \quad (17)$$

リミットサイクルは単位円 $x^2 + y^2 = 1$ であり、 $\lambda > 0$ ならば、 $t \rightarrow \infty$ のとき積分曲線は限りなくこれに接近する。

きざみ幅 $h = 0.1$ とし、 λ の種々の値についてくらべてみた (Runge Kutta)

i) $\lambda = 0.1$, 初期値 $x = 0.8, y = 0$

真のリミットサイクルに近づく模様であるが、収束はやや遅

く, $t=6.0$ で $x^2+y^2=0.9872$, $t=8.0$ で $x^2+y^2=0.9963$ となっている.

ii) $\lambda=0.5$, 初期値 $x=0.8, y=0$

収束は非常に早く 2 周目 $t=4.0$ でもはや $x^2+y^2=1$ となり, 以後ほとんど真のリミットサイクルの上に乗っている模様である.

iii) $\lambda=5$, 初期値 $x=0.8, y=0$

この λ に対しては $h=0.1$ は

あまりに大きすぎる きざみ幅

なのであろう. 右表のようにな

t	x^2+y^2
2.0	0.60834
3.0	0.60762
4.0	0.60762
5.0	0.60762

ってすみやかに偽のリミットサイクル $x^2+y^2=0.60762$ に接近する. 他の初期値 ($x=1.0, y=0$) から出立しても同じ事になった.

iv) $\lambda=8$, 初期値 $x=0.8, y=0$

もはや $h=0.1$ は法外なきざみ幅となっているらしい. 全然動揺常なき値が出てきて結果のおかしいことにすぐに気がつく. この真は iii) が偽であるにもかかわらず, もっともらしいなめらかな曲線をえがくのに対照的である.

$$\text{例 B2} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\pi[y + \lambda(x-1)^4 x(x^2+y^2-1)] \\ \frac{dy}{dt} = \pi[x - \lambda(x-1)^4 y(x^2+y^2-1)] \end{cases} \quad (18)$$

i) $\lambda = 0.5$, $h = 0.01$, 初期値 $\begin{cases} x = 9.9989929 \times 10^{-1} \\ y = 1.8883100 \times 10^{-3} \end{cases}$

$t = 1.0$ で $x = -9.9998852 \times 10^{-1}$, $y = -1.888590 \times 10^{-3}$

$t = 2.0$ で $x = +9.9999812 \times 10^{-1}$, $y = +1.888694 \times 10^{-3}$

となる。 $x = +1$ と $x = -1$ とは 10^{-5} 程度くほんのわずかの差があるというもののほとんど正確なリミットサイクル $x^2 + y^2 = 1$ の上に近づいている。

ii) $\lambda = 0.5$, $h = 0.05$, 初期値 $x = 1.0$, $y = 0.0$
2周半ぐらいからほとんど定常状態になってしまいが、

$$x = -1 \text{ の付近では } x^2 + y^2 = 0.9826$$

$$x = +1 \quad \text{リ} \quad x^2 + y^2 = 0.9998$$

となって 2% 近くのいびつのあることがみとめられる。

iii) $\lambda = 0.6$, $h = 0.05$, 初期値 $x = 1.0$, $y = 0.0$

t	x	y	$x^2 + y^2$	
0.85	-0.88706082	+0.45196292	0.9911	主要系にお けるデータ は左表の通 りである。
0.90	-0.94275537	+0.30625095	0.9825	
0.95	-0.96992598	+0.15339045	0.9743	
1.00	-0.96212084	-0.00076713	0.9256	
1.05	-0.92057854	-0.14796684	0.8693	$x = -1$ の 付近におい て内側へく ぼむことが 相当にあら
1.10	-0.88261471	-0.29074659	0.8635	
1.15	-0.84863179	-0.43778828	0.9117	
1.20	-0.78940820	-0.57998155	0.9595	
1.25	-0.69834470	-0.70587685	0.9759	
1.30	-0.58198283	-0.81014065	0.9950	
1.95	+0.98830324	-0.15110708	0.9958	
2.00	+0.99977384	+0.00535724	0.9958	
2.05	+0.98662694	+0.16168954	0.9958	

われてくる。しかしこの例ではまださほどの不規則性を示さず、うっかりするとこれを真の解と見誤られそうである。しかし

iv) $\lambda = 0.65$ となると同じきざみ幅では $x = -1$ の附近でのデータの出入りが相当に目につき、 $\lambda = 0.8$ となるとあきらかにぼげしい動揺を示す。

しかしこの $\lambda = 0.8$ の場合といえども、きざみ幅を $h = 0.01$ ととればもはやほとんど真のリミットサイクル $x^2 + y^2 = 1$ に近い漸近曲線に近づくようになってくる。

⋮

[1] 清水原次郎: 常微分方程式の数値解法における数学的諸問題, オク回プログラミング・シンポジウム報告集, 1966

[2] 森口繁一, 伊理正夫, 小林光夫: 常微分方程式の数値解法における難問対策へのある試み, オ8回プログラミング・シンポジウム報告集, 1967