

Rayleigh-Benard 対流を記述する力学系の構成とカオス遷移

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

Rayleigh-Benard(RB) 対流におけるカオスは小さなアスペクト比をもつ直方体容器中の流体系に対する実験において典型的に観測されているので、それと同じ境界条件をもつ Navier-Stokes 方程式系でこれらを再現することは興味ある課題と考えてきた。種々の切断模型系 (truncated model system)^{1,2)} や差分法^{3,4)} を用いた計算はこれまでも試みられてきたが、ここでは Galerkin 法に基づいて力学系を構成する試みを述べる。

水平に置かれた高さ $2d$ 、アスペクト比 Γ_x, Γ_y の直方体容器中の流体に現れる RB 対流を考える。境界条件は、速度にかんして粘着的、温度にかんして水平壁で等温的、垂直壁で断熱的とする。容器の中心を原点にとり、鉛直上向きに z 軸をとる。上下水平壁面 ($z = d, -d$) を一様温度 T_U, T_L ($T_U < T_L$) に保つと、対流のない定常熱伝導状態において、速度 $\mathbf{u}_s = 0$, 温度 $T_s = (T_L + T_U)/2 - (T_L - T_U)z/(2d)$ となり、これに対応して圧力 p_s を定めることができる。運動方程式において速度 $\mathbf{u} = 0 + \mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, 温度 $T = T_s + \delta T$, 圧力 $p = p_s + \delta p$ とおいて得られる対流を支配する運動方程式を無次元化形でかくと、Boussinesq 近似の範囲で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho} + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Pr} \delta T \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T = \frac{1}{16} \text{Ra} u_z + \nabla^2 \delta T. \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

となり、2つの無次元パラメータ Prandtl 数 $\text{Pr} = \nu/\kappa$, Rayleigh 数 $\text{Ra} = \alpha g(2d)^3(T_L - T_U)/\kappa\nu$ を含む。ここで、平均密度 ρ , 動粘性率 ν , 温度伝導率 κ , 体膨張係数 α , 重力加速度 g を定義した。直方体の領域 $D = \{(x, y, z) : -\Gamma_x < x < \Gamma_x, -\Gamma_y < y < \Gamma_y, -1 < z < 1\}$,

その各表面 $\partial D_x^{(\pm)} = \{(y, z) : x = \pm \Gamma_x, -\Gamma_y < y < \Gamma_y, -1 < z < 1\}$, $\partial D_y^{(\pm)} = \{(x, z) : y = \pm \Gamma_y, -\Gamma_x < x < \Gamma_x, -1 < z < 1\}$, $\partial D_z^{(\pm)} = \{(x, y) : z = \pm 1, -\Gamma_x < x < \Gamma_x, -\Gamma_y < y < \Gamma_y\}$ を定義すると、境界条件は

$$u_x = \partial_x u_x = u_y = u_z = \partial_x \delta T = 0 \quad \text{on } \partial D_x^{(\pm)} \quad (4)$$

$$u_x = u_y = \partial_y u_y = u_z = \partial_y \delta T = 0 \quad \text{on } \partial D_y^{(\pm)} \quad (5)$$

$$u_x = u_y = u_z = \partial_z u_z = \delta T = 0 \quad \text{on } \partial D_z^{(\pm)} \quad (6)$$

によって定まる。

この偏微分方程式系から Galerkin 法を用いて力学系を導く。まず流速場 $\mathbf{u}$, 温度場 δT を同じ境界条件をみたす正規直交関数系を用いて

$$u_x(x, y, z, t) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{\ell mn}(t) \varphi_{\ell} \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \chi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \chi_n(z) \quad (7)$$

$$u_y(x, y, z, t) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} B_{\ell mn}(t) \chi_{\ell} \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \varphi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \chi_n(z) \quad (8)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_{\ell mn}(t) \chi_{\ell} \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \chi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \varphi_n(z) \quad (9)$$

$$\delta T(x, y, z, t) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta_{\ell mn}(t) \psi_{\ell} \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \psi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \chi_n(z) \quad (10)$$

のように展開する。ここで、 $\varphi_n(x)$, $\chi_n(x)$, $\psi_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は、境界条件

$$\varphi_n(\pm 1) = \partial_x \varphi_n(\pm 1) = \chi_n(\pm 1) = \partial_x \psi_n(\pm 1) = 0 \quad (11)$$

および内積 $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ にたいして正規直交条件

$$(\varphi_m, \varphi_n) = (\chi_m, \chi_n) = (\psi_m, \psi_n) = \delta_{m,n} \quad (12)$$

を満たすように Chebyshev 多項式を用いて構成された直交多項式系である⁵⁾。

一方圧力場に対しては、速度場の方程式 (1) の発散をとって圧力 Poisson 方程式

$$\nabla^2 \frac{\delta p}{\rho} = \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial z} - \partial_i (u_j \partial_j u_i) \quad (13)$$

を満たす。ここで、境界条件は

$$\partial_i \left(\frac{\delta p}{\rho} \right) \Big|_{\partial D_i^{(\pm)}} = \text{Pr} \nabla^2 u_i \Big|_{\partial D_i^{(\pm)}} \quad (i = x, y, z) \quad (14)$$

となる。これを解くには、通例にしたがって δp を 2 項に分けて $\delta p = \delta p^{(1)} + \delta p^{(2)}$ とおき、それぞれの項を次の方程式と境界条件を満たすように定めればよい:

$$\nabla^2 \frac{\delta p^{(1)}}{\rho} = 0, \text{ with b.c. } \partial_i \left(\frac{\delta p^{(1)}}{\rho} \right) \Big|_{\partial D_i^{(\pm)}} = \text{Pr} \nabla^2 u_i \Big|_{\partial D_i^{(\pm)}} \quad (i = x, y, z) \quad (15)$$

$$\nabla^2 \frac{\delta p^{(2)}}{\rho} = \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial z} - \partial_i (u_j \partial_j u_i), \text{ with b.c. } \partial_i \left(\frac{\delta p^{(2)}}{\rho} \right) \Big|_{\partial D_i^{(\pm)}} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (16)$$

このうち $\delta p^{(1)}$ はさらに分割して $\delta p^{(1)} = \delta p^{(11)} + \delta p^{(12)} + \delta p^{(13)}$ とおいて、 $\delta p^{(11)}$ は次の方程式と境界条件を満たすように定める:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\delta p^{(11)}}{\rho} &= 0, \text{ with b.c. } \partial_x \left(\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} \right) \Big|_{\partial D_x^{(\pm)}} = \text{Pr} \nabla^2 u_x \Big|_{\partial D_x^{(\pm)}} \\ \partial_y \left(\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} \right) \Big|_{\partial D_y^{(\pm)}} &= 0; \quad \partial_z \left(\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} \right) \Big|_{\partial D_z^{(\pm)}} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

この境界値問題の解は次のような形に書くことができる:

$$\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} = \text{Pr} \sum_{\ell'=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} [P_{\ell'm'n'}^{(11+)} + P_{\ell'm'n'}^{(11-)}] A_{\ell'm'n'}(t) \quad (18)$$

ここで

$$P_{\ell'm'n'}^{(11+)} = \sum_{m,n} \frac{\Gamma_x \cosh \left(\frac{D_{mn}^{(1)}}{\Gamma_x} x \right)}{D_{mn}^{(1)} \sinh(D_{mn}^{(1)})} \phi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \phi_n(z) \frac{\varphi_{\ell'}''(1) - \varphi_{\ell'}''(-1)}{2\Gamma_x^2} (\phi_m, \chi_{m'}) (\phi_n, \chi_{n'}) \quad (19)$$

$$P_{\ell'm'n'}^{(11-)} = \sum_{m,n} \frac{\Gamma_x \sinh \left(\frac{D_{mn}^{(1)}}{\Gamma_x} x \right)}{D_{mn}^{(1)} \cosh(D_{mn}^{(1)})} \phi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \phi_n(z) \frac{\varphi_{\ell'}''(1) + \varphi_{\ell'}''(-1)}{2\Gamma_x^2} (\phi_m, \chi_{m'}) (\phi_n, \chi_{n'}) \quad (20)$$

であり、関数 $\phi_n(x)$, ($n = 0, 1, \dots$) は区間 $(-1, 1)$ 上の固有値問題

$$\frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + \beta_n^2 \phi_n = 0, \text{ with b.c. } \partial_x \phi_n(\pm 1) = 0 \quad (21)$$

によって定まる正規直交固有関数系で条件 $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{m,n}$ を満たし、 β_n は対応する固有値である。さらに、 $D_{mn}^{(1)} = \Gamma_x \sqrt{(\beta_m/\Gamma_y)^2 + \beta_n^2}$ で定義される。

$\delta p^{(12)}, \delta p^{(13)}$ に対しても同様な表式を得る。

一方、 $\delta p^{(2)}$ は線形項からの寄与と非線形項からの寄与を分けて、 $\delta^{(2)} = \delta p_L^{(2)} + \delta p_{NL}^{(2)}$ と書くと、Neumann 型の境界条件を満たす級数型の Green 関数を用いて次のように表わされる：

$$\frac{\delta p_L^{(2)}}{\rho} = -\text{Pr} \sum_{\ell, m, n} \sum_{\ell', m', n'} \frac{\phi_\ell \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \phi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \phi_n(z)}{\left(\frac{\beta_\ell}{\Gamma_x} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\Gamma_y} \right)^2 + \beta_n^2} (\phi_\ell \phi_{\ell'}) (\phi_m \phi_{m'}) (\phi_n \partial \chi_{n'}) \Theta_{\ell' m' n'} \quad (22)$$

$$\frac{\delta p_{NL}^{(2)}}{\rho} = \sum_{\ell, m, n} \frac{\phi_\ell \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \phi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \phi_n(z)}{\left(\frac{\beta_\ell}{\Gamma_x} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\Gamma_y} \right)^2 + \beta_n^2} (\phi_\ell \phi_m \phi_n | \partial_j (u_i \partial_i u_j)) \quad (23)$$

ここで、

$$(\phi_\ell \phi_m \phi_n | \partial_j (u_i \partial_i u_j)) = \int_{-\Gamma_x}^{\Gamma_x} \int_{-\Gamma_y}^{\Gamma_y} \int_{-1}^1 \phi_\ell \left(\frac{\xi}{\Gamma_x} \right) \phi_m \left(\frac{\eta}{\Gamma_y} \right) \phi_n(\zeta) \partial_j (u_i \partial_i u_j) \frac{d\xi}{\Gamma_x} \frac{d\eta}{\Gamma_y} d\zeta \quad (24)$$

で定義される。これらの表式を運動方程式 (1) - (2) に代入して Galerkin 法を用い、展開基底 (7) - (10) へのモーメントを計算すると、展開振幅

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \theta) = (\{A_{\ell mn}\}, \{B_{\ell mn}\}, \{C_{\ell mn}\}, \{\Theta_{\ell mn}\}) \quad (25)$$

の時間発展を支配する力学系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (26)$$

又は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ h(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (27)$$

が構成される。ここで、 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}$ は線形項、 $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ は 2 次非線形項を表わし、 $\mathbf{x}$ が定まれば、ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ を計算することができる。ただし、このままでは速度場の非圧縮性の条件が満たされないので、SMAC 法と同様に修正圧力場 $\Pi(x, y, z)$ を導入して、先ず

$$\frac{\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_t}{\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (28)$$

によって $\mathbf{u}$ を予測し、次に τ を時間発展の間隔として

$$\frac{\mathbf{u}_{l+\tau} - \hat{\mathbf{u}}}{\tau} = -\nabla \Pi \quad (29)$$

とにおいて、 $\nabla \cdot \mathbf{u}_{l+\tau} = 0$ となるように、即ち、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \Pi = \frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\tau} \quad \text{with b.c.: } \partial_i \Pi|_{\partial D_i^{(\pm)}} = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (30)$$

を満たすように Π を定めて、 $\mathbf{u}_{l+\tau}$ を修正する。通常の MAC 法では差分格子上で Π を定めるが、ここでは Π を

$$\Pi(x, y, z) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_{\ell mn} \phi_{\ell} \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) \phi_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) \phi_n(z) \quad (31)$$

と展開し、非圧縮性条件 $\nabla \cdot \mathbf{u}_{l+\tau} = 0$ の Galerkin 形式

$$\begin{aligned} \sum_{\ell'=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} [& \frac{1}{\Gamma_x} (\phi_{\ell'} \partial \varphi_{\ell'}) (\phi_m \chi_{m'}) (\phi_n \chi_{n'}) A_{\ell' m' n'}(t + \tau) \\ & + \frac{1}{\Gamma_y} (\phi_{\ell'} \chi_{\ell'}) (\phi_m \partial \varphi_{m'}) (\phi_n \chi_{n'}) B_{\ell' m' n'}(t + \tau) \\ & + (\phi_{\ell'} \chi_{\ell'}) (\phi_m \chi_{m'}) (\phi_n \partial \varphi_{n'}) C_{\ell' m' n'}(t + \tau)] = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

を満たすようにスペクトル空間で $\{\Pi_{\ell mn}\}$ を定める。これらにより、(27), (29) より、速度場、温度場における展開振幅 $(\mathbf{u}, \theta)$ の時間発展を支配する力学系

$$\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{l+\tau} - \mathbf{u}_l \\ \theta_{l+\tau} - \theta_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla \Pi + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ h(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (33)$$

が構成される。ここで、左辺のベクトル場は $\mathbf{x}_l$ が与えられれば定まる。

次に、この計算方式によって直方体中の RB 対流の simulation を行った計算例を示す。J. P. Gollub ら⁶⁾ は水を用いて一連の RB 対流におけるカオス検出実験を行った。それらのうち、アスペクト比 $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$ の直方体容器中の Prandtl 数 $Pr = 2.5$ の水を用いた RB 対流の実験において、 y 軸に平行方向に軸をもつ 2 個の平行対流ロール細胞を実現させ Rayleigh 数 Ra を上昇させるにつれ、定常流から振動状態に遷移し、しかもその振動状態が規則的振動状態からカオス状態に遷移することを観測した。

ここでは同じ外部パラメータで定常ロール状態を計算した例を示し、Leonard による QUICK 法による計算結果と比較する。図1, 図3は QUICK 法により計算した $Ra = 20000$ における速度場 u_x , 温度場 δT のある水平断面等高線図を示す。一方、図2, 図4は同じ Ra における同じ場変数 u_x , δT の等高線図を示す。ただし、この場合ロールの数は偶数で、 $x = 0$ において x 軸に垂直な対称面に関する場変数の対称性を仮定して展開振幅を次のように制限している:

$$\{A_{\ell O, m E, n O}, B_{\ell E, m O, n O}, C_{\ell E, m E, n E}, \Theta_{\ell E, m E, n E}, \Pi_{\ell E, m E, n O}\} \quad (34)$$

$$\{A_{\ell O, m E, n E}, B_{\ell E, m O, n E}, C_{\ell E, m E, n O}, \Theta_{\ell E, m E, n O}, \Pi_{\ell E, m E, n E}\} \quad (35)$$

ここで E, O は対応する展開関数の偶奇性を表わす。モードの数は、 $L = M = N = 8$ で、全体のモード数は $N_{tot} = 10LMN = 5120$ である。両者とも 2 ロール状態を実現しているが、ロール対流の回転方向が逆になっている。

なお、研究会においてはこのパラメータ設定で Ra を増加したときのカオス遷移の両計算法による計算結果の比較を行ったがこれについては別の機会に述べることにしたい。

参考文献

- 1) H. Yahata, Prog. Theor. Phys. **75**(1986), 790.
- 2) H. Yahata, Prog. Theor. Phys. **78**(1987), 282.
- 3) D. Mukutmoni and K. T. Yang, Trans. ASME J. Heat Transfer, **115**(1993), 360, *ibid.* 367.
- 4) H. Yahata, J. Phys. Soc. Jpn **69**(2000), 1384.
- 5) H. Yahata, J. Phys. Soc. Jpn. **68**(1999), 446.
- 6) J. P. Gollub and S. V. Benson, J. Fluid Mech. **100**(1980), 449.

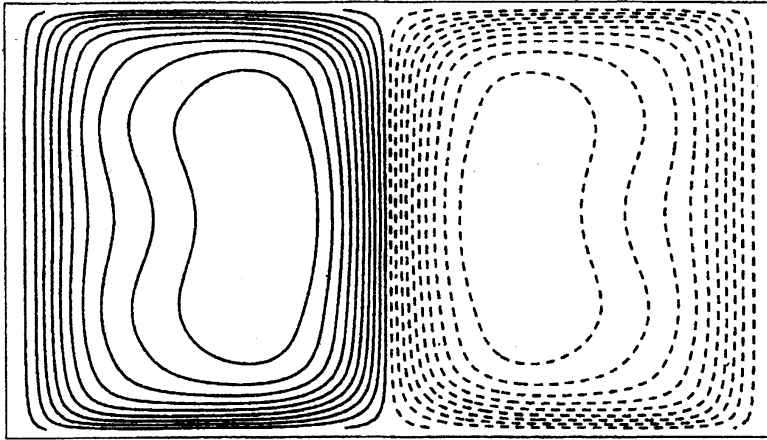


図 1: 速度場 $u_x(x, y, z = 0.6)$ の水平面内等高線図: ($Ra = 20000$, $Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$). QUICK simulation($84 \times 48 \times 24$ meshes).

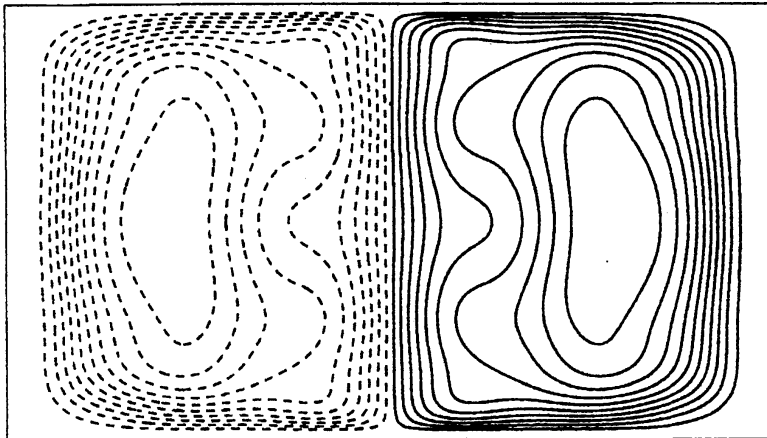


図 2: 速度場 $u_x(x, y, z = 0.6)$ の水平面内等高線図: ($Ra = 20000$, $Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$). Galerkin simulation($L = M = N = 8$).

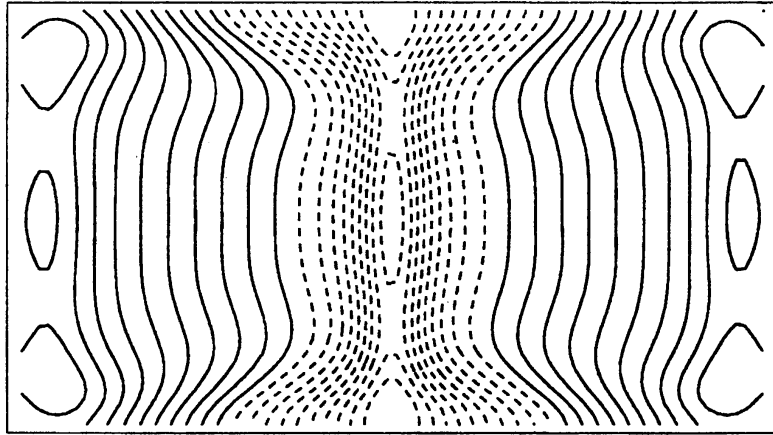


図 3: 温度場 $\delta T(x, y, z = 0.6)$ の水平面内等高線図: ($Ra = 20000$, $Pr = 2.5$, $\Gamma_z = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$). QUICK simulation($84 \times 48 \times 24$ meshes).

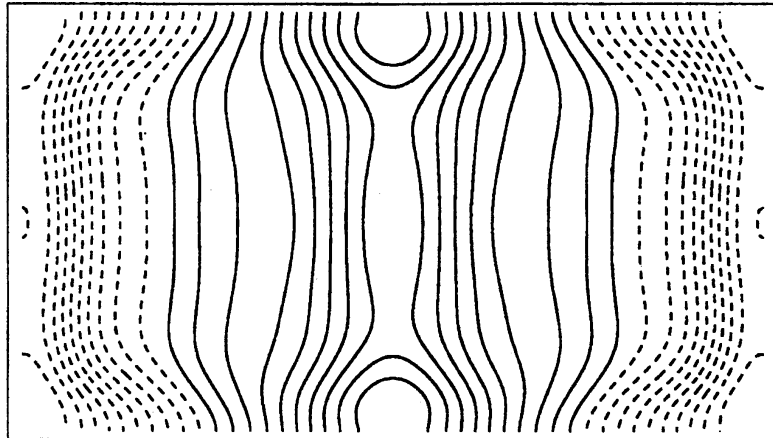


図 4: 温度場 $\delta T(x, y, z = 0.6)$ の水平面内等高線図: ($Ra = 20000$, $Pr = 2.5$, $\Gamma_z = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$). Galerkin simulation($L = M = N = 8$).