

学位審査報告書

(ふりがな)	おだか ゆうじ
氏 名	尾高 悠志
学位（専攻分野）	博 士 （ 理 学 ）
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析専攻
(学位論文題目)	
The Calabi conjecture and K-stability (カラビ予想とK安定性)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 森 重 文 教授 山 田 道 夫 教授 向 井 茂 教授

理 学 研 究 科

(続紙 1)

京都大学	博士 (理学)	氏名	尾高 悠志
論文題目	The Calabi conjecture and K-stability (カラビ予想とK安定性)		
(論文内容の要旨) 本論文において申請者は、 (1) カラビ予想の代数版に対応する「標準偏極を持つ標準モデルおよび、任意の偏極を持ち標準束が自明の射影多様体は K 安定である」という結果に、比較的短い代数的証明を与えた。更に、それに基づいて (2) 「K安定性から漸近チャウ安定性（もしくは同値な、漸近ヒルベルト安定性）が従う」という予想に自己同型群が離散的でさえある軌道体（すなわち商特異点を持つ場合）の反例を、系統的な方法で無数に提示した。 これらの結果の基礎となるのは、参考論文①において与えられた、ドナルドソン・二木不変量（つまり、一般化された二木不変量）の、交点数を含む、代数幾何的な公式であり、更にそれに基づいたK安定性の判定条件である。 その一般論に基づき、申請者は本論文において、前述のカラビ予想の代数版に、比較的短い代数的証明を与えた。その証明は、食い違い係数の言葉で述べられる、マイルドな特異点を許容しても、機能する。 具体的な証明法であるが、まず申請者の展開した一般論に従って、爆発型の半テスト配位のドナルドソン・二木不変量の評価をしてそれが正であると示せばよい。それには、参考論文①で得られた公式を分解し、各項の非負性もしくは正なることを、ホッジの指数定理、全空間に付随する偏極の半豊富性、および特異点のマイルドさに基づいて示すというものである。特異点のマイルドさを用いてある項の非負性（正值性）を示すところで逆同伴の理論を使っているために係数体が標数0であること（対数的特異点解消の存在）を用いている。 また、上述の通り、安定性の結果に於いてマイルドな特異点を許せる事は特筆すべきで、その記述には、極小モデルプログラムに沿って発展した、特異点の食い違い係数の理論が使われる。実際、その意味でのマイルドな特異点の重複度は、次元を固定しても有界でない、ということが当論文の後半における「反例の構成」の中心的アイデアである。次元一定で漸近半安定な偏極射影多様体に許される特異点の重複度は上に有界であることがマンフォードおよびアイゼンバッドによる局所安定性の理論（1970年代）の中で知られているからである。 (論文審査の結果の要旨) 申請者の研究の背景には、微分幾何と代数幾何を含めた領域における、GIT 安定性と標準的な計量の存在の同値性という思想がある。その一つに、近年定式化された「偏極射影多様体について、その偏極の第一チャーン類をケーラー類とする、スカラー曲率一定なケーラー計量が存在するという複素微分幾何学的条件と、純代数幾何学的なK安定性という条件が同値である」という予想（2002年、ドナルドソン）がある。 ただ、この同値性は、実際に、いつ標準的計量が存在し、あるいは、いつK安定であるかの答えを与えない。それは同値性の問題が近い将来に解決したとしても、一般的には大変に難しい別の問題として残される。この方面の結果としては、1970年代にヤウによって解決されたカラビ予想、および1980年代にティアンによって証明された、α不変量によるファノ多様体上での計量の存在の十分条件などが主要なものである。			

(続紙 2)

本論文は、高次元の標準偏極代数多様体の (GIT 安定性の一つである) K 安定性を、初めて代数的に証明した。また、本論文で構成した反例は、2001 年に出版されたドナルドソンによる「定スカラー曲率であるケーラー計量を持つ、自己同型群が離散的である非特異偏極射影多様体は漸近チャウ安定である」という定理の軌道体版が成立しないことをも示している。

微分幾何においては一般的に滑らかな場合に成り立つ多くの結果はほとんど形式的に軌道体に同じ議論で拡張されるものだという認識 (期待) があるが、それが成り立っていない例である。

また、特筆すべきはモジュライ構成問題との関連性を示唆している点である。元来の GIT 安定性、すなわちマンフォードやギーゼカーなどが 1970 年代近辺に調べた漸近安定性については、モジュライの幾何学的コンパクト化の境界上の点がパラメトライズすべき、「semi-log-canonical で K が豊富な多様体」は、2 次元以上では漸近安定でないという事が 1980 年代初頭には知られていた。そのため、コラル、シェファードバロン、フィーベック、アレクセーフ達によって、漸近安定性を用いず、極小モデルプログラムにおける相対的な対数標準モデルを用いる、モジュライ構成理論が大きく発展して近年完成しつつある。

しかしながら逆に、申請者の結果は、そのパラメトライズする対象である「semi-log-canonical で K が豊富な多様体」が K 安定であるという事を示している。

しかも、その主張の逆も参考論文②で証明されている。つまり、偏極代数多様体が「半安定 (K -, 漸近、 $\bar{K}$ -のどの意味でも可) ならば semi-log-canonical な特異点までしか持たない」ということが、双有理的に相対的な半対数標準モデルの存在を仮定して、証明されている。なお、双有理的に相対的な半対数標準モデルの存在は、6 月に Chenyang Xu による正規版での存在結果を用いて、申請者の議論を基に証明された。現在 Xu 氏と論文を投稿準備中である。

これらは、モジュライ問題と、広い意味での GIT 安定性との関連を示唆し、新たな研究の方向を指し示すものである。

参考論文③は上述したティアンの結果の代数版を、 α 不変量の双有理幾何的定義から復元した。 α 不変量は、代数的にはショクロフの導入した大域的対数的標準数値と一致しており、その意味では、ファノ多様体の多重反標準因子の特異点のマイルドさが安定性もしくはケーラーアインシュタイン計量の存在と関連することを示している。

この方面をさらに推し進め、申請者は岡田拓三との研究において Ross-Thomas の意味のスロープ安定性という性質が、ファノ多様体の双有理超剛性という、全く由来の異なるものから従うという事を、非常に弱いと推察される二条件下で証明した。

ファノ多様体は (滑らかであっても) 安定であるとは限らないことは古典的事実に対応するものであるが、これらの結果は、ティアンの 80 年代の研究を越えて、その安定性もしくはケーラーアインシュタイン計量の存在の必要十分条件の具体的な形を目指すべく第一歩を踏み出したものと考えられ、関連する成果が今後も期待される。

本論文は、申請者のこれらのアプローチが、GIT 安定性というトピックに全く新しい知見を与えるものであることを初めて確立した出版論文、という点でも意義のある業績である。

よって、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。また、平成 23 年 7 月 13 日論文内容とそれに関連した口頭試問を行った。その結果合格と認めた。

要旨公開可能日： 年 月 日以降