

# $C^*$ -環のフビニ積について

新潟大 教育 古谷 正

関数環の *slice* 積, バナッハ空間の近似問題の 1 つの定式化, または  $W^*$ -テンソル積の交換定理と同値な定理 (定理 1) の  $C^*$ -環化と考えられる  $C^*$ -環のフビニ積を, 富山は [5] で定義した。すなわち,  $C, D$  を  $C^*$ -環とし,  $C \otimes D$  で  $C$  と  $D$  の *spatial* な  $C^*$ -テンソル積を表わす。  $g \in C^*$  に対し,  $C \otimes D$  から  $D$  への  $R_g(c \otimes d) = \langle g, c \rangle d$  をみたす有界な線型写像  $R_g$  を右フビニ (または *slice*) 写像, 同様に  $h \in D^*$  に対し,  $C \otimes D$  から  $C$  への  $L_h(c \otimes d) = \langle h, d \rangle c$  をみたす有界な線型写像  $L_h$  を左フビニ写像と呼ぶ。さらに  $C$  の  $C^*$ -部分環  $A$ ,  $D$  の  $C^*$ -部分環  $B$  が与えられたとき,

$$F(A, B, C \otimes D) = \{ \alpha \in C \otimes D; R_g(\alpha) \in B, L_h(\alpha) \in A \text{ for all } g \in C^*, h \in D^* \}$$

で  $C \otimes D$  についての  $A$  と  $B$  のフビニ積を定義する。

定義より,  $A \otimes B \subseteq F(A, B, C \otimes D)$  は常に成立することがわかる。そこで

$$(*) \quad A \otimes B = F(A, B, C \otimes D)$$

が成立するかどうか問題になる。

富山は  $A$  のすべての既約表現の次元がある有限次元以下なら、どんな  $C^*$ -環の組  $(B, C, D)$  についても、等式  $(*)$  が成立することを [5] で示した。一方、Wassermann は等式  $(*)$  が成立しない例を [8] で初めて与えた。

一般に  $C^*$ -環  $A \subseteq C_1 \subseteq C_2$ ,  $B \subseteq D_1 \subseteq D_2$  の場合、 $A \otimes B \subseteq C_1 \otimes D_1 \subseteq C_2 \otimes D_2$  が与えられ、 $F(A, B, C_1 \otimes D_1) \subseteq F(A, B, C_2 \otimes D_2)$  であることが知られている ([5])。ここでは、 $C, D$  がともに *injective* なら  $F(A, B, C \otimes D)$  が  $A$  と  $B$  の最大の  $F$ -積と考えられることを示す。また例として、Wassermann の最近の結果 [9] を使って、ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の作る  $C^*$ -環の  $F$ -積の1つの性質を調べる。

§1.  $F$ -積の最大性.  $M, N$  を  $W^*$ -環とし、 $M_*, N_*$  をそれらの predual とする。  $M \otimes N$  で  $M$  と  $N$  の  $W^*$ -テンソル積を表わす。  $g \in M_*$  に対し  $\tilde{R}_g(m \otimes n) = \langle g, m \rangle n$  をみたす  $M \otimes N$  から  $N$  への  $\sigma$ -弱連続線型写像を  $\tilde{R}_g$  で、また  $h \in N_*$  に対し、 $\tilde{L}_h(m \otimes n) = \langle h, n \rangle m$  をみたす  $M \otimes N$  から  $M$  への  $\sigma$ -弱連続線型写像を  $\tilde{L}_h$  で表わす。さらに、 $M_1, N_1$  を  $M, N$  の  $W^*$ -部分環とする。このとき  $W^*$ -テンソル積の交換定理

$((M \bar{\otimes} N)' = M' \bar{\otimes} N')$  と同値な定理として知られる富山による次の結果がある (cf. [7]).

定理 1.  $\{x \in M \bar{\otimes} N : \tilde{R}_g(x) \in N_1, \tilde{L}_h(x) \in M_1 \text{ for all } g \in M_*, h \in N_*\} = M_1 \bar{\otimes} N_1$

$C^*$ -環  $C, D$  について,  $C^{**}, D^{**}$  を enveloping  $W^*$ -環とすると,  $C \otimes D \subset C^{**} \bar{\otimes} D^{**}$  とみなせる. さらに  $A, B$  を  $C, D$  の  $C^*$ -部分環とし,  $C^{**} \bar{\otimes} D^{**}$  の部分環  $A \otimes B$  の弱閉包を  $\bar{A} \bar{\otimes} \bar{B}$  で表わす. このとき定理 1 を使った次の補題が証明される.

補題 2 ([7]).  $F(A, B, C \otimes D) = (C \otimes D) \cap (\bar{A} \bar{\otimes} \bar{B})$ .  
したがって,  $F(A, B, C \otimes D)$  は  $C \otimes D$  の  $C^*$ -部分環である.

系 3 ([5]). 特に  $A, B$  が両側イデアルならば,  
 $F(A, B, C \otimes D)$  も両側イデアルになる.

$C^*$ -環  $C$  から  $C^*$ -環  $D$  への線型写像  $\varphi$  について

$$\varphi(x^*x) \geq \varphi(x)^* \varphi(x) \quad x \in C$$

を Schwarz の不等式と呼ぶ. この不等式を満たす写像は positive である. 特に completely positive な写像 (以下略

して、CP写像と呼ぶことにする)は Schwarz の不等式をみたす。 つぎの補題は既知と思われる。

補題4.  $C^*$ -環  $C$  から  $C^*$ -環  $D$  上への線型写像  $\varphi$  が逆写像  $\psi$  をもち、 $\varphi, \psi$  とともに Schwarz の不等式をみたすとき、 $\varphi$  は  $*$ -同型写像となる。

証明. 等式  $x^*y = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 i^n (y + i^n x)^* (y + i^n x)$  により、 $\varphi(x^*x) = \varphi(x)^* \varphi(x)$  を示せば十分である。 任意の  $x \in C$  について  $x = \varphi(y)$  とする  $y \in D$  をえらぶ。 このとき、 $\varphi(y^*y) \geq \varphi(y)^* \varphi(y)$ 。 等式  $\varphi(x^*) = y^*$  とこの不等式より、

$$\varphi(x)^* \varphi(x) = y^* y = \varphi(\varphi(y^*y)) \geq \varphi(\varphi(y)^* \varphi(y)),$$

$$\text{また、} \varphi(x^*x) = \varphi(\varphi(y)^* \varphi(y)) \geq \varphi(\varphi(y))^* \varphi(\varphi(y)) = \varphi(x)^* \varphi(x).$$

結局  $\varphi(x^*x) = \varphi(x)^* \varphi(x)$  が成立する。

単位元をもち  $C^*$ -環  $C$  について、任意の  $C^*$ -環  $D$  とその  $C^*$ -部分環  $B$  に対して、 $B$  から  $C$  への contractive な CP写像が  $D$  から  $C$  への contractive な CP写像に拡張できるとき  $C$  を injective と呼ぶ。  $C^*$ -環  $C_1, D_1$  に対し、 $\tilde{C}_1, \tilde{D}_1$  で  $C_1$  の  $C$  による extension,  $D_1$  の  $C$  による extension とする。 このとき [3, Lemma 3.9] により、 $C_1$  から  $D$  への contractive な CP写像は  $\tilde{C}_1$  から  $\tilde{D}_1$  への contractive な CP写像に拡張できる。

よって上の定義による injectivity と [4, p.1106] の Choi-Effros の意味でのそれは一致する。特にヒルベルト空間  $H$  上の有界作用素全体の作る  $C^*$ -環  $L(H)$  は injective である [2]。

定理 5.  $C^*$ -環  $A, B$  に対し  $A \subseteq C_1, A \subseteq C_2, B \subseteq D_1, B \subseteq D_2$  となる  $C^*$ -環  $C_1, C_2, D_1, D_2$  がすべて injective とする。このとき  $F(A, B, C_1 \otimes D_1)$  から  $F(A, B, C_2 \otimes D_2)$  上の  $\Phi(x) = x, x \in A \otimes B$  をみたす  $*$ -同型写像  $\Phi$  が存在する。

証明. injection:  $A \rightarrow A \subseteq C_2$  の  $C_1$  から  $C_2$  への contractive な completely positive な拡張を  $\varphi_1$  とする。このとき  $\varphi_1(a) = a, a \in A$  が成立する。同様に次の性質をもつ  $\varphi_2$  の contractive な CP 写像が存在する:

$$\varphi_2: C_2 \rightarrow C_1, \quad \varphi_2(a) = a \quad a \in A.$$

$$\psi_1: D_1 \rightarrow D_2, \quad \psi_2: D_2 \rightarrow D_1, \quad \psi_i(b) = b \quad (i=1,2, b \in B).$$

そこで  $\varphi_1 \otimes \psi_1$  を  $\varphi_1 \otimes \psi_1(c \otimes d) = \varphi_1(c) \otimes \psi_1(d)$  をみたす  $C_1 \otimes D_1$  から  $C_2 \otimes D_2$  への CP 写像, 同様に  $\varphi_2 \otimes \psi_2$  を  $C_2 \otimes D_2$  から  $C_1 \otimes D_1$  への CP 写像とする。

記号を簡単にするため  $F_i = F(A, B, C_i \otimes D_i) \quad (i=1,2)$  とおく。任意に  $x \in F_1$  を固定する。このとき  $g \in C_2^*$  に対し  $R_g(\varphi_1 \otimes \psi_1(x)) = \psi_1(R_{(g \circ \varphi_1)}(x)) \in B$ . 同様に  $h \in D_2^*$  に対し  $L_h(\varphi_1 \otimes \psi_1(x)) \in A$ . よって  $\varphi_1 \otimes \psi_1(F_1) \subseteq F_2$ .

また、 $g \in C_1^*$ ,  $h \in D_1^*$  に対して

$$\begin{aligned} \langle g \otimes h, (\varphi_2 \otimes \psi_2) \circ (\varphi_1 \otimes \psi_1)(x) \rangle &= \langle g, (\varphi_2 \circ \varphi_1)(L_{(h \circ \psi_2 \circ \psi_1)}(x)) \rangle \\ &= \langle g, L_{(h \circ \psi_2 \circ \psi_1)}(x) \rangle = \langle h, \psi_2 \circ \psi_1(R_g(x)) \rangle \\ &= \langle h, R_g(x) \rangle = \langle g \otimes h, x \rangle. \end{aligned}$$

ここで product functional の全体は separating family を作るから、 $\varphi_2 \otimes \psi_2 \circ \varphi_1 \otimes \psi_1(x) = x$   $x \in F_1$  が成立する。同様に  $\varphi_2 \otimes \psi_2(F_2) \subseteq F_1$  かつ  $\varphi_1 \otimes \psi_1 \circ \varphi_2 \otimes \psi_2(x) = x$   $x \in F_2$  であることが証明される。

ここで  $\varphi_1 \otimes \psi_1$  の  $F_1$  への制限を重とおく。補題 2 より  $F_1, F_2$  は  $C^*$ -環で、重が  $F_1$  から  $F_2$  上の cp 写像で completely positive な逆写像をもつことが上のことによりわかる。よって補題 4 から重は  $*$ -同型である。また  $\pi(x) = x$   $x \in A \otimes B$  は容易に示せる。

$A, B$  が  $W^*$ -環の場合はこの定理に類似することが [6] で証明されている。

定理 5 の互いに  $*$ -同型な  $A$  と  $B$  の フビニ積を  $A \otimes_F B$  で表わすことにする。 $A \subseteq C, B \subseteq D$  となる  $C^*$ -環  $C, D$  について、 $C \subseteq C_1, D \subseteq D_1$  となる injective  $C^*$ -環  $C_1, D_1$  をえらぶと、 $F(A, B, C \otimes D) \subseteq F(A, B, C_1 \otimes D_1) = A \otimes_F B$  が成立する。よって  $A \otimes_F B$  は  $A$  と  $B$  の最大な フビニ積と考えられる。

§2. コンパクト作用素の作る  $C^*$ -環のフビニ積. ここ

では Wassermann [9] の結果と記号を必要とする。可分な無限次元ヒルベルト空間  $H$  を、 $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i$  と分解する。ただし

$H_n$  は  $n$ -次元ヒルベルト空間を表わす。また

$M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L(H_n) = \{(\alpha_n) : \alpha_n \in L(H_n), \sup \|\alpha_n\| < \infty\}$  とおく。自然数

上の free-ultrafilter  $\mathcal{U}$  を固定する。  $L(H_n)$  上の

$\text{tr}_n(I_n) = 1$  をみたすような trace を  $\text{tr}_n$  とし、 $\alpha = (\alpha_n)$  につ

いて  $\text{Tr}(\alpha) = \lim_{\mathcal{U}} \text{tr}_n(\alpha_n)$  によって  $M$  上の state を定義する。

$L(H_n)$  と  $n$  次の複素行列環は同型であるから、 $\alpha \in L(H_n)$  を

$n \times n$  行列とみなし、その転置行列を対応させたものを  $\tilde{\alpha}$  で表

わす。このとき  $g(\alpha \otimes \beta) = \lim_{\mathcal{U}} \text{tr}_n(\alpha_n \tilde{\beta}_n)$   $\alpha = (\alpha_n), \beta = (\beta_n) \in M$

をみたす  $M \otimes M$  上の pure state  $g$  が存在する [cf. 8]。

$M \otimes M \subseteq L(H) \otimes L(H)$  であるから  $g$  を  $L(H) \otimes L(H)$  上の pure state

に拡張し、この pure state を定義する  $L(H) \otimes L(H)$  のヒルベ

ルト空間  $K$  上の既約表現を  $\pi$  と書く。  $\pi$  の  $L(H)$  への 2 つの

制限:  $\pi_1(\alpha) = \pi(\alpha \otimes I), \pi_2(\alpha) = \pi(I \otimes \alpha) \quad \alpha \in L(H)$  は

$\ker \pi_1 = \ker \pi_2 = L(H)$  をみたす [9. Lemma 3]。

2 つの生成元をもち自由群  $F_2$  が residually finite [8. p. 244]

ということから  $F_2$  は  $M$  の unitary 群の中へ表現される。

そこでこの表現の像によって生成される  $C^*$ -部分環を  $C$  と書

く。また Anderson の結果 [1] より、 $\text{Tr}(p) \geq \frac{1}{2}$  であつ

$x \in C$  で  $\text{Tr}(x^*x) = 0$  なら  $px \in LC(H)$  となる射影  $p \in M$  をえらぶ。そして  $C$  と  $p$  によって生成される  $M$  の  $C^*$ -部分環を  $C^*(C, p)$  と書く。これらの記号を使ってここで必要とする Wassermann の結果を述べる。

補題 6 ([9]). 次の性質をみたす単位元を保存する  $CP$  写像  $f_1, f_2$  はどちらも存在しない。

$$f_1 : L(K) \rightarrow \pi_2(C^*(C, p))', \quad f_1(axb) = af_1(x)b \quad a, b \in \pi_1(C^*(C, p))$$

$$f_2 : L(K) \rightarrow \pi_1(C^*(C, p))', \quad f_2(axb) = af_2(x)b \quad a, b \in \pi_2(C^*(C, p)).$$

この補題を  $\Gamma$ -積を使っていいかえる。

補題 7.  $A, B$  を  $C^*(C, p)$  を含む  $L(H)$  の  $C^*$ -部分環とすると次の 2 つが成立する。

$$(1) \quad F(A \cap LC(H), B, A \otimes B) \subseteq \ker \pi.$$

$$(2) \quad F(A, B \cap LC(H), A \otimes B) \subseteq \ker \pi.$$

証明. (1).  $F(A \cap LC(H), B, A \otimes B) \subseteq \ker \pi$  と仮定する。

$$\pi_* \circ L_\pi = L_\pi \circ \pi_* \otimes I \quad h \in L(H)^* \text{ より } \{x \in A \otimes B : \pi_* \otimes I(x) = 0\} = F(A \cap LC(H), B, A \otimes B).$$

よって  $\pi$  は  $\pi_*(\pi_*(a) \otimes b) = \pi(a \otimes b) \quad a \in A, b \in B$  をみたす

$\pi_*(A) \otimes B$  の表現  $\pi$  を与える。このとき [9, Lemma 1] によ

って  $f_1(axb) = af_1(x)b \quad a, b \in \pi_*(A)$  をみたす単位元を保

存する  $L(K)$  から  $\pi_2(B)'$  への  $CP$  写像  $\rho_1$  が存在する。これは補題 6 に反する。よって (1) が示された。

(2) も (1) と対称的な証明によって得られる。

定理 8. 可分な無限次元ヒルベルト空間  $H$  に対し

$$LC(H) \otimes_F LC(H) \neq LC(H) \otimes LC(H) \text{ が成立する。}$$

証明.  $F(LC(H), LC(H), L(H) \otimes L(H) \neq LC(H) \otimes LC(H)$  を示す。

記号を簡単にするため、 $L(H)$  の  $C^*$ -部分環  $A, B$  について

$$F(A, B) = F(A, B, L(H) \otimes L(H)) \text{ とおく。この節の初めに定義}$$

した表現  $\pi$  を使って補題 7 により

$$F(LC(H), L(H)) \not\subseteq \ker \pi, \quad (1)$$

$$F(L(H), LC(H)) \not\subseteq \ker \pi.$$

系 4 より  $F(L(H), LC(H))$  は両側イデアルであるから既約表現

$\pi$  の  $F(L(H), LC(H))$  への制限も既約となる。したがって

$\{U_\beta\}$  を  $F(L(H), LC(H))$  の approximate identity とすると

$$s\text{-}\lim \pi(U_\beta) = I_K. \quad \text{また系 4 より } F(LC(H), L(H)) \text{ も両側}$$

イデアルで  $\alpha \in F(LC(H), L(H))$  とすると

$$U_\beta \alpha \in F(LC(H), LC(H)) \cap F(L(H), LC(H)) = F(LC(H), LC(H)).$$

そこで  $F(LC(H), LC(H)) \subseteq \ker \pi$  と仮定する。

$$\pi(\alpha) = \lim \pi(U_\beta \alpha) = 0.$$

したがって  $F(LC(H), L(H)) \subseteq \ker \pi$  となり (1) に反する。

結局  $F(LC(H), LC(H)) \not\supseteq \ker(\pi|F(LC(H), LC(H))) \supseteq LC(H) \otimes LC(H)$  .

### References

1. J. Anderson, A  $C^*$ -algebra  $A$  for which  $\text{Ext}(A)$  is not a group, *Ann. of Math.*, 107 (1978), 455 - 458.
2. W. B. Arveson, Subalgebras of  $C^*$ -algebras, *Acta Math.*, 123 (1969), 141 - 224.
3. M. D. Choi and E. G. Effros, The completely positive lifting problem for  $C^*$ -algebras, *Ann. of Math.*, 104 (1976), 585 - 609.
4. ———, Lifting problems and the cohomology of  $C^*$ -algebras, *Can. J. Math.*, 29 (1977), 1092 - 1111.
5. J. Tomiyama, Tensor products and approximation problems of  $C^*$ -algebras, *Publ. Res. Institute Math. Sci. Kyoto Univ.*, 11 (1975), 163 - 183.
6. ———, On the Fubini' product of von Neumann algebras, *Bull. of Yamagata Univ., Nat. Sci.*, 9 (1976), 53 - 56.
7. ———, Some aspects of the commutation theorem

for tensor products of operator algebras, Proc. on the colloquium "Algebras of operators and their applications to mathematical physics", Marseille, 1977.

8. \_\_\_\_\_, On tensor products of certain group  $C^*$ -algebras, J. Functional Analysis, 23 (1976), 239 - 254.
9. \_\_\_\_\_, A pathology in the ideal space of  $L(H) \otimes L(H)$ , Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 1011 - 1020.