

水漏れ蛇口のカオス動力学

東京大学大学院教育学研究科 清野 健 (Ken Kiyono)

Graduate School of Education, University of Tokyo

1 はじめに

水道の蛇口からポタポタと滴り落ちる水滴落下のリズムは、流量のわずかな違いに応じて多様に変化する。図 1 は、ノズルから落下した水滴がサラダオイル中を落下する様子である。実験の制御パラメタはノズルからの流れ出る流量であり、測定時にはその量は一定に維持されている。この実験ではサラダオイル中を水滴がほぼ等速で落下するため、落下時間間隔の差に応じて水滴間の距離が変化する。図 1 左の写真は規則的な 1 周期振動であり、真ん中は長い短いのパターンを繰り返す 2 周期振動である。また、図 1 右に見られるように不規則なパターンも観測される。このような水滴落下パターンの不規則性が決定論的カオス [1] であることは、Shaw らの実験 [2] によってはじめて示された。それ以来、水漏れ蛇口 (水滴落下系) は、身近なカオス力学系の典型例として盛んに研究されてきた [3-21]。

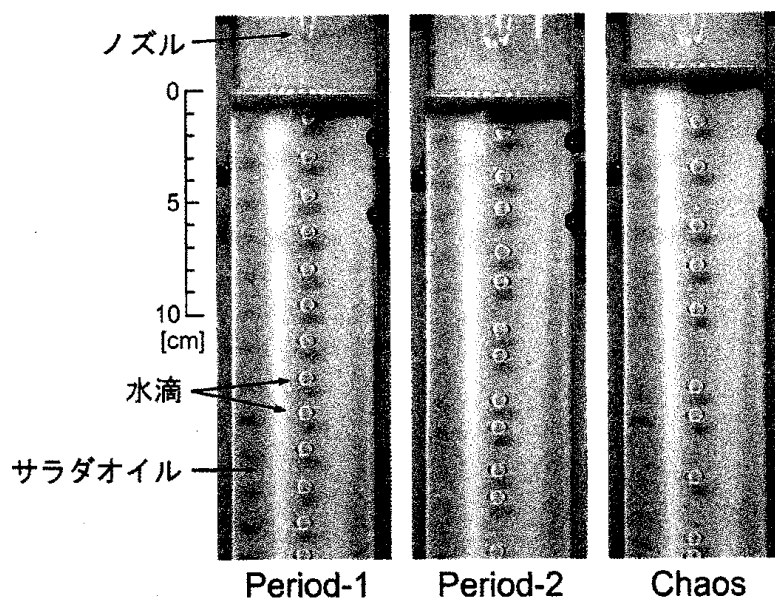


図 1: ノズルから生成された水滴がサラダオイル中を落下する様子 (ノズル内径 7 mm、外径 10 mm)。流量に依存して、水滴落下パターンの変化が見られる。左から右へ、1 周期、2 周期、カオスの例。

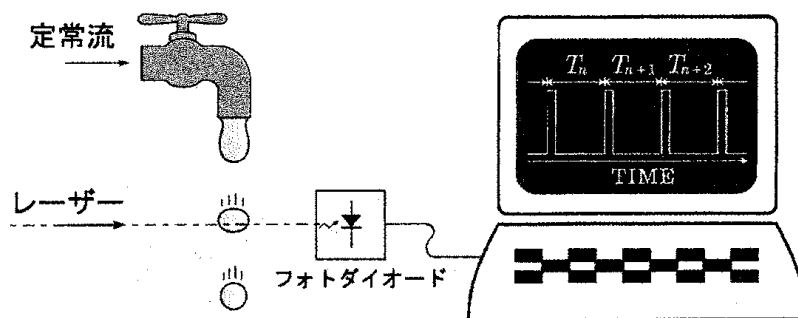


図 2: 落下時間を測定する実験の概略図。流量を制御変数とし、ノズルから生成された水滴がレーザーを遮る時刻を測定する。

水滴落下系の実験では、流量 Q を制御パラメタとして落下時間間隔 $\{T_n\}$ が測定されることが多い (図 2)。流量 Q の変化に伴う落下時間間隔 $\{T_n\}$ の振舞いの変化 (分岐図) を図 3 に示す [10]。非常に広い領域にわたり、数珠状の構造が見られる¹。ここでは、その一つのかたまりをユニットと呼ぶことにする。分岐図に見られるユニットの繰り返し構造がこの系の特徴の一つである。各ユニットをつなぐ細いひも状に見える領域では、流量 Q を決めると $\{T_n\}$ がほぼ一定値となるので系は 1 周期振動をしている。流量が多くなってくると、各ユニットの端で 1 周期から 2 周期への周期倍分岐が確認できる。ユニット内部で $\{T_n\}$ が幅広く分布している領域では不規則な水滴落下パターンが見られる。

落下時間間隔時系列 $\{T_n\}$ の不規則性がカオスであるかどうかを調べるには、時間遅れ座標を用いた状態空間の再構築法 [22] に従い、 $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ の隣り合う値の対、 $(T_1, T_2), (T_2, T_3), \dots$ をプロットする方法 (再帰写像) がよく用いられる。図 3 の挿入図中、矢印で示された流量 (A)、(B) での時系列を再帰写像にしたものが図 4 の (A)、(B) である。 T_n と T_{n+1} には明らかに決定論的な関係があり、水滴落下の不規則な変動がカオスであることが示唆される。また、再帰写像の構造が一次元の曲線に近いことは、系が低次元の力学系として近似できることを示唆している。各ユニットの内部構造は、近くにあるもの同士で似た特徴があり、再帰写像にも類似した構造が見られる。また、流量が増加するにつれ、ユニットの内部構造は複雑になり、複数の窓や間欠的な振舞を含むようになる。

これまでの実験により、再帰写像に現れる様々な形のカオスアトラクタに加えて、流量の変化に応じた周期倍分岐、Hopf 分岐、クライシス、ヒステリシスなど、非線形力学系に特有の現象が報告されてきた [2, 6, 8]。しかし、そのメカニズムは、最近まで明らかにされてはいなかった。時間遅れ座標を用いた状態空間の再構築法は、実験で観測された時系列からカオスの存在を伺い知るためには有力である。だが、この方法だけでは、水滴の形成過程や力学変数の物理的意味などを見抜くことは難しいのである。

水滴落下系のモデルとして、Shaw らは質量の増加するばねのモデル (バネモデル) を提案した [2]。このモデルは、水滴の上下振動とバネによる振動の類似性に着目したものである。彼らは、アナログ計算機を用いたシミュレーションを行い、このモデルが周期倍分岐を経てカオスを示すこと、および、実験で見られたものとの似た構造の再帰写像が得られ

¹ユニットの繰り返し構造は、蛇口直径が 1mm 程度の場合にも観測されている。ただし、口径が小さくなればユニットの内部構造は単純になり、低流量側 ($< 0.2 \text{ cm}^3/\text{s}$) ではカオスは見られない。

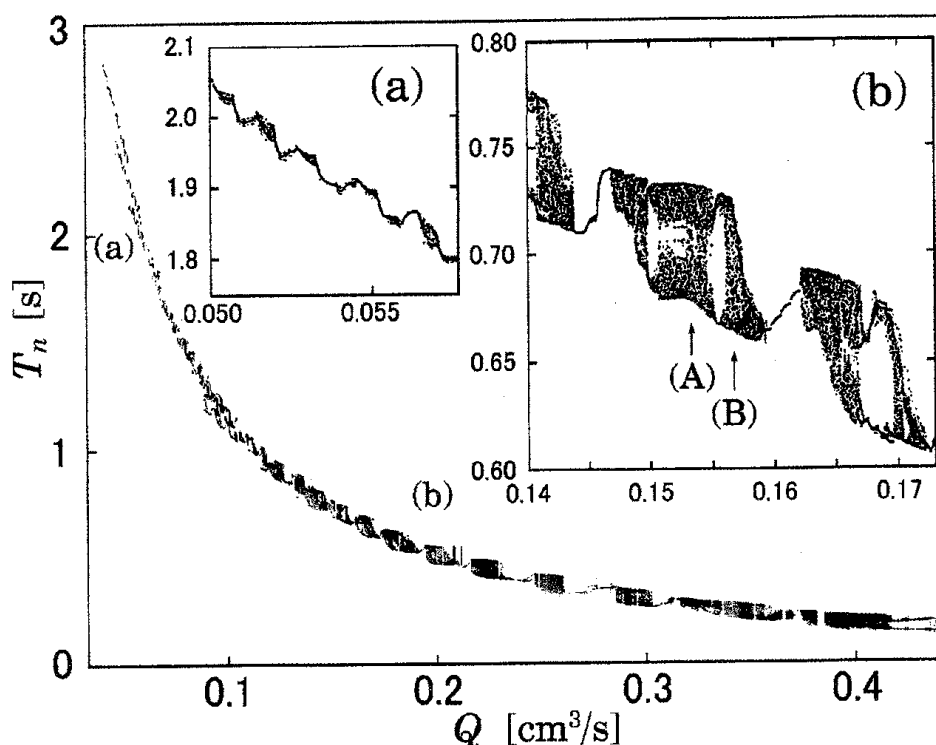


図 3: 分岐図 (勝山、永田の実験 [10])。制御変数である流量 Q に対する落下時間間隔 T_n のプロット。ノズルは、内径 5 mm、外径 7 mm。内挿図は一部分を拡大したもの。

ることを報告した。その後も、類似のモデルの研究は数多く報告されている [6, 11–14]。しかしながら、モデルで用いられた仮定と現実の系との直接的な関連性は明らかにされることはなかった。

筆者らは、ナビエ-ストークス方程式のようなオイラー描像ではなく、ラグランジュ描像により 50 ~ 300 程度の中間自由度の系として液滴の時間発展を追跡する方法を開発した [16]。この方法により、水滴の変形の様子だけでなく、長時間挙動についても実験結果を非常に良く再現できた [23]。さらには、この系に見られる複雑な現象が、ポテンシャル曲面を導入することで統一的に説明できることがわかってきた [24]。本稿では、最近行なわれた高速度カメラを用いた実験と数値シミュレーション結果に基づき、水滴落下系カオスのメカニズムを解説する。

2 カオスアトラクタ

筆者らは、これまでの多くの実験研究で測定されてきた落下時間間隔だけでなく、水滴形状の連続的な変形を追跡する実験も行なった。実験では、高速度ビデオカメラにより撮影された画像をコンピュータでデジタル処理し、1/500 秒ごとに水滴の輪郭を測定した。さらに、水滴形状の軸対称性を仮定してノズルにぶら下がった水滴の質量、および、重心位

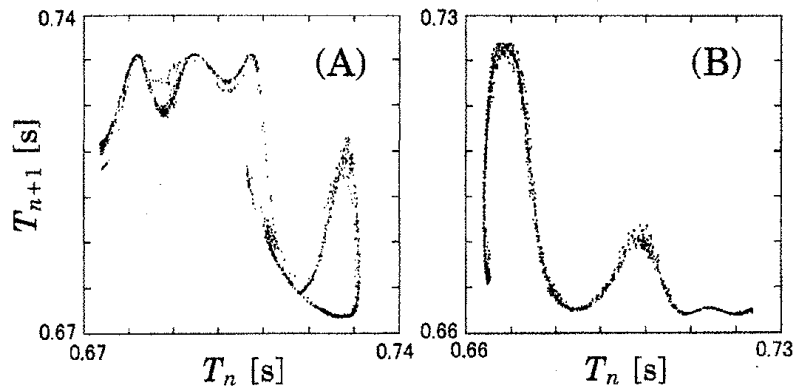


図 4: $\{T_n\}$ の再帰写像 (勝山、永田の実験 [10])。流量は、図 3 中の内挿図 (b) の (A) と (B) にそれぞれ対応。

置を見積もった。

カオス振動の例を、図 6 に示す。図 6(a) は、図 2 に示したような実験装置で測定された落下時間間隔の再帰写像である。図 6(b) は、重心位置の振動の様子である。蛇口から水滴がちぎれ落ちた直後には、水滴に残った部分は下方方向に引き伸ばされた状態にあり、表面張力が復元力として働くことで、図 6(b) に見られるような振動が生じるのである。重心位置は、振動状態がしばらく続いた後、急激に下降する。これは、水滴がくびれ始めてからちぎれるまでの過程（ネッキング過程）に対応する。比較的流量が少ない領域では、落下時間間隔がカオスであるからといって、重心振動自体には顕著な不規則性は見えてとれない。では、流体運動のどこに不規則性の起源があるのであろうか。

これまで、落下時間間隔を測定する実験では系のダイナミクスを離散力学系として議論することしかできなかった。今回、高速度ビデオカメラを使うことにより初めて連続力学系としての議論が可能になったのである。ここでは、重心位置 z_G 、その速度 $\dot{z}_G$ 、および、蛇口下にぶら下がった質量 m の 3 変数を使って系の状態空間を再構成する。図 6 と同じ実験条件で観測されたストレンジアトラクタを図 5(上) に示す。これは、状態空間におけるアトラクタを、 $z_G-\dot{z}_G$ 平面に射影したものである。図 6(上) の挿入図は、アトラクタの Poincaré 断面である。断面の構造が 1 次元に近いことから、この系のダイナミクスが低次元力学系として記述できることを示唆している。同様の特徴を持った低次元のカオスアトラクタは、非常に広い流量の領域で観測されている [10]。

Poincaré 断面 (図 6(上) の挿入図) から、時間発展とともにアトラクタの引き伸ばしと折りたたみが生じていることがわかる。引き伸ばしと折りたたみの過程は、決定論的カオスの本質的なメカニズムである。カオスでは、引き伸ばしにより相空間内で近接した 2 点間の距離が繰り返し拡大され、折り畳みによって再び軌道が有限の領域にもどされることで、長期の予測が不可能な不規則運動が生じるのである。また、水滴の運動に注目してみると、そのような引き伸ばしと折りたたみの過程は、水滴がくびれはじめるネッキング過程の初期に対応していることがわかる (図中の S の近く)。つまり、状態空間の軌道不安定性は蛇口にぶら下がった水滴形状の不安定化に対応していることが示唆される。蛇口にぶら下が

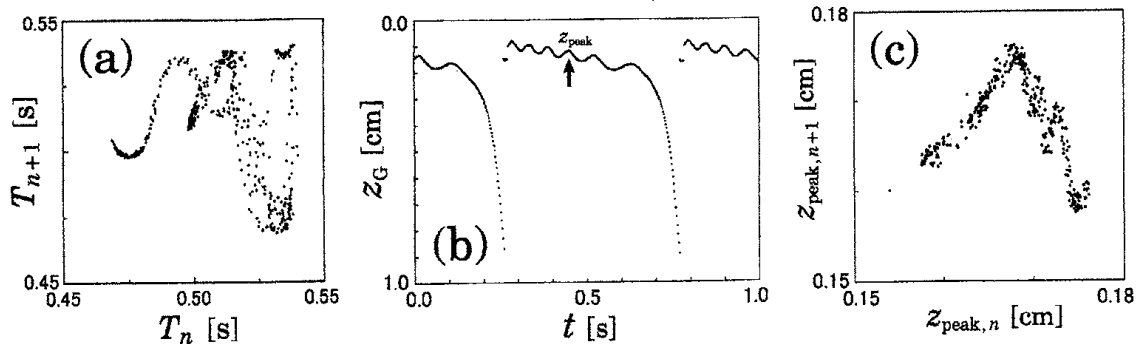


図 5: 実験結果 (ノズル内径 7 mm、外径 10 mm)。流量は、 $Q = 0.24$ g/s (~ 2 drips/s)。(a) 落下時間間隔の再帰写像 (T_n, T_{n+1})。(b) ノズルの下にぶら下がった水滴の重心振動 z_G 。 z_G は、高速度ビデオカメラの画像をコンピュータで処理し見積もられた。画像は 1/500 秒毎に撮影。(c) 4 番目の重心振動のピーク値 $z_{peak, n}$ を使った再帰写像。一次元写像に近い構造が見られる。

ることができる水滴の質量には最大値 (臨界質量) が存在し、その臨界値以上ではたとえ水の流入がなくても滴は安定に形を維持することができない。その結果としてネッキングが起これるのである。

3 ポテンシャル曲面

図 6(下) に示したように、実験で観測されたカオス振動は数値シミュレーションでも再現される。ここからは、水滴落下カオスにおける運動の詳細を、数値解析結果に基づいて見ていくことにする。蛇口にぶら下がった水滴の形状、および、運動は、主に、重力と表面張力に支配されている。表面エネルギーは、水滴の表面積に比例するので水滴の全ポテンシャルエネルギー (重力ポテンシャル + 表面エネルギー) は、水滴の形状を記述する多数の変数の関数になることが予想される。しかし、我々の数値計算結果から明らかになったことは、全ポテンシャルエネルギーの関数が、わずか 2 変数のみを使って近似できるということである。ここでは、蛇口にぶら下がった全質量 m と、重心の鉛直方向の座標 z_G の 2 変数に注目する。カオスアトラクタの Poincaré 断面を、質量 m が一定の面でとり、重心座標 z_G に対する単位質量あたりのポテンシャルエネルギー U/m をプロットしたものが、図 7(a) である。また、図 7(b) は、図 7(a) に対応する断面を、重心位置 z_G とその速度 $\dot{z}_G$ で描いたものである。図 7(a) では、薄く 2 重にたたまれた構造があるものの、そのポテンシャルの関数形が一価関数としてよく近似できることを示唆している。実際に、そのようにして近似された関数 $U(m, z_G)/m$ により、図 7(b) の相空間内の流れがうまく説明できるのである。そのポテンシャルの局面の全体像は、図 7(c) のようになる。蛇口下の質量が十分小さいときは、ポテンシャルには極大と極小値が存在するが、質量の増加にともないその極値が互いに近づき、やがて極値は消滅する。流量がない静的な場合を考えれば、極小値が蛇口にぶら下がった水滴の平衡解、極小値が消滅する点が蛇口にぶら下がることのできる最大体積 (臨界値) に対応する。

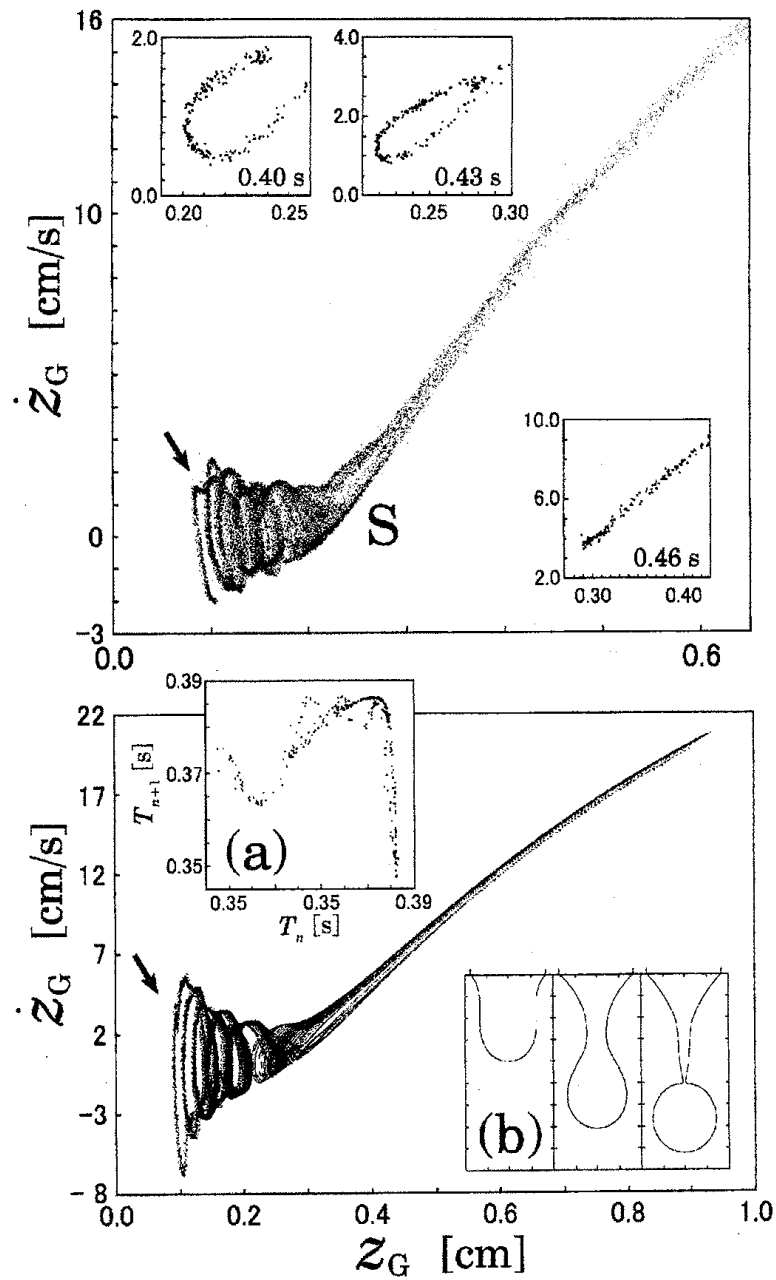


図 6: 上図は実験で観測されたカオスアトラクタ。ここでは、ノズルにぶら下がった部分の重心位置 z_G とその速度 $\dot{z}_G$ が、1/500 秒毎にプロットしてある。実験条件は図 5 と同じ。内挿図は、水滴がちぎれてから一定時間後の Poincaré 断面 ($\dot{z}_G$ 対 z_G のプロット)。下図は、数値シミュレーションにより再現されたカオスアトラクタ。ノズル直径は 7 mm、流量は $Q = 0.32$ g/s。内挿図 (a) は、再帰写像。(b) は、数値シミュレーションで再現された水滴のネッキング過程。

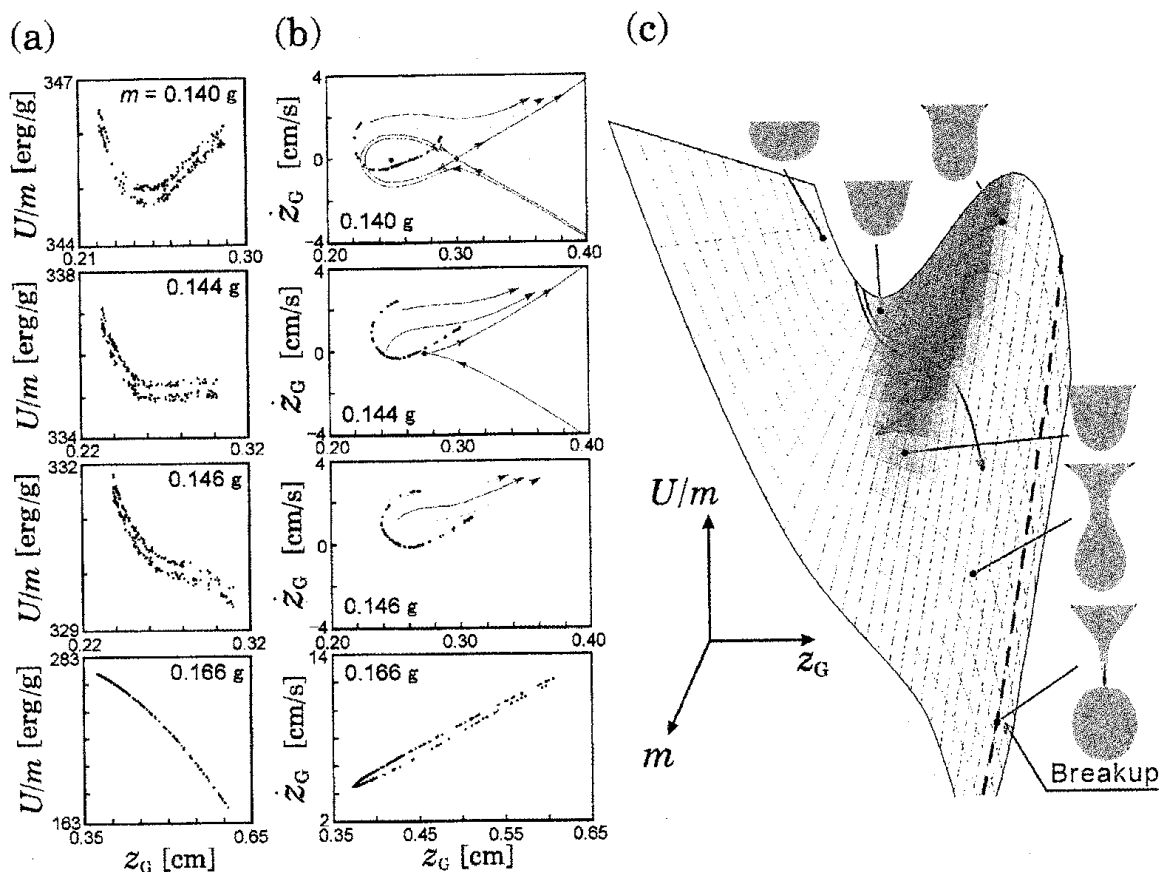


図 7: (a) 図 6(下)に示されたカオスアトラクタの Poincaré 断面 ($z_G, U/m$)。ここでは、質量 m が一定の面をとった。 U/m は単位質量あたりの全ポテンシャルエネルギー。ノズルに静的にぶら下がることのできる最大質量は、 $m_{\text{crit}} = 0.144$ g。 (b) Poincaré 断面 ($z_G, \dot{z}_G$)。 (a) と同じく質量 m が一定の面をとった。実線は、相空間内での流れ。 (c) 典型的なポテンシャル関数の概略図。これは、単位質量あたりのポテンシャルを U/m を、質量 m と重心位置 z_G の関数として描いたもの。

ポテンシャル曲面を導入することで、水滴落下系のダイナミクスについても直感的な理解が可能になる。水滴がちぎれた直後には、蛇口に残った部分は下向きに伸ばされた状態にあり、そこで表面張力が復元力として働くために水滴の上下振動がはじまる。この状態は、ポテンシャル曲面の谷の部分で状態点がふらふらと振動することに対応する。この振動過程では、相空間内の軌道は安定である。だから、落下時間間隔の振舞いがカオスであっても、振動の軌道にはあまり違いが見られないのである。カオスの原因となる不安定性は、軌道がポテンシャルの峰の部分、つまり、上に凸になった面を通過するとき起こる。水滴の質量が臨界値に近づくと、振動の影響で軌道がポテンシャルの峰に近づくことがある。そのとき、速度などのわずかな条件の違いが増大され、軌道不安定性が生じるのである。例えば、図 7(c) の曲面上に示した 2 つの軌道は、振動過程では互いに近い。しかし、質量が臨界値に達する手前で、一方は峰の稜線を乗越え、もう一方は稜線を乗越えられず振動が続いている。その結果、水滴がちぎれるまでの時間が変化し、ちぎれる際の形状の違いが生まれる。そのようなプロセスが繰り返されることで水滴落下パターンのカオスは発生するのである。

これまでに、この系の単純化された数理モデルとして減衰振動を仮定したバネモデルが議論されてきた。その場合、ポテンシャルは下に凸な U 字型を仮定しているので、カオスの原因となる軌道不安定性がなぜ生じるのかを説明することはできない。したがって、この系のモデルとしては、図 7(c) のようなポテンシャル関数 U を導入した以下の記述がより現実的である：

$$\ddot{z}_G = -\frac{\partial U(m, z_G)/m}{\partial z_G} - \frac{(\gamma + Q)}{m} \dot{z}_G, \quad \dot{m} = Q, \quad (1)$$

ここで、 γ は減衰係数である。この記述では、 m - z_G 平面上に定義された図 7(c) のような曲面上を粒子が、 m 軸方向に一定速度 $\dot{m} = Q$ で移動する様子を考えている。その粒子は、はじめポテンシャルの谷間で振動するが、質量がある程度増加すると曲面を滑り落ちはじめ。その滑り落ちる過程が、水滴のネッキングに対応する。そのままでは際限なく落ちていくので、モデルでは、どこかで水滴がちぎれたと判断してやる必要がある。現時点では、実際の水滴がちぎれる条件については明らかではない。しかし、ちぎれる条件を単純化して、図 7(c) の破線に質点が到達したら水滴がちぎれたとみなし、状態点をポテンシャルの谷間に戻すようにすれば、系の定性的な振舞いは再現される。つまり、ちぎれた後の状態点の再設定は決定論的に行なわれると仮定しても、モデルはカオスを示し、実験で観測される周期倍分岐や、ユニットの繰り返し構造も再現される。水滴落下系の非線形現象を、カオス力学系として議論する場合には、式 (1) を仮定したモデルが役立つだろう。

4 おわりに

本稿では、最近の実験、数値シミュレーション結果に基づき、水滴落下系のカオスのメカニズムを議論した。この系のカオス的振舞いは、ポテンシャル曲面を導入することで直感的に理解できる。また、そのポテンシャルの構造は、ノズルサイズや粘性が異なる場合でも、ほぼ同じになることが期待される。今後、噴射や微粒化も含んだ液滴落下系のダイナミクスを理解しようとする場合、システムを特徴付けるパラメータとポテンシャル関数の

関係を明らかにすることが重要になるであろう。

参考文献

- [1] J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard and R. S. Shaw, *Sci. Am.* **254**, No 12, 46 (1986); E. Ott: *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press, New York, 1993); J. Marston, *Nature* **379**, 306 (1996).
- [2] R. Shaw, *The dripping faucet as a model chaotic system* (Aerial Press, Santa Cruz, 1984); P. Martien, S. C. Pope, P. L. Scott, R. S. Shaw, *Phys. Lett. A* **110**, 399 (1985).
- [3] H. N. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito, C. A. Vargas, L. Vincente, *Eur. J. Phys.* **10**, 99 (1989); H. N. Núñez-Yépez, C. Carbajal, A. L. Salas-Brito, C. A. Vargas, and L. Vincente, in *Fluids, Solids and other Complex Systems*, edited by P. Cordero and B. Nachtergaele, 467 (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [4] X. Wu and Z. A. Schelly, *Physica D* **40**, 433 (1989).
- [5] R. F. Cahalan, H. Leidecher, G. D. Cahalan, *Comp. Phys.* **4**, 368 (1990).
- [6] J. Austin, *Phys. Lett. A* **155**, 148 (1991).
- [7] K. Dreyer and F. R. Hickey, *Am. J. Phys.* **59**, 619 (1991).
- [8] J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves and R. D. Pinto, *Phys. Rev. E* **49**, 3963 (1994).
- [9] T. Schmidt and M. Marhl, *Eur. J. Phys.* **18**, 377 (1997).
- [10] T. Katsuyama and K. Nagata, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 396 (1999).
- [11] G. I. Sánchez-Ortiz and A. L. Salas-Brito, *Physica D* **89**, 151 (1995).
- [12] A. d'Innocenzo and L. Renna, *Phys. Rev. E* **58**, 6847 (1998).
- [13] A. Ilarraza-Lomeli, C. M. Arizmendi, A. L. Salas-Brito, *Phys. Lett. A* **259**, 115 (1999).
- [14] L. Renna, *Phys. Lett. A* **261**, 162 (1999).
- [15] A. R. de Lima, T. J. P. Penna, P. M. C. de Oliveira, *Int. J. Mod. Phys. C* **8**, 1073 (1997).
- [16] N. Fuchikami, S. Ishioka, K. Kiyono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 1185 (1999).
- [17] K. Kiyono and N. Fuchikami, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 3259 (1999).
- [18] R. D. Pinto and J. C. Sartorelli, *Phys. Rev. E* **61**, 342 (2000).
- [19] B. Ambravaneswaran, S. D. Phillips, O. A. Basaran, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5332 (2000).

- [20] K. Kiyono and N. Fuchikami, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 49 (2002).
- [21] A. D’Innocenzo, F. Paladini and L. Renna, Phys. Rev. E **65**, 056208 (2002).
- [22] 合原 一幸 (編集), 池口 徹, 山田 泰司, 小室 元政: 「カオス時系列解析の基礎と応用」 (産業図書, 2000).
- [23] 清野 健, 勝山 智男, 日本物理学会誌, **55** 247 (2000).
- [24] K. Kiyono, T. Katsuyama, T. Masunaga and N. Fuchikami, Phys. Lett. A **320**, 47 (2003).