

すべての形式解が収束するための必要十分条件について

都立大理学部 吉野正史 (Masafumi YOSHINO)

§ 1. Introduction. 解析的な係数を持つあるクラス
の微分方程式に対し、そのすべての形式解が収束する為の
必要十分条件について報告します。ここで考える方程式の型
と当面する 1 つの大きな障害を明らかにするためまず次のよ
うな例を考える。 L を $L = \sum_{j=0}^m a_j (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1})^j (x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})^{m-j}$
 $a_j \in \mathbb{C} (0 \leq j \leq m), a_0 a_m \neq 0, m \geq 1$ 整数 に対し
 $Lu = f$ の形式解を求めてみる。未定係数法による と
し $u = \sum u_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu, f = \sum f_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu$ を代入すると次の
漸化式を得る。 $(\sum_{j=0}^m a_j \nu^j \mu^{m-j}) u_{\nu\mu} = f_{\nu\mu} \quad \nu, \mu \geq 1.$
従って もし $(\sum_{j=0}^m a_j \nu^j \mu^{m-j}) \neq 0$ であってしかも $(\sum_{j=0}^m$
 $a_j \nu^j \mu^{m-j})$ が $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ で $\nu, \mu \rightarrow \infty$ のときあまり小さく
ならなければ すべての形式解は収束する。残念ながらこ
れは実際には満たされるとは限らない。 a_j の値によつては
これは小さくなります。それではこれを記述するにはどうす
ればよいのでしょうか。この型の問題はいわゆる small

denominator の問題の最も特別で簡単な例のうちの 1 つです。

ここで報告することは、この困難に対する 1 つの新しい challenge の方法についてです。すなわち方程式の係数からさまるいくつかの数論的関数の解析を通して形式解が収束する為の必要十分条件を与えようというものです。この方法は同時に形式解が収束する時にその収束半径の評価も可能にします。これによって私たちはこれを characteristic points を通っての解析接続の問題に 応用することが出来ます。私たちはこれが可能になるため必要十分条件もあるクラスの作用素に対して与えます。

§2. 記号と結果. $d \geq 2$ 整数, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$
 $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_d)$, $\partial_j = \partial / \partial x_j$ ($1 \leq j \leq d$) $(x\partial)^\alpha = (x_1\partial_1)^{\alpha_1} \dots (x_d\partial_d)^{\alpha_d}$, $m, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ とし
 $\Delta_1, \dots, \Delta_N \in \mathbb{N}$ を $1 = \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_N$ とする整数とし,
 このとき $N \times N$ Leray-Volovich 系の多項式 $P(z)$ を次によって定義します。

$$(2.1) \quad P(z) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m + \Delta_j - \Delta_k} a_\alpha^{j,k} z^\alpha \right)_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, N}}$$

ここで $a_\alpha^{j,k}$ ($1 \leq j, k \leq N$, $|\alpha| \leq m + \Delta_j - \Delta_k$) は複素定数。 $0 \leq \Delta \leq m$

に対して同様にして $q_\Delta(x; \eta)$ を

$$(2.2) \quad q_\Delta(x; \eta) = \left(\sum_{|\beta| \leq m-\Delta + \Delta_j - \Delta_R} b_\beta^{jR}(x) \eta^\beta \right)_{\substack{j=1, \dots, N \\ R=1, \dots, N}}$$

によって定義する。ここで $b_\beta^{jR}(x)$ ($1 \leq j, R \leq N$, $|\beta| \leq m-\Delta + \Delta_j - \Delta_R$) は $x=0$ の近傍で正則とする。

$P(x\partial)$ と $Q_\Delta(x; x\partial)$ を (2.1) (2.2) でそれぞれ η を $x\partial$ で置きかえて得られる作用素とし $f(x)$ を $x=0$ の近傍で正則なベクトル値関数とする。このとき次の方程式のすべての形式解の収束が考える問題である。

$$(2.3) \quad (P(x\partial) + Q_\Delta(x; x\partial))u = f$$

ここで $u = \tau(u_1, \dots, u_N)$ は未知ベクトル値関数。

注意 2.1. 必要ならば $P(x\partial)$ を $P(x\partial) + Q_\Delta(0; x\partial)$ でおきかえることにより 私たちは (2.3) において $b_\beta^{jR}(0) = 0$ と仮定することができる。以後では常にこの条件を仮定する。

結果を述べるためにいくつかの定義をする。 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\xi|=1$, $\varepsilon > 0$ に対し $\Gamma(\xi; \varepsilon)$ を ξ の ε 錐近傍とする。すなわち $\Gamma(\xi; \varepsilon) = \{\eta \in \mathbb{R}^d; |\eta/|\eta| - \xi| < \varepsilon\}$. そのとき degree

of ellipticity $\sigma_{\xi}(P)$ of P with respect to ξ を次で定義する.

$$(2.4) \quad \sigma_{\xi}(P) = \sup_{\varepsilon > 0} \sigma_{\xi, \varepsilon}(P).$$

ここで

$$(2.5) \quad \sigma_{\xi, \varepsilon}(P) = \sup \left\{ c \in \mathbb{R}; \liminf_{|z| \rightarrow \infty, z \in \Gamma(\xi; \varepsilon) \cap \mathbb{N}^d} |z|^{m-mN-c} |\det P(z)| > 0 \right\}$$

但し もし $\liminf_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-\delta} |\det P(z)| = 0$ for $\forall s \in \mathbb{R}$ のときは $\sigma_{\xi, \varepsilon}(P) = -\infty$ とする。特に P を指定する必要のないときは $\sigma_{\xi}(P)$ のかわりに σ_{ξ} とかく。

$f_s(x; z)$ を x について Taylor 級数に展開する。 $f_s(x; z) = \sum_r f_{s,r}(z) x^r$ ここで $f_{s,r}(z)$ は $P(z)$ と同様の形をしている。そのとき $MS(Q_{\Delta})$ を次によって定義する。

$$(2.6) \quad MS(Q_{\Delta}) = \left\{ f_{s,r}(z) \neq 0 \text{ なるすべての } r \text{ を含むような原点, } \right. \\ \left. \text{を頂点とする最小の closed convex cone} \right\}.$$

ここでもし $f_s(x; z) \equiv 0$ のとき $MS(Q_s) = \{0\}$ とする。

次に $\det P(z) = \sum_{j=0}^{mN-\delta} a_j(z)$ とかく。ここで $a_j(z)$ は j 次齊次多項式, δ は整数 又は $\delta = +\infty$ であり $a_{mN-\delta}(z) \neq 0$ とする。もし $\det P(z) \equiv 0$ のときは $\delta = +\infty$

$a_{mN-\delta}(\eta) \equiv 0$ とする。このとき次を仮定する。

(A.1) もし $Q_\delta \neq 0$ ならば $\delta \leq \alpha$ 。

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, $-\infty \leq d_0 \leq m$ とする。このとき

(2.7) $\Sigma_0 = \Sigma_0(P, d_0) = \{\xi \in \mathbb{R}_+^d; |\xi| = 1, a_{mN-\delta}(\xi) = 0 \text{ かつ } \sigma_\xi(P) \leq d_0\}$ 。

このとき $d_0 \leq d_1$ ならば $\Sigma_0(P, d_0) \subset \Sigma_0(P, d_1)$ に注意する。

もし $Q_\delta \neq 0$ であれば (A.1) より $a_{mN-\delta}(\theta) \neq 0$ なる θ が存在する。

$S(\eta, \rho) = \sum_{j=0}^{mN-\delta} \rho^{mN-\delta-j} a_j(\eta)$ とおき $\eta = \zeta_1 \theta + \zeta'$

$\zeta' = (\zeta_2, \dots, \zeta_d)$ とする。そのとき $S(\zeta_1 \theta + \zeta', \rho)$ を ζ_1 の多項式として分解し ζ も η で表現して 次の表現をえる。

$$(2.8) \quad S(\eta, \rho) = \prod_{j=1}^{j_0} g_j(\eta, \rho)^{m_j}$$

ここで $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$ 。さて $\Sigma_0 \neq \emptyset$ と仮定し $\xi_0 \in \Sigma_0$ 。

$U(\xi_0)$ を ξ_0 の近傍とする。各 $\xi \in U(\xi_0)$, $\pm \theta \in MS(Q_\delta) \cap$

$\{\theta \in \mathbb{R}^d; |\theta| = 1\}$ と $\rho \geq 0$ に対し関数 $t \mapsto g_j(\xi + t\theta, \rho)$ は

$t=0$ で Hölder 連続であることが Puiseux 展開の理論より

従う。さらに ζ, θ, ρ に依存しない $\tau_j > 0$, $\omega_j > 0$ と

$c_j(\xi, \theta, \rho) \neq 0$, $R_j(\xi, \theta, \rho, t)$ が存在して次が成立する。

$$(2.9) \quad g_j(\xi+t\theta, p) - g_j(\xi, p) = c_j(\xi, \theta, p) t^{\tau_j} + t^{\tau_j+\omega_j} R_j(\xi, \theta, p, t) \\ t \rightarrow 0.$$

このとき次を仮定する。

(A.2) ($g_j(\xi+t\theta, p)$ の $t=0$ における一様 Hölder 連続性). もし $Q_\Delta \neq 0$ かつ $\Sigma_0(P, m-\Delta) \neq \emptyset$ ならば 各 $\xi_0 \in \Sigma_0(P, m-\Delta)$ と $g_j(\xi_0, 0) = 0$ なる各 g_j に対して ξ_0 の近傍 $U(\xi_0)$, $\rho_0 > 0$, $t_0 > 0$ そして $R_0 > 0$ が存在して $\forall \xi \in U(\xi_0)$, $0 \leq \forall p < \rho_0$, $0 \leq \forall t < t_0$, $\forall \pm \theta \in MS(Q_\Delta)$ に対して (2.9) が成立し しかも評価 $|R_j(\xi, \theta, p, t)| \leq R_0$ が成立する。

各 $\xi, \theta \in \mathbb{R}^d$ に対し $a_{mN-\delta}(\eta)$ の $\eta = \xi$ における localization $L_\xi(\theta)$ を次で定義する。

$$(2.10) \quad a_{mN-\delta}(\xi+t\theta) = L_\xi(\theta) t^{\tilde{\ell}} + O(t^{\tilde{\ell}+1})$$

ここで $\tilde{\ell}$ は整数 ≥ 1 であって $L_\xi(\theta) \neq 0$. このとき次を仮定する。

(A.3) ($L_\xi(\theta)$ の ellipticity). $Q_\Delta \neq 0$ かつ $\Sigma_0(P, m-\Delta) \neq \emptyset$ ならば $\forall \xi \in \Sigma_0(P, m-\Delta)$, $\forall \pm \theta \in MS(Q_\Delta)$ に

対して $L_3(0) \neq 0$ である。

$e_j(\eta)$ ($1 \leq j \leq N$) を $p(\eta)$ の固有値とし $r(\eta) = \min_{1 \leq j \leq N} |e_j(\eta)|$ とおく。 $A \subset \mathbb{R}^d$ とし このとき (一般化

された) Leray の補助関数 $\rho(A, P)$ を次によって定義する。

$$(2.11) \quad \rho(A, P) = \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} r(\eta)^{1/|\eta|}.$$

ここでもし $A \cap \mathbb{N}^d$ が有限集合であれば $\rho(A, P) = 1$ とおく。 $r(\eta)$ は $|\eta| \rightarrow \infty$ のとき 高々 多項式の増大度しかもたないことに注意すると $0 \leq \rho(A, P) \leq 1$ である。

$\rho(A, P)$ の基本的な性質はあとで述べる。 $f(x) = \sum f_\eta x^\eta / \eta!$ を原点での解析関数とするとき $MS(f) = \{\eta \in \mathbb{N}^d; f_\eta \neq 0\}$ とおく。 $C \subset \mathbb{N}^d$ を任意に与える。このとき

定理 2.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) を仮定する。このとき原点の近傍で正則であって $MS(f) \subset C + MS(Q_s)$ をみたす任意の f に対して 方程式 (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は $\rho(C + MS(Q_s), p) > 0$

かつ $\det P(\eta) \neq 0$ が有限個の η を除いてすべての $\eta \in \mathbb{N}^d$ に対して成立することである。

注意 2.2. 定理 2.1 において一般には条件 (A.1) (A.3) をおとすことはできない。又

(A.2) を満たすような場合は $d=2$ あるいは $g_j(\eta, p)$ がなめらかな場合であることも示すことができる。

注意 2.3. 応用では次の修正も有用である。

$\Sigma'_0 = \Sigma'_0(P, d_0)$ を $\Sigma'_0(P, d_0) = \Sigma_0(P, d_0) \setminus \{\xi \in \mathbb{R}_+^d; |\xi| = 1, a_{mN-\delta}(\xi) = 0 \text{ かつ } \sigma_\xi(P) = d_0\}$ によって定義し $\overline{\Sigma'_0(P, d_0)}$ を $\Sigma'_0(P, d_0)$ の閉包とする。このとき次を仮定する。

(2.12) $\sigma_\xi = m - \Delta$ をみたす $\forall \xi$ に対して (2.4) および (2.5) における $\sup$ は ある $\varepsilon > 0$ と $c = m - \Delta$ によって達成される。

このとき $\Sigma_0(P, m - \Delta)$ を $\overline{\Sigma'_0(P, m - \Delta)}$ で置きかえても定理 2.1 は正しい。

以下で 定理 2.1 からのいくつかの帰結について述べる。

系 2.2. 条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, d_0) = \emptyset$ (の (2.12) と $\Sigma'_0(P, d_0) = \emptyset$) を ある d_0 に 対して 仮定する。このとき原点の近傍で正則な任意の f と (2.3) で与えられる $\forall Q_s(x; x_0)$ で $m-\Delta \leq d_0$ をみたすものに対し 方程式 (2.3) の すべて の 形式解は収束する。

証明: $C = MS(Q_s) = \mathbb{R}_+^d$ の場合に 定理を適用する。(A.2) (A.3) は 明らか

他方 $\Sigma_0 = \emptyset$ より $\sigma_\xi > -\infty \quad \forall \xi$ が 成立するか これより $\rho(\mathbb{R}^d; P) > 0$ が 成立し これより $\det P(\eta)$ は 高々有限個の $\eta \in \mathbb{N}^d$ 以外では 0 に ならない ことがわかる。条件 (2.12) と $\Sigma'_0 = \emptyset$ を 仮定したときには Remark 2.3 より 求めることが 従う。

注意 2.4. 条件 $\Sigma_0 = \emptyset$ は 次の ような 意味をもつ。もし $\Sigma_0 = \emptyset$ であれば small denominator は $od Q_s \leq d_0$ i.e. $m-\Delta \leq d_0$ をみたす Q_s に 対しては 本質的には あらわれない。もし そうでなければ 一般に あらわれる。

例 2.5. $P(\eta)$ は elliptic すなわち $a_{mN}(\eta) \neq 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^d$ とする。このとき $\Sigma_0(P, m) = \emptyset$ である。従って (2.3) の すべて の 形式解は収束する。

例 2.6. $P(\eta)$ が hypoelliptic 多項式, simple chara-

-characteristic の場合にあとして述べる σ_3 の解析より $\Sigma_0 = \emptyset$ となる必要十分条件, 十分条件を与えることができる.

例. 2.7. 次の問題を考える. (2.2) で与えられる symbol をもつ q 対な perturbation $Q_0(x; x\partial)$ と任意の f に対してすべての形式解が収束するような P のクラスを求めよ. 系 2.2 はこれに対する1つの解答を与えている. すなわち $\Sigma_0(P, m-s) = \emptyset$ かつ (A.1) をみたすような P が求まる1つのクラスを与える.

系 2.3. (A.1) かつ $d=2$ とし $\Sigma_0(P, m-s) \cap MS(Q_0) = \emptyset$ (or (2.12) と $\Sigma'_0(P, m-s) \cap MS(Q_s) = \emptyset$) を仮定する. このとき 原点の近傍で正則な任意の f に対し方程式 (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は $\rho(R; P) > 0$ となることである.

定理 2.4. $C \subset \mathbb{N}^d$ を有限集合とする. さらに条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, m-s) \cap MS(Q_s) = \emptyset$ を仮定する. このとき 原点の近傍で正則であって $MS(f) \subset C + MS(Q_0)$ をみたす任意の f に対して E_f (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は 高々有限個の γ の γ についてすべての $\eta \in \mathbb{N}^d$ に対し $\det p(\eta) \neq 0$ であることである.

例 2.9. もし f が多項式を成分とするベクトルであれば定理の条件を満足する.

注意 2.10. a) (2.12) を仮定すれば、定理 2.4 において Σ_0 を Σ'_0 でおきかえることができる.

b) 定理 2.4 において条件 (A.1) および $\Sigma_0(P, m-\Delta) \cap MS(Q_\Delta) = \emptyset$ は一般におとすことはできない.

c) ただちにわかるように (A.1) (A.3) より (A.1) および $\Sigma_0 \cap MS(Q_\Delta) = \emptyset$ が従い C が有限集合であることより $P(C + MS(Q_\Delta); P) = 1$ が従う. 従って特に f が多項式型のときは 定理 2.1 は 定理 2.4 より従う. よてこの場合には 定理 2.4 は 2.1 の改良になっている.

定理 2.4 に関連して $(P+Q_\Delta)$ の kernel について述べておく. 原点の近傍で正則な u が $\ker(P+Q_\Delta)$ にはいるとは $(P+Q_\Delta)u=0$ が成立することである. このとき次が成立する.

命題 2.5. 条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, m-\Delta) \cap MS(Q_\Delta) = \emptyset$ (あるいは (2.12) と $\Sigma'_0(P, m-\Delta) \cap MS(Q_\Delta) = \emptyset$) を仮定する. このとき $\ker(P+Q_\Delta) \neq 0$ なるための必要かつ十分条件は $\det p(\gamma) = 0 \exists \gamma \in \mathbb{N}^d$. さらに $\ker(P+Q_\Delta)$ が無限次元になるための必要かつ十分条件は無限

に多くの $\gamma \in \mathbb{N}^d$ に対して $\det P(\gamma) = 0$ となることである。

この応用を述べるために $\lambda \in \mathbb{C}$ が $P+Q_0$ の固有値であるとは $\ker(\lambda - P - Q_0) \neq 0$ なることとする、このとき次の成立する。

系 2.6. 条件 $\Sigma_0(P, m-\Delta) \cap MS(Q_0) = \emptyset$ および (A.1) を $\delta < m$ に対して仮定する。このとき $\lambda \in \mathbb{C}$ が $P+Q_0$ の固有値であるための必要かつ十分条件は $\exists \gamma \in \mathbb{N}^d$ に対し $\det(P(\gamma) - \lambda) = 0$ 。 λ が $P+Q_0$ の無限多重度の固有値であるための必要かつ十分条件は 無限に多くの $\gamma \in \mathbb{N}^d$ に対して $\det(P(\gamma) - \lambda) = 0$ となることである。

注意 2.11. $R = P$ の $P+Q_0$ とする。 $E(R)$ を $\lambda \in \mathbb{C}$ であって λ は R の無限多重度の固有値であるか あるいは R の固有値の集積点とする。明らかに $E(R)$ は R の Fredholm 性と関連している。もし P と Q_0 が系 2.6 の条件をみたせば $E(P+Q_0) = E(P)$ であることがわかる。 $E(P)$ は代数方程式の根の集積点であり 知ることができる。

今までのところ私たちは 形式解の収束と small deno-

minator について述べてきた。以下では 4 次半径に関連した結果をのべる。このために次の仮定をする。

(A.4) もし $Q_\Delta \neq \emptyset$ かつ $\Sigma_0(P, m-\Delta) \neq \emptyset$ であれば
 $\ell(\xi, \theta) \leq \Delta - \delta$ for all $\xi \in \Sigma_0(P, m-\Delta), \pm \theta \in MS(Q_\Delta)$
 ここで $\ell = \ell(\xi, \theta)$ は (2.10) で与えられる整数である。

$R > 0$ に対して $D_R = \{x \in \mathbb{C}^d; |x_1| + \dots + |x_d| < R\}$, $C \subset \mathbb{N}^d$ とする。このとき

定理 2.7. 条件 (A.1) ~ (A.4) を仮定する。このとき $R_0 > 0$ が存在して、任意の $R, 0 < R < R_0$ と任意の $f: \text{holomorphic in } D_R$ で $MS(f) \subset C + MS(Q_\Delta)$ に対し 方程式 (2.3) のすべての形式解が D_R で正則であるための必要十分条件は $p(C + MS(Q_\Delta); P) = 1$ かつ $\det p(\eta) \neq 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{N}^d$ except for finite number of η の 1 が成立することである。

注意 2.12. a) (2.12) を仮定すれば Σ_0 を $\overline{\Sigma'_0}$ で置きかえてもよい。

b) (A.1) および $\delta < \Delta$ を仮定し $a_{mN-\delta}(\xi) = 0$

がある $\xi \in \mathbb{R}_+^d$, $\xi > 0$ に対して成立しているとする。このとき 曲面 $\phi(x) \equiv |x_1| + \dots + |x_d| = R$ ($R > 0$) は $|x_j| = \xi_j$ ($1 \leq j \leq d$) をみたす点 x で $P + Q_\infty$ に対して特性的である。すなわち $\det P((x(\partial\phi/\partial x)))|_{|x_j|=\xi_j} =$

0. 従って定理 2.7 で考えている問題の中には特性面を通しての解析接続の問題も含まれる。上述の定理はこれができるための 1 つの diophantus 的な必要十分条件を与えている。

系 2.8. (A.1) と $\Sigma_0(P, m-\Delta) = \emptyset$ (or (2.12) と $\Sigma'_0(P, m-\Delta) = \emptyset$) を仮定する。このとき $R_0 > 0$ が存在して $0 < \forall R < R_0$ と $(P+Q_S)u$ が D_R で正則となるような任意の形式的巾級数 u に対し u は収束して D_R で正則となる。

§3. σ_ξ と $P(A; P)$ の基本的性質

$a_{mN}(\tau)$ を $\det P(\tau)$ の mN 次斉次部分とするとき $P(\tau)$ が $\tau = \xi$ で elliptic であるとは $a_{mN}(\xi) \neq 0$ である。

Lemma 3.1. $\sigma_\xi = m \Leftrightarrow P$ が ξ で elliptic

さらに P が ξ で elliptic でなければ $\sigma_\xi \leq m-1$.

注意 3.1. この lemma により $\Sigma_0(P, m)$ は特性集合と一致することがわかる。

$\xi \in \mathbb{R}_+^d$, $|\xi|=1$ $g_j(\eta, \rho)$ を (2.7) で与えられるとする。
このとき次の条件を考える。

(C.1) $g_j(\xi, 0) = 0$ をみたす g_j に対し $\exists \Gamma(\xi): \xi$ の conical nbd. と $C > 0$, p_j , $-\infty < p_j \leq 1$ が存在して
 $|g_j(\eta, 1)| \geq C(1+|\eta|)^{p_j} \quad \forall \eta \in \Gamma(\xi) \cap \mathbb{N}^d$ が成立する。

(C.2) $g_j(\xi, 0) = 0$ をみたす g_j に対し 関数 $g_j(\eta, \rho)$ は $\rho=0$, $\eta=\xi$ の近傍でなめらかである。

このとき次の命題が成立する。

命題 3. 2 a) (C.1) を仮定する。このとき

$$\sigma_\xi \geq m - \delta - \sum^* (1 - p_j) m_j$$

ここで $\sum^*$ は $g_j(\xi, 0) = 0$ なる j についての和である。

b) (C.1) と (C.2) を仮定する。このとき

$$\sigma_\xi = m - \delta - \sum^* m_j.$$

例 3. 2. Hypoelliptic の場合. この場合 $\exists \rho > 0$ が存在して $p_j \geq \rho$ が成立している。(Taylor の本参照). 従って $\sigma_\xi \geq m - \delta - (1 - \rho) \sum^* m_j$

例 3. 3. simple characteristic の場合も (C.1) をみたすような適当な条件下で $\sigma_\xi = m - 1$ となる。

次に $d=2$ であって m, n , $n < m$ に対して $P(\eta)$ が次の形をしているとき σ_ξ をきめる。

$$(3.1) \quad P(\eta) = P_m(\eta) + P_n(\eta)$$

ここで $P_m(z)$ と $P_n(z)$ は (2.1) でそれぞれ $|x| = m + \Delta_j - \Delta_k$, $|x| \leq m + \Delta_j - \Delta_k$ としたもので与えられ $\det P_m(z) \neq 0$ とする。 $\omega > 0$, $t \in \mathbb{C}$ に対して集合 $F_\omega(t)$ を次で定義する。

$$(3.2) \quad F_\omega(t) = \left\{ \left\{ \mu^\omega(v/\mu - t) \right\}_{v, \mu \in \mathbb{N}} \text{ の } v, \mu \rightarrow \infty \text{ のときの} \right. \\ \left. \text{すべての集積値} \right\}$$

このとき次が成立する。

命題 3.3. $d=2$ であって (3.1) を仮定する。このとき

a) $\xi = (1, 0)$ あるいは $(0, 1)$ のとき. $\sigma_\xi = m$ あるいは $\sigma_\xi \leq n$ が成立する。

b) $\xi \neq (1, 0), (0, 1)$ のとき. $n < \sigma < m$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ とする。このとき $\sigma_\xi = \sigma \iff \det P_n(\xi_1/\xi_2, 1) = 0$ が集合 $F_{(m-\tau)/m_0}(\xi_1/\xi_2) \ni 0$ ($\forall \tau > \sigma$); $\nexists 0$ ($n < \tau < \sigma$)。ここで m_0 は $t = \xi_1/\xi_2$ の方程式 $\det P_m(t, 1) = 0$ の多重度である。

注意 3.4. $F_\omega(t)$ は連分数を用いて解析することができる。ここではこれが 0 を含むか否かということについての結果をまとめておこう。 $t > 0$ で有理数 あるいは $t > 0$ で $0 < \omega < 2$ の場合は $F_\omega(t) \ni 0$ 。他方 $\omega \geq 2$ で t が irrational のときは t を連分数に展開する。 $t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ 。ここで

(3.3) $a_0 = [t], \alpha_0 = t - a_0, \alpha_1 = 1/\alpha_0, a_1 = [\alpha_1], 1/\alpha_2 = \alpha_1 - a_1, a_2 = [\alpha_2], \dots, a_n = [\alpha_n], 1/\alpha_{n+1} = \alpha_n - a_n; \dots;$
 ここで $[s]$ は s をこえない最大の整数. 次に ν_n, μ_n ($n=1, 2, \dots$) を次によつて定義する.

$$(3.4) \quad \nu_{n+2} = a_n \nu_{n+1} + \nu_n; \mu_{n+2} = a_n \mu_{n+1} + \mu_n$$

ここで $\nu_1 = 0, \nu_2 = 1; \mu_1 = 1, \mu_2 = 0$. このとき次が成立する $F_\omega(t)$ ($\omega > 2$) が 0 を含むための必要かつ十分条件は $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{\omega-2}/a_{n-1} = 0$. さらに $\exists E \subset [0, \infty)$ でルベグ測度 0 なるものが存在して $F_\omega(t) \neq 0$ for all $t \notin E$ かつ $\omega > 2$. が成立する.

Lemma 3.4. σ_ε は $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^d$ の関数として下半連続である.

Lemma 3.5. $P(A; P)$ は 次の性質をもつ.

a). $0 \leq P(A; P) \leq 1$ for any $A \subset \mathbb{R}_+^d$.

b). もし $P(A, P-\lambda) = 0$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$ ならば $P(\eta)$ の固有値は $|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ のとき λ に

集積する. もしそうであるければ $P(A; P-\lambda) = 1$.

c) $A = \bigcup_{k=1}^{k_0} A_k$ のとき $P(A; P) = \min_{1 \leq k \leq k_0} P(A_k; P)$.

次に $P(\eta)$ が invertible のとき次のようにおく.

$$(3.5) \quad P(\eta)^{-1} = (p^{ij}(\eta))_{\substack{i,j=1,\dots,N \\ i \rightarrow 1,\dots,N}}; \quad \|P(\eta)^{-1}\| = \max_{1 \leq i, j \leq N} \|p^{ij}(\eta)\|.$$

Lemma 3.6. 任意の $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し もし $\det P(\eta)$ が高々有限個の $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ をのぞいて 0 にならないならば

$$(3.6) \quad P(A; P) = \left(\limsup_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} \|P(\eta)^{-1}\|^{1/|\eta|} \right)^{-1}$$

その他の場合は $P(A; P) = 0$.

Remark 3.5. $p(\eta)^{-1} = \operatorname{co} P(\eta) / \det P(\eta)$ を (3.6) に代入し $\operatorname{co} P(\eta)$ は高々多項式の増大度であることに注意すれば

$$P(A; P) \geq \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} |\det P(\eta)|^{1/|\eta|}.$$

この不等式は A が $\operatorname{cone} \Gamma = \{r\xi; r > 0, \sigma_\xi > -\infty\}$ の中に含まれているときには有効である。

例 3.6. $\sigma_\xi > -\infty$ であれば その十分小さな conical nbd. Γ_ξ が存在して $P(\Gamma_\xi; P) = 1$. 特に $\Sigma_0 = \emptyset$ であれば $P(\mathbb{N}^d; P) = 1$ である。又 $P = \partial_1 - \tau \partial_2$ とすれば $\xi = (\tau, 1)$ $\sigma_\xi > -\infty \Leftrightarrow \tau$ が Liouville number でない。

例 3.7. $\Sigma_0 \cap MS(Q_s) = \emptyset$ とする。このとき 任意の有限集合 $C \subset \mathbb{N}^d$ に対して $P(C + MS(Q_s); P) = 1$ である。

$\sigma_\xi = -\infty$ の場合の解析をするために次の Lemma を準備しておく。

Lemma 3.7. $\sigma_\xi = -\infty$ をみたす各 ξ に対して $\lambda \in \mathbb{R}$ ξ の金雀近傍 Γ_ξ , $\exists f_{ij}(\eta)$ ($1 \leq i, j \leq N$) $\text{coP}(\eta)$ の成分が存在して 次が成立すると仮定する.

$$(3.7) \quad \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in \Gamma(\xi) \cap \mathbb{N}^d} |\eta|^{-\lambda} |f_{ij}(\eta)| > 0.$$

そのとき

$$(3.8) \quad P(A; P) = \liminf_{|\eta| \rightarrow \infty, \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} |\det P(\eta)|^{1/|\eta|}.$$

例 3.8. $N=1$ の場合が条件 (3.7) を満たす最も簡単な例である.

Lemma 3.8. $d=2$ と仮定する. このとき

$$P(A; P) > 0 \quad (\text{resp.} = 1) \Leftrightarrow (3.8) \text{ の右辺が } > 0 \quad (\text{resp.} = 1).$$

注意 3.9. $P(A; P)$ は Leray に よって導入された補助関数の一般化であることを示しておこう. このため $d=2$ かつ $P = P_m$: homogeneous とする. $\det P(\eta) = C \eta^\alpha \prod_j (\eta - \tau_j \eta_2)^{m_j}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^2$; C, τ_j constants, $\tau_j \neq 0$; $m_j \geq 1$ integer) としこれを (3.8) に代入する. そのとき もし 無限に多くの $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ に対して $\eta^\alpha = 0$ となつたとすれば $P(A; P) = 0$ である. そうでなければ $P(A; P) = \min_{j, \tau_j > 0} \tilde{P}(A; \tau_j)^{m_j/(1+\tau_j)}$. ここで

$$\tilde{P}(A; t) = \liminf_{\nu, \mu \rightarrow \infty, (\nu, \mu) \in A \cap \mathbb{N}^2} |\nu - t\mu|^{1/\mu}$$

$\tilde{P}(\mathbb{N}^2; t)$ は クザルサー問題の Fredholm 性の研究に関連して J. Leray によって導入され Leray および Pisot によって研究されている。(3.3) (3.4) によれば.

$$\tilde{P}(\mathbb{N}^2; t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1/\mu_{n+1}}$$

であることがわかっている。(3.8) によれば $\det p(\gamma) \sim e(\gamma) |\gamma - \xi(\gamma_1 + \dots + \gamma_d)|^c$ ここで $n > 0, e(\gamma) \neq 0$ なるものにすればさらに高次元の一般化された Leray の補助関数が得られる。

1984. 12/27 都立大.

〒158 世田谷区深沢 2-1-1

都立大学理学部数学教室