

QUATERNION PROJECTIVE SPACE への C_n 型の
コンパクトリイ群および非コンパクトリイ群の
作用 について

山形大学 理 内田 伏一

§ 1. C_n 型のコンパクトリイ群の作用について.

次の2つの補題を準備する. 証明は省略する
ので, 文献[1]の対応する補題の証明を参照して
ほしい.

Lemma 1. $n \geq 7$, G : connected closed proper subgr.
of $Sp(n)$, $\dim Sp(n)/G \leq 8n-2$

$\Rightarrow G \sim Sp(n-i) \times K$, K : subgr. of $Sp(i)$, $i=1,2,3$.

(注) $Sp(n) = \{A \in M_n(H) : A^*A = I_n\}$.

Lemma 2. $r \geq 5$, $k < 8r$; $Sp(r)$ の k -dim. non-
trivial real representation は $(V_r)_R \oplus \mathbb{R}^{k-4r}$ と同値で
ある. $\hookrightarrow (V_r)_R : Sp(r) \hookrightarrow O(4r)$ は standard 正
inclusion である.

以下, $n \geq 7$, M : connected closed smooth manifold,
 $\dim M \leq 8n-2$, 且つ $M \perp \kappa Sp(n)$ が smooth
 かつ non-trivial κ 運動 "2" にもなることを示す。

$$F(i) = \{x \in M : Sp(n-i) \subset Sp(n)_x \subset Sp(n-i) \times Sp(i)\},$$

$$M(i) = Sp(n) \cdot F(i)$$

と置く. $M_{(0)} = F_{(0)} = F(Sp(n), M)$ であり, さらに

$$M(i) \cong Sp(n) / \left(Sp(n-i) \times_{Sp(i)} \right) F(i) \text{ (equiv. diffeo.)}$$

Proposition 3. 上記の M かつ "2"

$$(i) \quad M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)} \cup M_{(3)},$$

$$(ii) \quad F(Sp(n-k), M(i)) = \emptyset \text{ for } k < i \leq n-i,$$

$$(iii) \quad M(k) \neq \emptyset \Rightarrow M(i) = \emptyset \text{ for } i \geq k+2.$$

証明. (i) は Lemma 1 より分かる. (ii) かつ "2",

$F(Sp(n-k), M(i)) \neq \emptyset$ とすれば, $x \in F(i)$, $g \in Sp(n)$ が存在
 して $gx \in F(Sp(n-k), M(i))$ となる。即ち

$$Sp(n-k) \subset Sp(n)_{gx} = g Sp(n)_x g^{-1} \subset g (Sp(n-i) \times Sp(i)) g^{-1}.$$

図式

$$\begin{array}{ccc} Sp(n-k) & \xrightarrow{\text{injection}} & Sp(n-i) \times Sp(i) \\ & & \swarrow \text{proj.} \quad \searrow \text{proj.} \\ & & Sp(n-i) \quad \quad Sp(i) \end{array}$$

を考慮, $Sp(n-k)$ が simple Lie gr. であることより,
 $n-k \leq \max(n-i, i)$ となる. $\therefore k \geq \max(i, n-i)$.

(iii) かつ, $x \in F(k)$ における slice 表現を σ_x とする.
 Lemma 2 が使用でき,

$$\sigma_x|_{Sp(n-k)} \cong (V_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial or trivial}$$

となる. いずれにせよ, up to conjugation in $Sp(n)$ で
 principal isotropy gr. が $Sp(n-k-1)$ と包摂している.

$$\therefore M(i) \neq \emptyset \Rightarrow F(Sp(n-k-1), M(i)) \neq \emptyset.$$

しかるに, (ii) より $i > k+1 \Rightarrow F(Sp(n-k-1), M(i)) = \emptyset$
 であるから, $M(i) = \emptyset$ for $i > k+1$ となる.

Proposition 4. $M = M_{(0)} \cup M_{(1)}$ のとき, compact
 connected $Sp(1)$ -manifold X が存在して, ∂X
 上の $Sp(1)$ -action は free であり, $M \cong \partial(\mathbb{D}^{4n} \times X)/Sp(1)$
 と表わされる. $M: \text{orientable} \Leftrightarrow X: \text{orientable}$.

証明は文献 [2] を参照してほしい.

Proposition 5. $M = M_{(k)} \cup M_{(k+1)}$, $M_{(k)} \neq \emptyset$, $M_{(k+1)} \neq \emptyset$
 のとき, $F(k)$ の各連結成分の次元 = $4(k+1)(n-k)$.
 ($k=0, 1, 2$)

証明. $x \in F(k)$ に対する slice 表現 σ_x について,
 Lemma 2 より $M(k+1) \neq \emptyset$ より,

$$\sigma_x|_{S_p(n-k)} \cong (V_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial}.$$

一方, orbit $S_p(n) \cdot x$ に対する isotropy 表現 ρ_x について,

$$\rho_x|_{S_p(n-k)} \cong k \cdot (V_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial} \quad \text{となる.}$$

$$\therefore (\sigma_x \oplus \rho_x)|_{S_p(n-k)} \cong (k+1)(V_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial}.$$

$$\therefore \text{codim. of } F(k) \text{ at } x = 4(k+1)(n-k).$$

Cor. $M = M(2) \cup M(3) \Rightarrow M(2) = \emptyset \text{ or } M(3) = \emptyset.$

(注) $\dim \frac{S_p(n)}{S_p(n-k) \times S_p(k)} = 4k(n-k),$ 軌道-標数

$$\dim S_p(n) = n(2n+1), \quad \chi \left(\frac{S_p(n)}{S_p(n-k) \times S_p(k)} \right) = \binom{n}{k}.$$

Theorem A. $7 \leq n \leq m \leq 2n-2$, $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ or $\mathbb{Z}_p$

M : closed orientable manifold with non trivial smooth

$S_p(n)$ -action, $M \simeq P_m(H)$

$\Rightarrow M \cong 2(\mathbb{D}^{4n} \times X)/S_p(1)$, X : compact connected
 orientable $S_p(1)$ -manifold, $S_p(1)$ -action on $2X$ is free,
 X : acyclic/ K , $\pi_1(M) \cong \pi_1(X)$.

さらに K , $K = \mathbb{Z}$ のとき, X 上の $S_p(1)$ -action は唯一つ

の不動点を持ち、その点以外では $Sp(1)$ は free に働く。

証明. この定理は [2] の定理を改良したものである。

(1) $M = M_{(i)}$ ($i=1,2,3$) とすれば, $F_{(i)} \rightarrow M \rightarrow Sp^{(n)} / Sp^{(n-i)} \times Sp^{(i)}$ なる fibration を使って

$$m+1 = \chi(M) = \chi(F_{(i)}) \cdot \chi\left(\frac{Sp^{(n)}}{Sp^{(n-i)} \times Sp^{(i)}}\right) \equiv 0 \pmod{\binom{n}{i}}$$

となるが, $n < m+1 \leq 2n-1$ より矛盾を生ずる。

(2) $M = M_{(1)} \cup M_{(2)}$ とすれば, Proposition 5 および slice 表現の計算によつて, M は余次元 1 の principal orbit をもつことになる。オイラー-標数の計算によつて矛盾を生ずる。

(3) 結局, $M = M_{(0)} \cup M_{(1)}$ となり, Proposition 4 により, $M \cong 2(D^{+n} \times X) / Sp(1)$ と表わすことが出来る。あとは、文献 [2] の証明と同様にして, Theorem A の主張の大半を得る。

(4) 最後に, $K = \mathbb{Z}$ のとき X 上の $Sp(1)$ -action が唯一つの不動点を持ち、それ以外では free に働くことを示そう。 $Sp(1)$ -manifold X は acyclic/ $\mathbb{Z}$ であり, ∂X 上の $Sp(1)$ -action は free である。 $Sp(1)$ の maximal torus $U(1)$ について, Smith の定理より,

$X^{U(1)} = \{x\}$: 1 点集合 であることが分かる。

このとき, $S_p(1)_x = U(1), N U(1) \text{ or } S_p(1)$ である。

$(S_p(1)/U(1))^{U(1)} = N U(1)/U(1) = 2\text{-points}$ 故 $S_p(1)_x \neq U(1)$.

次に $\mathbb{Z}_p$ (p : 素数) を $U(1)$ の subgr. とすると, $X^{\mathbb{Z}_p}$ は closed manifold, orientable/ $\mathbb{Z}_p$ 且 $\rightarrow$ acyclic/ $\mathbb{Z}_p$ である。

$$\therefore \{x\} = X^{U(1)} \subset X^{\mathbb{Z}_p} = 1\text{-point} \quad \therefore X^{\mathbb{Z}_p} = \{x\}.$$

とく, $X - S_p(1) \cdot x$ の各点の isotropy 群が単位元のみから成ることを示す。すなわち, $S_p(1)$ の center $G = \{\pm 1\}$ について,

$$(S_p(1)/N U(1))^G = S_p(1)/N U(1) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : \text{not acyclic}/\mathbb{Z}$$

一方, $X^G = \{x\}$ であるから $S_p(1)_x \neq N U(1)$ となる。

結局, $S_p(1)_x = S_p(1)$ となる。

§2. C_n 型の非コンパクトリイ群の作用について。

まず, 若干の記号と定義を述べよう。

$$Sp(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{C}) : {}^t A J_n = -J_n A\},$$

$$Sp(n) \cong Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n), \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

この節では, この右辺を改めて $Sp(n)$ と置く。

$L(n)$: standard $Sp(n, \mathbb{C})$ -action on $\mathbb{C}^{2n}$ における

$e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$ における isotropy 群.

$N(n)$: standard $Sp(n, \mathbb{C})$ -action on $P_{2n-1}(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^{2n})$

における $[e_1]$ における isotropy 群.

具体的 κ は,

$$L(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \\ 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \end{pmatrix} \right\}, \quad N(n) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \\ 0 & 0 \cdots 0 & * & 0 \cdots 0 \\ 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \end{pmatrix} \right\}.$$

Lemma. G : connected closed proper subgr. of $Sp(n, \mathbb{C})$.

(i) $Sp(n-1) \subset G$, (ii) $Sp(n, \mathbb{C})/G$ 上の restricted $Sp(n)$ -action の各点の isotropy 群が $Sp(n-1)$ と共役な subgr. を含む, $\Rightarrow \exists h \in Sp(n, \mathbb{C})$ s.t.

$$L(n) \subset h G h^{-1} \subset N(n).$$

証明は省略する。リイ環の計算によって証明するのであるが、文献 [1] を参照してほしい。

Theorem B. $7 \leq n \leq m \leq 2n-2$, $M \simeq_{\mathbb{Q}} P_m(H)$.

$\Rightarrow M$ は non-trivial smooth $Sp(n, \mathbb{C})$ -action をもたぬ。

証明. M は non-trivial smooth $S_p(n, \mathbb{C})$ -action をもつとす。restricted $S_p(n)$ -action も non-trivial であり, Theorem A より, $M \cong \partial(\mathbb{D}^{2n} \times X)/S_p(1)$ と表わされる。 $X^{U(1)} = \{x\}$ とす。 $e_1 \times x$ の表わす M の点の isotropy 群は $S_p(n-1) \times S_p(1)_x$ となり, $S_p(1)_x = NU(1)$ or $S_p(1)$ である。他方,

$$gN(n)g^{-1} \cap S_p(n) \sim U(1) \times S_p(n-1) \quad (\text{in } S_p(n))$$

が任意の $g \in S_p(n, \mathbb{C})$ に対して成り立つので, 先の Lemma と合せて矛盾を生ずる。