

宇宙論における概念的諸問題

東大理 小玉英雄

構成

§ 1. 序論: Short course on cosmology

§ 2. インフレーション宇宙モデルに伴う概念的諸問題

1. インフレーション宇宙モデルの概要

2. 諸問題

P 1. 急激に膨張する宇宙における温度の効果

P 2. 自発的対称性の破れは起きるか

P 3. 相転移初期におけるゆらぎの構造

P 4. 量子論的オーダーパラメーターと相転移のダイナミクス

P 5. 膨張宇宙における有効ポテンシャル

P 6. 大域的ゆらぎの生成と量子ゆらぎの古典化

P 7. エントロピー生成と不可逆性

§ 3. 量子宇宙論に伴う概念的諸問題

P 1. 全宇宙に量子力学は適用できるか

P 2. 量子状態をただ一つ選び出す原理

P 3. 量子力学における時空概念

P 4. 不可逆性の起源

§ 1. 序論

宇宙論の目標は現在の宇宙の様々な特性を宇宙の誕生から現在までの進化によって説明することである。とはいっても、宇宙の全ての現象や特性が直接宇宙論の対象となるわけではない。約100億年という宇宙年齢の時間スケールで起きる現象と直接結び付く特性、いわゆる宇宙論的特性のみが対象となる。これまでの観測によって明らかになっている我々の宇宙の宇宙論的特性は、その構造と物質構成という二つの側面からみると表1のように整理される。

古典標準宇宙モデル、インフレーション宇宙モデルという最近の宇宙論の発展は、これらの諸特性を宇宙の初期におけるより単純な数少ない特性に還元することを可能にし、その意味で宇宙論の目標は着実に達成されつつある。しかし、この還元過程は同時に宇宙という本来巨視的な系を直接微視的な世界と結び付ける結果となり、新たに様々な概念的な諸問題を生み出しつつある。以下では、これらの諸問題を簡単に紹介する。

先ず初めに、宇宙進化についてのイメージを持って頂くために、古典標準宇宙モデルについて簡単に説明しておく（現在では、後ほど説明するインフレーション宇宙モデルが標準宇宙モデルとなりつつあるので、従来の標準宇宙モデルには‘古典’という接頭語をつけることにする）。古典標準宇宙モデルは第ゼロ近似で宇宙が次の三つの性質を持つことを仮定する：

N 1. 一様等方性

N 2. 一様な宇宙膨張（ハッブルの法則）

N 3. 物質は一様に分布する気体であり、 Λ 項は無視できる

最初の二つの特徴に基づいて、時空構造が空間的に一様等方な時空（Robertson-Walker 時空）

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\sigma_3^2 \quad (1.1)$$

によって記述されるとする。ここで、 $a(t)$ は宇宙のscale factor、 $d\sigma_3^2$ は3次元定曲率空間の計量で、曲率 K の符号に応じて

$$d\sigma_3^2 = d\chi^2 + f(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & : K > 0 \\ \chi & : K = 0 \\ \sinh \chi & : K < 0 \end{cases}$$

と表される。 a の時間変化は物質のエネルギー密度を ρ 、宇宙定数を Λ とするとき、次の Einstein 方程式で与えられる。

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.3)$$

宇宙の構造	時空構造	一様等方性 宇宙膨張： $H = 30 \sim 120 \text{ km/s/Mpc}$ 年齢 $\geq 16 \text{ Gys}$ 曲率： $\Omega \geq 0.2$ 宇宙項： $\Lambda \lesssim H^2$
	物質分布	Cell-Void構造： $\sim 100 \text{ Mpc}$ 銀河団： 質量 $\sim 10^{14} M_{\odot}$ 分布 $\xi_{cc} = (r / r_c)^{-1.8}$ $r_c \sim 23 h^{-1} \text{ Mpc}$ 運動 $v_o \sim 400 \text{ km/s}$ 銀河： 質量 $\sim 10^{12} M_{\odot}$ $M/L \sim 10 (M/L)_{\odot}$ 分布 $\xi_{aa} = (r / r_a)^{-1.8}$ $r_a \sim 6 h^{-1} \text{ Mpc}$ 構造 回転、Morphology 球状星団、dwarf galaxies、 Massive Blackhole 銀河間ガス： 電離率、Lyman α 雲 宇宙磁場
物質の構成	Bright Matter	バリオン： $n_B / s \sim 10^{-10}$ 軽元素： $\text{He}/(\text{He}+\text{H}) \sim 0.25$ $\text{D}/\text{H} \sim 10^{-5}$ 光子： $T \sim 2.7 \text{ K}$
	Dark Matter	$\rho_{DM} > \rho_B$

表 1. 現在の宇宙の諸特性

ρ は一般に相対論的な成分 ρ_R (通常、輻射と呼ぶ) と非相対論的な成分 ρ_{NR} (輻射との対比で物質と呼ぶことがある) の和となる。(1.3)式の右辺において、曲率項 $\propto a^{-2}$ 、 $\rho_{NR} \propto a^{-3}$ 、 $\rho_R \propto a^{-4}$ のように変化するので、一般に宇宙は、輻射優勢 → 物質優勢 → 曲率優勢の順で変化する。第三の仮定より Λ 項を無視すると、各ステージでの scale factor の時間変化は次のようになる：

$$a \sim \begin{cases} t^{1/2} & \text{: 輻射優勢} \\ t^{2/3} & \text{: 物質優勢} \\ t & \text{: 曲率優勢 (K < 0)} \end{cases} \quad (1.4)$$

Scale factor がこの様に時間のべきで変化する宇宙はフリードマン宇宙と呼ばれる。フリードマン宇宙の大きな特徴は、宇宙が有限な年齢を持つことである。現在の宇宙の年齢はほぼ $1/H_0 \sim 100$ 億年で与えられる。

我々の宇宙は上記の三つの一般的特性に加えて、もう一つ大きな特徴を持っている。それは、表1のバリオン-エントロピー比の値が示すように宇宙が大きなエントロピーを持っていることである。このエントロピーは実質的に光子（及びニュートリノ）が担っている。この様な高エントロピーの宇宙では宇宙の温度は宇宙膨張と共に scale factor に逆比例して減少するために、過去に遡るほど宇宙は高温高密度となる。物質は一般に、温度や密度の上昇にともなってより基本的な構成要素に分解される。そして、物質は最終的には超高温超高密度の素粒子ガスへと還元される。したがって、宇宙の物質は、この様な素粒子ガスから出発して、温度密度の低下と共に、核子、原子核、原子と次第により複雑な要素からなる気体へと変化するようになる。これが、物質の構成という視点からみた宇宙の進化である（図1参照）。

この様に、現在の宇宙物質がより単純な構造を持つ物質から宇宙進化の結果として作られたという視点に立つと、現在の物質のいくつかの特性を結び付けることが可能となる。その代表的な例が、現在の宇宙に存在する軽い原子核の存在比と宇宙のエントロピーの関係である。詳しい計算によると、表1に示された He 及び D の存在量を説明するには宇宙のエントロピー、より正確には元素合成時におけるバリオン数とフォトン数の比 η が

$$\eta = (3 - 7) \times 10^{-10}$$

という条件を満たさねばならないことが示される。この値は観測値とよい一致を示している。軽元素の存在量と宇宙のエントロピーを定量的に結び付けることに成功したことは古典標準宇宙モデルの最大の成果である。

我々の宇宙は確かに 100 Mpc を超えるスケールでは一様等方であるが、それより小さなスケールでは銀河や銀河団に代表されるようになりかなり大きいスケールでも非常に不均一である。現在、この様な現在の宇宙の不均一さは宇宙初期に

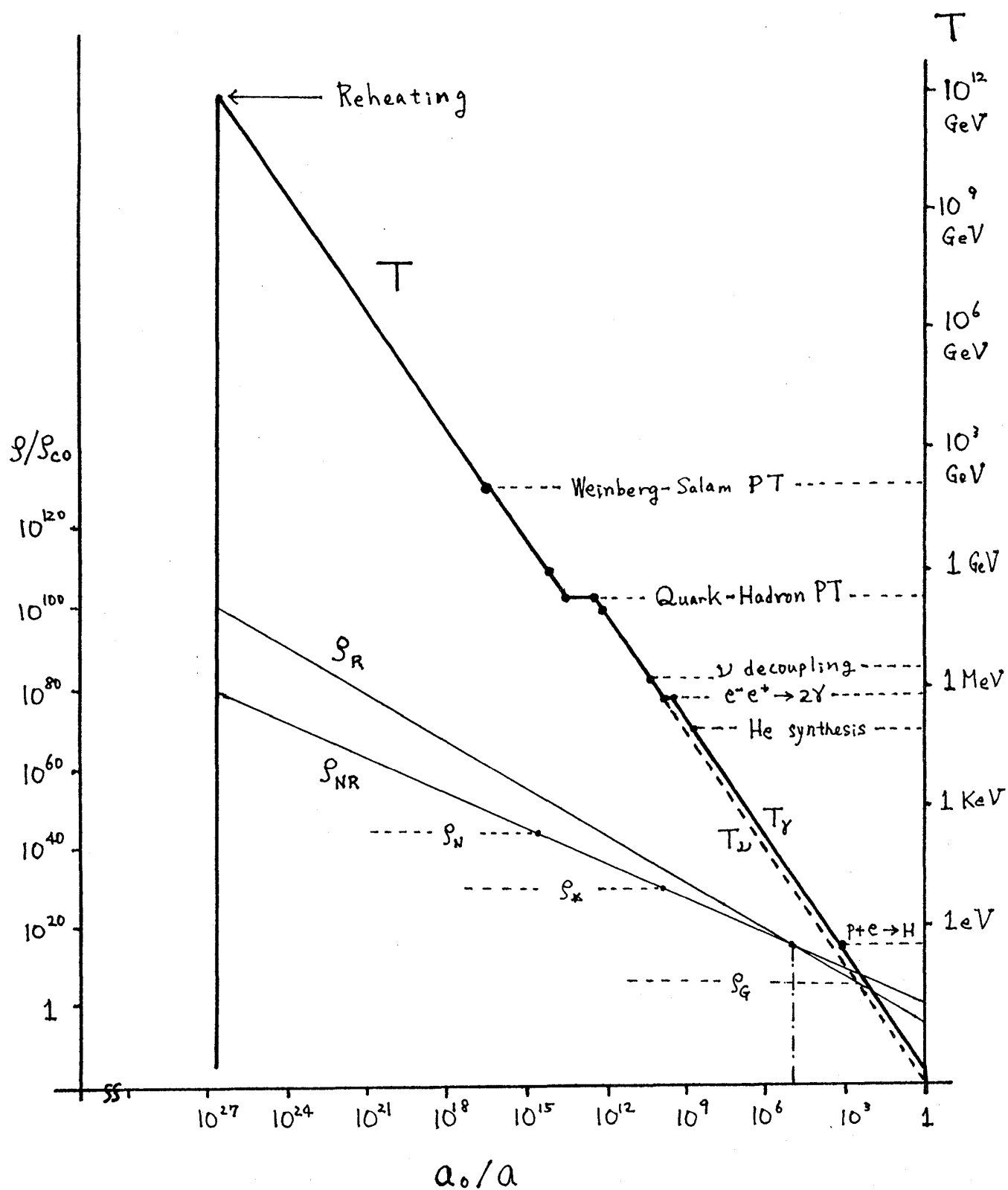


図 1 宇宙の進化

構造

大域的な一様等方性

小さな平均曲率 ($T = 1 \text{ MeV}$ の時 $K/a^2/H^2 \sim 10^{-16}$)宇宙初期における小さなゆらぎ (曲率のゆらぎにして $10^{-4}/\text{scale}^2$ 程度)小さな Λ 項 ($\Lambda/M_{\text{pl}}^2 < 10^{-123}$)

物質の構成

粒子-反粒子非対称性 ($n_B/s \sim 10^{-10}$)

Dark matter 及び exotic relics の種類と量

弱い大域的な磁場

表 2 宇宙の基本特性

における小さな不均一すなわち、ゆらぎが重力不安定とエネルギーの散逸過程によって成長することにより作られると考えられている。残念ながら、ゆらぎが現在の宇宙の示す複雑な構造へと成長する非線型で散逸的な過程についての詳細は未だに不明であるが、そこには原理的な問題は存在しない。

この様に、古典標準宇宙モデルは元素の合成の起きる時代、温度にして 1 MeV 、密度にして 1 g/cc の頃以後の宇宙進化の大筋を明らかにし、それによって、現在の宇宙の諸特性を表 2 にあるような宇宙初期における基本的な特性へと還元することを可能にした。

それでは、これらの基本特性を古典標準宇宙モデルで説明することは可能だろうか。表 3 に示したように、物質の構成については適当な素粒子の統一モデルのもとでは説明可能なものもあるが、構造に関しては素粒子モデルによらず答えはノーである。フリードマン宇宙に基づく限り、宇宙の大域的な構造は時空構造の古典的な記述の可能な時代 (classical era) の初めにおける宇宙の特性、すなわち宇宙の初期条件によって決定されたと考えざるを得ない (表 3 ではこの事を IC と略記した)。それは次のような理由による。一般に有限な過去に始まりを持つ宇宙では、各 comoving observer が宇宙が生まれてからある時刻までに因果的な関係を持ち得る範囲は有限になる。この範囲はホライズン (正確には particle horizon) と呼ばれ、その半径は

$$R_H = a \int_0^t dt/a \quad (1.5)$$

で与えられる。フリードマン宇宙ではこのサイズはほぼ H^{-1} に等しく、宇宙の固有時間 t に比例する。これに対して、第ゼロ近似で均一な宇宙の物質に対して固定さ

	古典標準モデル		インフレーション 宇宙モデル
	標準 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	Beyond	
一様等方性	I C	I C	O K
平坦性	I C	I C	O K (Primordial INFLUM)
密度ゆらぎ	I C	I C	O K (? see text)
Λ	?	?	?
物質の非対称性	I C	O K	O K (particle model wanted)
Dark Matter	black holes planetary ob	+ massive ν axions, inos	the same
Exotic relics		monopoles strings, etc	+ coherent field
磁場の起源	I C	I C	?

表 3. 宇宙の基本特性の説明

れた部分 (comoving part) の固有長は scale factor a に比例して増大する。(1.4)式の示すように、これはホライズンサイズの増大よりゆっくりしている。したがって、全ての comoving part は宇宙初期では必ずホライズンより大きなサイズを持つことになる (図 2 参照)。現在の銀河や銀河団などの大域的な構造に対応する comoving part がホライズンの内側にはいる時刻は宇宙の元素合成より後になるが、必要なゆらぎをこの様な宇宙進化の後期で造ることは困難であることが示される。一方、ホライズンより大きなスケールのゆらぎを宇宙進化の途中で生み出すことは、因果的に不可能である (ただし、isocurvature perturbation というタイプのゆらぎを生成することは可能であるが、必要とされるゆらぎの振幅の大きさなどから、cosmic string に基づくものを除いてこのタイプのゆらぎによって宇宙の構造を説明することは困難である。)。全く同様の理由により、宇宙の大域的な一様等方性を宇宙進化の結果として説明することもできない。実際、2.7K

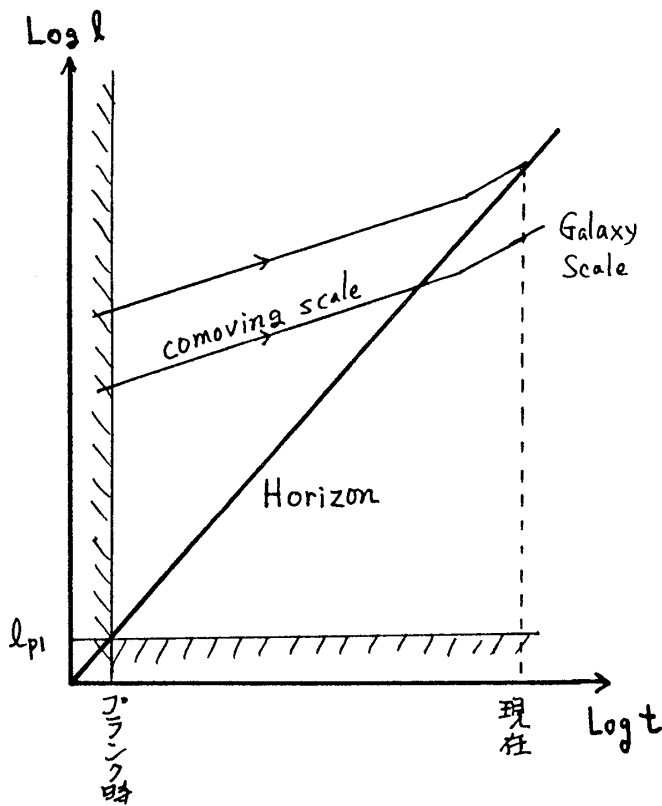


図 2 フリードマン宇宙

宇宙黒体輻射の温度の非等方性の観測より、宇宙の温度が約4000Kの時点で現在のホライズンサイズに相当する領域が 10^{-4} の精度で一様等方であることが知られている。ところが、フリードマン宇宙では、この領域はその時点でのホライズンサイズの50倍程度となる。

この様に、古典標準宇宙モデルは宇宙論の基本特性の説明に対しては殆ど無力であった。この古典標準宇宙モデルの弱点を解消したのが、素粒子の大統一理論を契機として1980年頃登場したインフレーション宇宙モデルである。インフレーション宇宙モデルの詳細の説明は以下の節でおこなうことにして、

ここではその基本的な考え方を簡単に紹介しておく。アイディアは簡単である。古典標準宇宙モデルの基礎となっている基本仮定のうち、N1, N2はそのままにして物質に関する仮定N3を変更する。すなわち、通常物質のほか、エネルギー密度が殆ど変化しない物質が宇宙の初期に一時的に存在すると仮定する：

$$N3' : \rho = \rho_m + \rho_\phi$$

ここで、 ρ_m は通常物質のエネルギー密度、 ρ_ϕ は新たな特異物質の密度である。 ρ_m は宇宙膨張と共に少なくとも a^{-3} の様に減少するので、 ρ_ϕ が一定の時期が十分長く続くと ρ は一定となり、Einstein方程式(1.3)より、宇宙は

$$a = a_0 e^{Ht} : H = 8\pi G \rho_\phi / 3 = \text{const} \quad (1.6)$$

の様に、指数関数的に急激な膨張を始めることになる。この膨張は同時に、particle horizon サイズの指数関数的な膨張を生み出す。これを宇宙のインフレーションと呼ぶ。もちろん、古典標準モデルがよい記述を与える宇宙の元素合成の時期までにはインフレーションは終了し、宇宙はフリードマン宇宙に移行しなければならない。インフレーション時には通常物質のエネルギー密度及び温度は実質的にゼロとなるので、この移行は特異物質が通常物質へ転化し宇宙の温度が

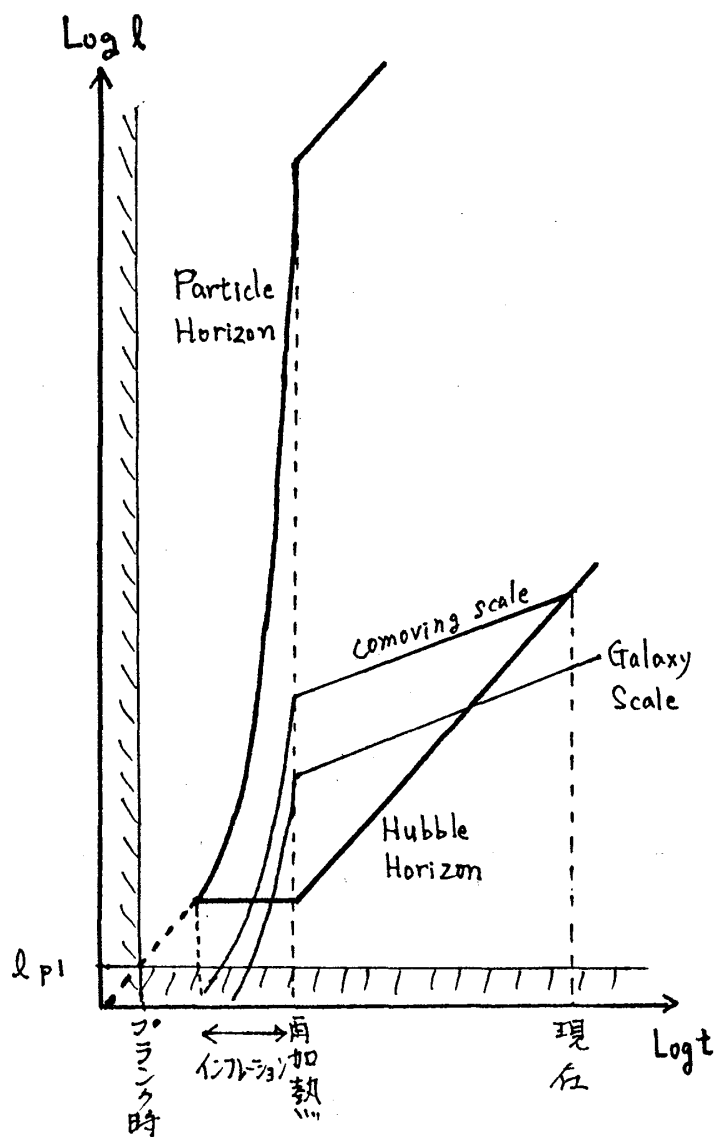


図 3 インフレーション宇宙

少なくとも 1 MeV 以上まで上昇することを意味する。それで、この移行過程は宇宙の再加熱と呼ばれる。

インフレーション宇宙モデルではホライズンサイズの振舞いが古典標準宇宙モデルと大きく異なる。まず、インフレーション時におけるホライズンサイズの指数関数的な膨張の結果、我々が現在観測する領域（實際上、この領域は現在のハッブルホライズンサイズ H_0^{-1} 以下である）が particle horizon に入る時刻はインフレーション以前にまで引きもどされる。さらにインフレーションが十分長い間持続すれば、これらの領域のサイズは particle horizon を超える以前にプランク長以下になってしまうので、実質的にホライズンを超える時代は存在しない（図3参照）。従って、我々は現在プランク長以下の領域を宇宙膨張によって引き延ばしたものを観

測していることになり、現在の宇宙の大域的な構造は完全にマイクロフィジクスのみで決定されることになる。

この様に、インフレーション宇宙モデルは殆どマイクロフィジクスのみから出発して現在の宇宙の構造及び物質の構成を説明することになる。

§ 2. インフレーション宇宙モデルに付随した諸問題

ここでは、先ず前節で紹介したインフレーション宇宙モデルの内容、特に表2に挙げた基本特性に対する現在標準的な説明を紹介する。その後で、標準的な説明に内在する概念的な問題点を順次指摘する。

2-1. インフレーション宇宙モデルの概要

前節で述べたように、インフレーションが起きるためにはエネルギー密度の変化しない物質が必要になる。現在まで生き残っているモデルの大部分ではスカラ場がその様な物質の役割を果たす。実際、インフレーション宇宙モデルの研究はスカラ場の物理学であると言っても良いほどである。

スカラ場 ϕ のポテンシャルを $V(\phi)$ とする。現在の宇宙では ϕ はポテンシャルの最小点にあるとするのが自然である。表2にあげた Λ 項に対する制限より V の最小値はゼロとする必要がある。いま ϕ が最小点から大きくずれたとしよう。 ϕ が古典的に振舞うとすると、 ϕ の運動は次の式に従う。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.1)$$

例えば、簡単のために $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$ 、 $H = \text{一定}$ という場合を考えると、(2.1) 式の解は

$$\exp[\lambda_{\pm} t] : \lambda_{\pm} = -3H/2 \pm \sqrt{9H^2/4 - m^2} \quad (2.2)$$

の線型結合となる。特に $H^2 \gg |m^2|$ の場合には、 ϕ は

$$\phi \sim \exp[3m^2 t/H] \quad (2.3)$$

の様に振舞い、宇宙の膨張の時間スケール $1/H$ に比べて非常に長い間

$$Ht \sim (H/m)^2 \quad (2.4)$$

ϕ はほぼ一定に留まることになる。この間、 $\rho_{\phi} \sim V(\phi)$ はほぼ一定となり、前節で述べたように宇宙のインフレーションを引き起こす。

ここで問題となるのは、それでは何故宇宙初期に ϕ が最小点から大きくずれるのかということである。現在、このずれを生み出すメカニズムとして二つの考え方があり、一つは、対称性の自発的破れと、有限温度での対称性の回復という現象に根ざすものである。今、温度ゼロにおける ϕ のポテンシャルが $\phi = \pm \sigma \neq 0$ で最小になっているとする。有限温度では ϕ の有効ポテンシャルは次のような温度補正を受ける：

$$V(\phi, T) = V(\phi) + \lambda T^2 \phi^2 \quad (2.5)$$

ここで、 λ は ϕ の自己相互作用及び他の場との相互作用で決まる有効結合定数である。 λ が正ならば、十分高温では $\phi = 0$ がポテンシャルの最小点となる。従って、超高温の宇宙初期では ϕ は温度ゼロの現在における最小点から大きくずれた値を持つことになる（図4 a 参照）。即ち、熱力学的に励起されるわけである。

この様に熱的に励起された場合、宇宙の温度低下に伴う ϕ の振舞いは温度ゼロにおけるポテンシャルの構造に応じて二通りに分かれる。先ず、 $V(\phi)$ が $\phi = 0$ と $\phi = \sigma$ の間に大きな山を持つ場合はいわゆる過冷却現象が起こり、温度がゼロまで下がっても ϕ はしばらく $\phi = 0$ の近傍に留まり、 $\phi = \sigma$ への移行は量子論的な

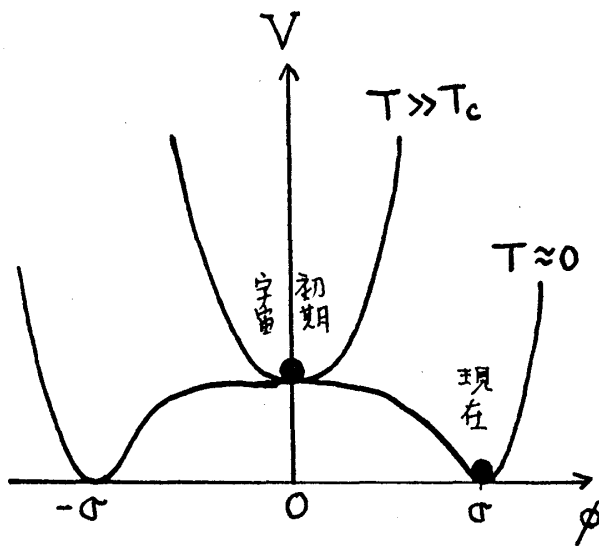


図4a 熱力学的励起

トンネル効果によって起こることになる。 ϕ がこのタイプの振舞いをする場合はインフレーション宇宙が現在のフリードマン宇宙へ旨く移行できないことが示されている。これに対して、 $\phi = 0$ が $V(\phi)$ の極大点の場合は ϕ が $\phi = 0$ からずれることを邪魔するのは温度補正によって生み出された小さなポテンシャルの山のみである。この山の広がり $\lambda T^2 \phi^2 \sim \lambda \phi^4$ より $\phi \sim T$ 程度となる。 T としては ϕ がthermal noise ないし quantum fluctuationsによってこの小さな山を越えるときの温度を使えばよい。ただ、ここで注意しなけ

ればならないことが一つある。それは宇宙膨張が疑似的なthermal noiseを生み出すことである。実際、一定の膨張率 H で膨張するド・ジッター宇宙では量子場がド・ジッター不変な真空状態にあるとすると、量子場の時間相関はミンコウスキー時空における温度 $T_H = H/2\pi$ の熱浴中のものと同じ振舞いを示す：

$$\langle \hat{\phi}(x, t_1) \hat{\phi}(x, t_2) \rangle_{DS} = \langle \hat{\phi}(x, t_1) \hat{\phi}(x, t_2) \rangle_{TH} \quad (2.6)$$

従って、宇宙の温度低下が急激であることを考慮するとポテンシャル障壁の大きさはHawking temperature T_H で与えられると考えられる。この場合、障壁を超えたときの ϕ の値は T_H 程度となる。以後、 ϕ は古典的にポテンシャルを転げ落ちると考える。

スカラー場を励起するもう一つのメカニズムは、純粋に量子論的なものである。宇宙が生まれてからプランク時程度までは時空自体を量子論的に扱うことが必要となる。従って、時空を古典的に記述する宇宙論の適用範囲はプランク時以降ということになるが、その出発点に当たるプランク時では不確定性関係よりスカラー場のエネルギーは M_{Pl}^4 程度の値を持つと考えられる。従って、 ϕ は量子論的に励起されることになる。一方、

$$V/\phi^2 \ll H^2 \iff |\phi| \gg M_{Pl} \quad (2.7)$$

のとき、 ϕ の変化の時間スケールは宇宙膨張の時間スケールより小さくなりその振舞いは古典的となる。従って、

$$V/\phi^4 \sim M_{Pl}^4/\phi^4 \ll 1 \quad (2.8)$$

即ち、ポテンシャルが十分平坦ならば、プランク時に大きく励起された ϕ はゆっくりとポテンシャルを転がり、そのエネルギー $V(\phi)$ はインフレーションを引

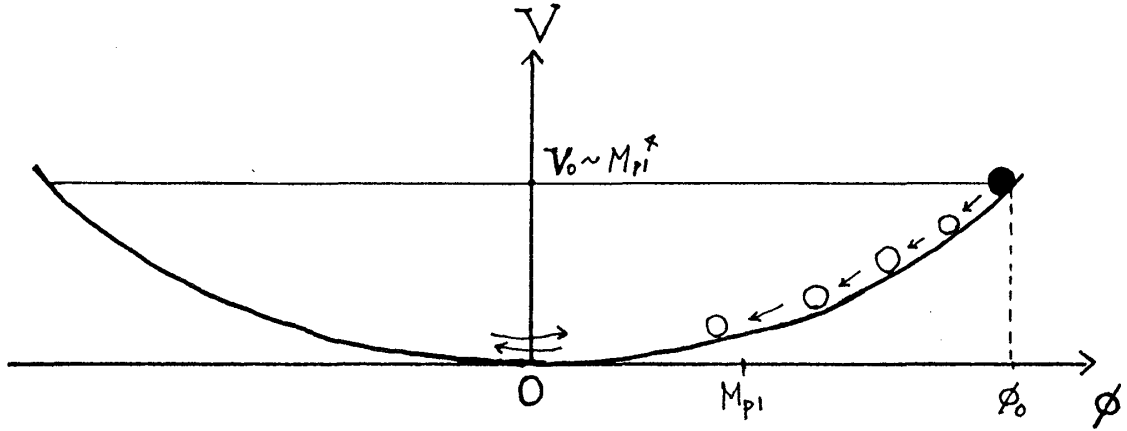


図 4 b 量子励起

き起こすことになる（図4 b 参照）。

以上のメカニズムにより励起されたスカラー場のエネルギーの引き起こすインフレーションの程度は次のように評価される。まず、(2.1)において二階微分の項を無視すると

$$\ddot{\phi} \simeq -V'/3H \quad (2.9)$$

これを使って二階微分の項を評価すると、それが無視できる条件は

$$|\ddot{\phi}/3H\dot{\phi}| \simeq |V''|/9H^2 \ll 1 \quad (2.10)$$

となる。熱励起の場合、 ϕ が古典的に振舞うようになる時の ϕ の値を ϕ_0 、(2.10)式が満たされる最大の ϕ を ϕ_1 とすると、インフレーション前後での宇宙のscale factor の比 R_{inf} は

$$\ln R_{inf} = \int H dt = - \int_{\phi_0}^{\phi_1} 3H^2/V' d\phi \quad (2.11)$$

となる。 $\phi=0$ の近傍で V を $V=\text{const} - \lambda\phi^4/4$ と表すと、この式は

$$\ln R_{inf} = \pi\sigma^4/\phi_0^2 M_{Pl}^2 \quad (2.12a)$$

と評価される。同様に量子励起の場合、 $V=\lambda\phi^4/4$ とすると

$$\ln R_{inf} = \pi V_0^{1/2}/\lambda^{1/2} M_{Pl}^2 \quad (2.12b)$$

となる。ここで、 $V_0 \sim M_{Pl}^4$ 。宇宙の一様等方性を説明するには少なくとも

$$\ln R_{inf} > 60 \quad (2.13)$$

が必要となる。したがって、 ϕ の励起のメカニズムによらず ϕ の相互作用がかなり弱いことが要求される：

$$\lambda < 0.025 - 0.05 \quad (2.14)$$

特に、通常の大統一理論 (GUT) で現れるヒグス場に対しては $\lambda = 0(1)$ となり、この様なヒグス場では十分なインフレーションが起こらない。したがって、超重力理論で現れるようなゲージ相互作用と decouple したスカラ場を考えることが必要となる。この場合、インフレーションは宇宙の誕生直後すなわちプランク時の頃に起きることになる (primordial inflation)。

前節で述べたように、インフレーションモデルでは、少なくとも現在の宇宙の観測可能な領域はプランク長程度の領域が引き延ばされることによって作られる。したがって、単純に考えると現在の宇宙は完全に一様等方になってしまいそうに思われる。これでは実際の宇宙とは似ても似つかぬものが出来上がってしまう。実は、幸いなことに、この単純な考えは正しくない。それは、膨張宇宙で量子場が不安定になるためである。

これを見るために、質量 m の自由な量子スカラ場 ϕ を考える。 ϕ は次のような場の方程式に従う。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\Delta\phi + m^2\phi = 0 \quad (2.15)$$

$H = \text{一定}$ とすると、この方程式の解は $f_k e^{ikx}$;

$$f_k = -(\pi/4H)^{1/2}(-a)^{-3/2} [\alpha_k H_\nu^{(1)}(k/aH) + \beta_k H_\nu^{(2)}(k/aH)] \quad (2.16)$$

となる。ここで

$$\nu = [9/4 - m^2/H^2]^{1/2} \quad (2.17)$$

この解を用いると量子場 ϕ は生成消滅演算子 $\hat{a}_k$ 、 $\hat{a}_k^\dagger$ を用いて

$$\hat{\phi} = \sum \Omega^{-1/2} [f_k(t) e^{ikx} \hat{a}_k + \text{h. c.}] \quad (2.18)$$

と表される。ここで Ω は十分大きな comoving volume である。生成消滅演算子に対する通常の交換関係より次のような f_k に対する規格化条件が得られる。

$$a^3 f_k \overleftrightarrow{\partial}_t f_k^* = i \quad (2.19)$$

この条件は α_k 、 β_k に対する次のような条件となる。

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (2.20)$$

短波長 $k \rightarrow \infty$ の極限で f_k は

$$af_k \simeq (2k)^{-1/2} [\alpha_k \exp\{-i(k\eta - (2\nu+1)\pi/4)\} + \beta_k \exp\{i(k\eta - (2\nu+1)\pi/4)\}] \quad (2.21)$$

の様に振舞う。ここで

$$\eta = \int dt/a = -1/Ha \quad (2.22)$$

従って、短波長の極限で波動関数がミンコウスキー時空の場合の正振動数モードに一致することを要求すると

$$\alpha_k = 1, \beta_k = 0 \quad (2.23)$$

と取るのが自然である（これは実は、ド・ジッター不変な真空に対応する）。この様にして選ばれた真空に対して量子場の空間相関関数は

$$\begin{aligned}\langle \hat{\phi}(0, t) \hat{\phi}(x, t) \rangle &= \Omega^{-1} \sum |f_k|^2 \exp(ikx) \\ &= (H/4\pi^2 r) \int dz (1+1/z^2) \sin(Hrz) \\ &= (1/4\pi^2) [r^{-2} + H^2 \ln(Hr_{IR}) - H^2 \ln(Hr)] \quad (2.24)\end{aligned}$$

ここで $r=ak$, $z=k/aH$, r_{IR} は infrared cutoff である。(2.24) 式の第一項はミンコフスキーの場合にも現れる零点振動の項である。それに対して $H \rightarrow 0$ の極限でゼロとなる第二項、第三項は宇宙膨張によって零点振動が不安定になることによって生じる項である。特に、第三項はハッブルホライズンスケールで量子場に

$$\delta \phi \simeq H/2\pi \quad (2.25)$$

程度の大きさの空間的なゆらぎが生み出されることを示している。通常、この新たに生み出された量子ゆらぎは comoving scale がハッブルホライズンを超えると古典的なスカラー場のゆらぎへと変化し、更にそれは宇宙の再加熱を通して大域的な密度揺らぎへと転化すると考える（量子ゆらぎの古典化）。この様にして生成されたゆらぎの振幅は曲率の揺らぎ δR に換算して

$$\begin{aligned}r^2 \delta R &\simeq H \delta \phi / \dot{\phi}_{r=H} \sim \pi^{-1} (2\lambda/3)^{1/2} \ln^{3/2}(Hr_{RH}) \\ &\sim 100 \lambda^{1/2} \quad (\text{for cluster scales}) \quad (2.26)\end{aligned}$$

これが表 2 の観測値を説明するとすると

$$\lambda \lesssim 10^{-12} \quad (2.27)$$

という非常に強い制限が得られる。

スカラー場は最後にポテンシャルの極小点の近傍に達すると振動を始め、そのエネルギーは通常物質へと転化する。この再加熱過程は通常、コヒーレントなスカラー粒子の相対論的粒子への崩壊と見なす。この崩壊率を Γ とするとスカラー場のエネルギーの時間変化は

$$\dot{\rho}_\phi \sim -(\Gamma + 3H) \rho_\phi \quad (2.28)$$

で表される。したがって、宇宙が再び輻射優勢になる時点は条件

$$\Gamma \sim H \quad (2.29)$$

で与えられる。これより、 m をスカラー場の最小点 $\phi = \sigma$ での質量、 $\Gamma \sim \lambda m$ とすると、再加熱時の温度 T_{RH} は

$$\begin{aligned}T_{RH} &\sim \lambda^{3/4} (\sigma M_{Pl})^{1/2} \\ &\sim 10^{10} (\lambda / 10^{-12})^{3/4} (\sigma / M_{Pl})^{1/2} \text{ GeV} \\ &\quad (2.30)\end{aligned}$$

となる。従って、(2.23) の制限を考慮すると再加熱温度は通常の GUT のエネル

ギースケールよりずっと低くなり、陽子の寿命に対する実験的制限と矛盾せずに物質・反物質の非対称性を説明する素粒子モデルを作ることは非常に困難となる。

2. 1 諸問題

Problem 1. 急速に膨張する宇宙における温度の効果

2.2で説明したように、多くのインフレーションモデルでは有効ポテンシャル、特にその温度補正が大きな役割を果たす。勿論、完全な熱平衡状態におけるオーダーパラメーターの期待値を求める方法として有限温度における有効ポテンシャルを用いることには問題はない。しかし、急激に膨張する宇宙においてこの方法が無批判に用いることには大きな問題がある。

実際、宇宙のごく初期においては物質が熱平衡から大きくずれている可能性が大きい。例えば、ゲージ相互作用をする粒子とゲージ粒子との散乱の断面積は温度が粒子の質量に比べて大きい時

$$\sigma \sim \alpha^2 T^{-2} \quad (2.31)$$

となる。ここで α はゲージ場の結合定数 g を用いて $\alpha = g^2/4\pi$ と表される。従って、粒子の反応率は

$$\Gamma \sim \sigma T^3 \sim \alpha^2 T \quad (2.32)$$

となる。一方、宇宙の膨張率は

$$H \sim T^2/M_{Pl} \quad (2.33)$$

従って、両者の比

$$\Gamma/H \sim \alpha^2 M_{Pl}/T \quad (2.34)$$

は、

$$T > \alpha^2 M_{Pl} \sim 10^{-4} M_{Pl} \quad (2.35)$$

の時1より小さくなり、宇宙が生まれてからそれまでには散乱は起こらないことになる。

もちろん、例えば重力相互作用($\Gamma/H \sim (T/M_{Pl})^3$)によってプランク時にいったん熱平衡になっていれば、たとえ相互作用が全くなかったとしても一粒子分布関数は良く知られているように平衡分布を保ち、分布関数のパラメーターとしての温度は明確に定義され、宇宙膨張と共にscale factor a に逆比例して減少する。しかし、この疑似平衡状態は通常の統計力学でいうところの平衡状態とは大きく異なる。本来、平衡状態の持つ非常に大切な特徴は、系が巨視的な時間スケールに比べて短い時間で同じ巨視的な変数の値に対応する様々な微視的状态を巡り動くことにある。これは、エントロピー概念及び、その増大則にとって決定的な意味を持つ。例えば、温度ゼロで自発的な対称性の破れを起こしている系が高温で対称性を回復する現象は、温度上昇によって熱エネルギーがポテンシャルエネルギー

ギーに比べて大きくなるにつれ、有効質量が小さいために同じ平均エネルギーのもとではエントロピーの大きい（即ち、微視的状態数の多い）側へ巨視変数としてのスカラー場の期待値が移行することによって引き起こされる。

(2.35)で与えられるような高温の時代には、十分な相互作用が起こらないために、系の微視的状態間の巡回は起こらない。従って、平衡状態を想定して求めた自由エネルギーや有効ポテンシャルに対する温度補正は意味を失う。特に、臨界温度が(2.35)で与えられる範囲にあるGUTや超重力理論に基づく統一理論では対称性の回復は起こらないと考えられる。

Problem 2. 自発的対称性の破れは起きるか

通常、自発的対称性の破れの議論は tree level のポテンシャルに基づいてなされることが多い。実際、tree levelでは繰り込み可能性を考慮してもかなり自由にポテンシャルを選ぶことができる。しかし、基底状態におけるスカラー場の期待値を正しく求めるためには、量子補正を考慮した有効ポテンシャルを用いなければならない。ところが、スカラー場に対する厳密な意味での有効ポテンシャルは常に下に凸であることが容易に示される。従って、スカラー場がnontrivialな真空期待値を持つことに基づく自発的な対称性の破れは形式的には起こらないことになる。

例えば、一成分のスカラー場に対して

$$\begin{aligned} Z(J) &= \text{Tr} \exp[-\beta(\hat{H} + J\hat{\phi})] \\ &= \int [d\phi] \exp[-S_E^\beta[\phi] - J \int \phi d\tau d^3x] \end{aligned} \quad (2.36a)$$

$$J(\phi): \quad \phi = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial J} \ln Z \quad (2.36b)$$

$$V_{\text{eff}}(\phi) = -\beta^{-1} \ln Z - J\phi \quad (2.36c)$$

と有効ポテンシャル V_{eff} を定義すると、経路積分表示(2.36a)より

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\phi^2} \propto [\langle 1, 1 \rangle \langle \phi, \phi \rangle - \langle \phi, 1 \rangle^2]^{-1} \geq 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \langle f(\phi), g(\phi) \rangle &\equiv \int d\phi f g \left[\int \prod_{k \neq 0} d\phi_k \exp\{-S_E^\beta[\phi] - J \int \phi d\tau d^3x\} \right] \\ &\quad (2.37a) \end{aligned}$$

となる。

この一見パラドクシカルな事態の起きる原因は、一次元の量子系の場合を詳しくみると明らかになる。例えば、 $x=0$ に大きなポテンシャル障壁をもつdouble well形のポテンシャル中を運動する粒子の有効ポテンシャルを求めると確かに下に凸になり、 $x=0$ で最小となる。ところが、 $x=0$ を期待値として持つ波動関数は

元のポテンシャルの極小点にピークを持つdouble peak形になり、 $x=0$ では殆どゼロとなっている。従って、 $x=0$ という状態は、実は対称性の破れた二つの状態の重ね合わせになっていることが分かる。 $x=0$ でのポテンシャル障壁の高さが高くなるにつれ波動関数のピークは高くなり $x=0$ での値はどんどん小さくなる。したがって、障壁の高さが十分高ければ、一旦 $x<0$ ないし $x>0$ に局在化された波動関数は実質的に半永久的に同じ側に局在化したまま留まることになる。すなわち、巨視的に安定な訳である。したがって、現実の物質において自発的な対称性の破れが起きるという事実は、巨視的に安定な量子状態の間の重ね合わせが何等かの理由で禁止されていることを示唆する。

巨視的に異なった状態の重ね合わせの禁止は、巨視的な状態を特徴づける変数がそれ自体で独立の力学的意味を持ち、現実的に実現される量子状態が巨視的な変数の値に応じて制限を受けることを意味する。これは一見非常に大変なことのよう聞こえるかも知れないが、多くの量子効果の計算では暗黙のうちに量子状態を制限していることが多い。例えば、有効ポテンシャル（一般にはeffective action）は通常摂動論を用いて計算される。これは量子状態を場の変数 ϕ の適当な期待値に相対的なFock statesに制限することにほかならない：

Perturbative states = Fock states w.r.t a classical path

$$\langle \hat{\phi} \rangle = \phi(x, t)$$

この際、古典的な変数 ϕ のダイナミクスは本来全ての量子状態を考慮して得られるeffective actionに対して成立する式を転用した方程式

$$\frac{\delta}{\delta \phi} S_{\text{eff}}^{\text{pert}}[\phi] = 0 \quad (2.38)$$

が用いられる。

しかし、この様な方法で得られる有効ポテンシャルは一般に病的な振舞いを示すことが多い。その典型は、もっとも頻繁に用いられるone loop 近似である。

One loop近似は

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \text{Min}_{\langle \hat{\phi} \rangle = \phi} \langle \hat{H} \rangle \quad \text{or} \quad V_{\text{eff}}(\phi, T) = T \text{rexp}\{-\beta \hat{H}[\hat{\phi}, \phi]\} \quad (2.39)$$

において、状態をGaussian state

$$\langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \rangle - \langle \hat{\phi}(x) \rangle \langle \hat{\phi}(y) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp[ik \cdot (x-y)]$$

$$; \quad \omega_k^2 = k^2 + M^2 \quad (2.40a)$$

に制限し、相互作用を平均場で

$$M^2 = V''(\phi), \quad H = H_{\text{free}} \quad (2.40b)$$

で近似することに相当する。ところが、この様にして得られた有効ポテンシャル

は ϕ の狭い範囲を除いて虚数の値を取る。例えば、 $\lambda \phi^4$ 理論を $\phi = \sigma$ で極小になるように繰り込むと

$$V^{(1)} = \frac{1}{8} \frac{m^2}{\sigma^2} (\phi^2 - \sigma^2)^2 + \frac{1}{64\pi^2} M^4 \left(\ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{1}{2} \right) + \text{const}$$

$$M^2 = m^2 [3(\phi/\sigma)^2 - 1] / 2. \quad (2.41)$$

もちろん、この病的な振舞いは近似のせいである可能性はある。しかし、one loop 近似に基づいた対称性の破れの議論が根拠を持たないものであることを示すには十分である。

摂動論的有効ポテンシャル法の妥当性を one loop 近似を超えて調べる一つの有用な方法に gaussian 近似がある。これは (2.39) において状態の制限は gaussian states (2.40a) のままにして相互作用を完全に取り入れる近似法である。この場合、 M^2 についても変分を取ることになる。この近似法の利点は (2.39) の変分的な表式から分かるように、厳密な有効ポテンシャルに対する上からの評価を与えることである。ところが、この方法で $\lambda \phi^4$ 理論に対して求めた有効ポテンシャルは、bare coupling constant $\lambda_B = -0$ の場合を除いて、ultra violet cutoff を有限にとどめない限り下に有界でないことが示される。更に、 $\lambda_B = -0$ の場合もポテンシャルは下に凸となり自発的な対称性の破れを示さない。この結果は、基本場（即ち複合場でない）スカラー場が存在しないか、又は量子状態の摂動論的状态への制限が正しくないことを示唆している。

いずれにしても場の量子論における自発的な対称性の破れの取扱には大きな問題があるといえる。

Problem 3. 相転移初期におけるゆらぎの構造

Problem 2 で述べた量子状態の制限の問題は、温度がゆっくりと変わり系の状態が常に巨視的平衡状態にある場合には余り深刻な問題とならない。しかし、宇宙初期のように温度が急激に変わる場合には現実的な問題として表面化してくる。先ず問題になるのが、インフレーション開始時におけるスカラー場の状態である。スカラー場の熱的励起が実際に起きるとすると、臨界温度 T_c より温度の高い状態におけるスカラー場の状態は混合状態

$$\sum_{|\phi\rangle} \exp[-\beta \Gamma(\phi, \beta)] |\phi\rangle \langle \phi| \quad (2.42)$$

で表される。ここで、 Γ は effective action、 $|\phi\rangle$ は ϕ の古典的配位に対応する量子論的状态である。宇宙の温度が急激に低下すると、この状態は (2.42) において温度を臨界温度程度のある温度 T_c （ないし Hawking temperature）に固定したものに移行すると考えられる。これによって、ポテンシャルにとって基底状態か

ら大きくずれた ϕ の配位が高い確率で実現されることになる。これは正にインフレーションの発生にとって本質的な ϕ の励起が実現されることを意味するが、同時に、量子状態 $|\phi\rangle$ の構造自体が直接問題になることにもなる。実際、以後のスカラー場の状態変化は $|\phi\rangle$ を出発点として量子力学的時間発展により決定されることになる。ところが、後ほど述べるように、 ϕ の量子論的ゆらぎがどの程度の大きさを持つかはインフレーションの持続時間に大きな影響を与える。これと並んで、スカラー場の状態が時間発展により最終的に巨視的に大きく異なった状態に移行する状態の混合状態で表されること自体も概念的な問題を引き起こす。

Problem 4. 量子論的オーダーパラメーターと相転移のダイナミクス

2.1で述べたように、通常インフレーション時におけるスカラー場の時間発展は古典的に扱われる。しかし、スカラー場は本来量子場としての実体を持つ以上、それが古典的に扱うかどうかは量子論の視点から判定しなければならない。

簡単のために、bare potential

$$V_0(\phi) = \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda_0 \phi^4$$

に従うスカラー場を考える。ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = a^3 \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} a^{-2} (\nabla \phi)^2 - V_0(\phi) \right] \quad (2.43)$$

で与えられる。運動量表示

$$\phi = \sum \Omega^{-1/2} \phi_k(t) e^{ikx} \quad (2.44a)$$

$$\pi = \sum \Omega^{-1/2} \pi_k(t) e^{ikx} \quad (2.44b)$$

のもとで、ハミルトニアンは次のようになる：

$$\begin{aligned} H = \sum \left\{ \frac{1}{2a^3} |\pi_k|^2 + \frac{a^3}{2} \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2 \right) |\phi_k|^2 \right\} \\ + a^3 \frac{\lambda_0}{4\Omega} \sum \phi_{k1} \phi_{k2} \phi_{k3} \phi_{k4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (2.45)$$

ϕ の空間的平均値の振舞いを見るために、変数

$$X = \phi_0 / \Omega^{1/2}, \quad \Pi = \Omega^{1/2} \pi_0 \quad (2.46)$$

に着目し、波動関数が

$$\Psi = \psi(X) \prod_{k \neq 0} (\pi \mu_k)^{-1/2} \exp[-|\phi_k|^2 / 2\mu_k^2] \quad (2.47)$$

という形を取ると仮定する。すなわち、 $k \neq 0$ の変数に対してガウス近似を適用する。さらに、 μ_k は X のみの関数 M を用いて

$$\mu_k^2 = 1/2a^3(k^2/a^2 + M^2)^{1/2} \quad (2.48)$$

と表されると仮定する。この仮定のもとでは、全系に対するシュレディンガー方程式

$$i \partial_t \Psi = \hat{H} \Psi \quad (2.49)$$

は、 X に関するシュレディンガー方程式に帰着する：

$$i \partial_t \psi = \hat{H}_X \psi \quad (2.50)$$

ここで

$$H_X = \frac{1}{2a^3\Omega} \Pi^2 + a^3\Omega U(X; \mu_k^2) \quad (2.50a)$$

$$U = V_0(X) + \frac{3\lambda_0}{2} I_2 X^2 + I_{-2} + \frac{m_0^2 - M^2}{2} I_2 + \frac{3}{4} \lambda_0 I_2^2 + \frac{3}{8} \lambda_0 I_4 \quad (2.50b)$$

$$I_2 = \Omega^{-1} \sum \mu_k^2, \quad I_{-2} = (4a^6\Omega)^{-1} \sum \mu_k^{-2}, \quad I_4 = \Omega^{-2} \sum \mu_k^4 \quad (2.50c)$$

ここで、 U が最小になるという条件で M を決定し、繰込みを行うと U はガウス近似での有効ポテンシャルに帰着する：

$$U \rightarrow V_{eff} \quad (2.51)$$

(勿論、この様にして得られた有効ポテンシャルはProblem 2で指摘した問題を持っているが、以下ではこの問題には目をつむることにする。)

例として、有効ポテンシャルが

$$V_{eff} = -\frac{1}{2} m^2 X^2 + \text{const} \quad (2.52)$$

で与えられる場合について波動関数 $\psi(X)$ の振舞いを見てみよう。初期状態

$$\psi(X, t=0) = (\pi \mu_0)^{-1/2} \exp[-(X-X_0)^2/2\mu_0^2] \quad (2.53)$$

に対して、 t 時間後の波動関数は

$$|\psi(X, t)|^2 = (\pi \mu(t))^{-1/2} \exp[-(X-X_c(t))^2/2\mu(t)^2] \quad (2.54)$$

となる。ここで、

$$X_c(t) = X_0 p(t) \quad (2.54a)$$

$$\mu(t) = \mu_0 [p(t)^2 + (q(t)/\Omega \mu_0)^2]^{1/2} \quad (2.54b)$$

$$p(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} [-\lambda_- \exp(\lambda_+ t) + \lambda_+ \exp(\lambda_- t)] \quad (2.54c)$$

$$q(t) = a_0^{-3} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} [\exp(\lambda_+ t) - \exp(\lambda_- t)] \quad (2.54d)$$

$$\lambda_+ = -3H/2 + [9H^2 + m^2]^{1/2} \simeq m^2/3H \quad (2.54e)$$

$$\lambda_- = -3H/2 - [9H^2 + m^2]^{1/2} \simeq -3H \quad (2.54f)$$

これより、 $Ht \gg 1$ における X の期待値 X_0 、及び分散 μ の振舞いは

$$X_0(t) = X_0 \exp[(m^2/3H)t] \quad (2.55a)$$

$$\mu(t) = [(\mu_0)^2 + (3a_0^3 \Omega H \mu_0)^{-2}]^{1/2} \exp[(m^2/3H)t] \quad (2.55b)$$

特に、 X_0 と μ の比は

$$|\mu/X_0| \geq 1/(3a_0^3 \Omega H)^{1/2} X_0 \quad (2.56)$$

となり、 Ω をインフレーション開始時のハッブルホライズンの大きさ $a_0^3 \Omega \sim H^{-3}$ 程度とすると、 $X_0 \sim H$ より(2.56)式の右辺は1程度となる。即ち、スカラ場の空間平均はその期待値と同程度の量子力学的なゆらぎ、ないし分散を持つことになる。したがって、スカラ場を単純に古典的なオーダーパラメーターとしては扱えないことになる。

以上の解析は非常に単純化されたポテンシャルに基づいているが、その結果はポテンシャルが単調な領域におけるスカラ場の振舞いの一般的な特徴を表している。もちろん、現実的な下に有界なポテンシャルに対しては、 X_0 が極小点に達すると波動関数は次第に極小点の近傍に局在化するようになる。しかし、この時点までスカラ場が量子力学的に振舞うことを許すことにすると、Problem 2で述べたことに反して巨視的に異なった状態の重ね合わせを許すことになる。一方、もしスカラ場がポテンシャルの単調な領域を運動する段階で、すなわちインフレーションの途上で古典的なオーダーパラメーターに変わるとすると、さらに奇妙なことが起きる。実際、この様な古典化が起きるコヒーレントスケールとして考えるものは今の場合、ハッブルホライズンスケールしかない。ところが、スカラ場の空間平均はその期待値程度のゆらぎを持っているために、古典化したスカラ場は大きな分散を持つことになる。これは、相転移の終了時刻、したがって、インフレーション率の大きな分散を生み出す。さらに、古典化したスカラ場は依然として最低限ガウスの量子ゆらぎを伴っているはずであるが、このゆらぎは上記の解析から分かるように再び成長する。したがって、一旦古典化した各領域はインフレーションにともない再びスカラ場の期待値が様々な値を持つ領域に分裂することになる。この様にして、宇宙は限りないインフレーションと古典化による細分化を繰り返し、非常に不均質な世界へと移行する。Chaotic inflation mode 1に基づいて、Lindeが類似の議論を展開している[Linde, PL175B(1986)395]。

Problem 5. 膨張宇宙における有効ポテンシャル

次に、上記の解析で無視した、 $k \neq 0$ の成分の振舞いを調べてみよう。一般に、

$$\mu_{k^2} = \langle \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{k^*} \rangle \quad (2.57)$$

と置くと、シュレディンガー方程式及び、正準交換関係より、 μ_k^2 は次の方程式に従う：

$$\begin{aligned} \partial_t(a^3 \partial_t(\mu_k^2)) &= \frac{1}{2a^3} \langle \hat{\pi}_k \hat{\pi}_k^+ \rangle - \frac{a^3}{2} (m_0^2 + \frac{k^2}{a^2}) \mu_k^2 \\ &\quad - a^3 \frac{\lambda_0}{\Omega} \text{Re} \langle \hat{\phi}_k \sum \hat{\phi}_{k_1}^* \hat{\phi}_{k_2}^* \hat{\phi}_{k_1+k_2-k} \rangle \end{aligned} \quad (2.58)$$

第一項及び第三項にガウス近似を使うと

$$\partial_t(a^3 \partial_t(\mu_k^2)) = \frac{1}{8a^3} \frac{1}{\mu_k^2} - \frac{a^3}{2} (M^2 + \frac{k^2}{a^2}) \mu_k^2 \quad (2.59)$$

$$M^2 = m_0^2 + \frac{3\lambda_0}{\Omega} (\langle \hat{\phi}_0^2 \rangle + \sum_{k \neq 0} \mu_k^2) \quad (2.59a)$$

1 $M^2 \ll H^2$ の時、この方程式の解は次のようになる：

$$\mu_k^2 \simeq \begin{cases} 1/2a^2 k & : k > aH \\ H^2/2k^3 & : k < aH \end{cases} \quad (2.60)$$

この解を(2.59a)に代入することにより self-consistent な解が得られる。ただし、ここで問題が生じる。それは k -sum が赤外発散を示すことである。これは、ハッブルホライズンより大きなスケールのゆらぎが宇宙膨張により不安定となる（ないし凍結される）ためである。実は、(2.60)の解は $k \rightarrow \infty$ の極限で μ_k^2 がミンコウスキー時空のゆらぎと一致するという条件で得られたものである。これはインフレーションが無限の過去から続いている場合には正しいが、有限な年齢を持つ現実の宇宙では正しくない。現実の宇宙では、インフレーションが始まる時点でのハッブルホライズンスケールより大きなスケールのゆらぎは宇宙誕生時のゆらぎの構造をそのまま反映することになる。したがって、上記の赤外発散の存在はインフレーションのダイナミクスが宇宙の誕生時の構造の影響を直接受けることを意味している。その具体的な効果は comoving wavenumber に関する Infrared cutoff k_{IR} を導入して(2.59a)を評価してみると明らかになる。

$$M^2 = M_0^2 + 3\lambda_0 (\langle \hat{X}^2 \rangle + (H^2/4\pi^2) \ln(Ha/k_{IR})) \quad (2.61)$$

ここで M_0^2 は $H=0$ における M^2 の値である。この式の最後の項はいわゆる Hawking temperature の効果を表していると考えられる。この事は、(2.60)を考慮すると X に対するハミルトニアン H_X のポテンシャルが

$$U = \frac{1}{2} (M_0^2 + 3\lambda_0 (H^2/4\pi^2) \ln(Ha/k_{IR})) X^2 + \frac{\lambda_0}{4} X^4 \quad (2.62)$$

となることから確かめられる。ただし、その係数はinfrared cutoffの値に依存している。

(2.61)ないし(2.62)を見て気付くもう一つの問題は、スカラー場のダイナミクスを支配するポテンシャルが宇宙膨張の効果を無視して得られる有効ポテンシャルとは異なることである。特に、それはインフレーションの経過による時間に陽に依存した部分を持っている。この問題は、特に輻射補正による有効ポテンシャルの変形によって自発的な対称性の破れを生み出すタイプのモデルでは重要になる。

Problem 6. 大域的なゆらぎの生成と量子ゆらぎの古典化

この問題については佐々木氏が詳しく議論すると思われるので、ここではその要点だけを述べる。2.1で述べたように、インフレーション宇宙モデルでは、スカラー場の量子ゆらぎから、現在の宇宙の大域的構造の種となる時空ないし物質密度のゆらぎが作られると考える。その様なことが可能になる原因は、Problem 5で見たようにハッブルホライズンよりスケールが大きくなった量子ゆらぎがその振幅を一定に保つことにある。

しかし、この考え方には厄介な問題が潜在している。それは、出発点で量子論的なゆらぎがいつかは古典的なゆらぎに変わらなければならないということである。実際、ゆらぎが再びハッブルホライズン内に入り、非線型成長により銀河を形成する時点では、明らかにゆらぎは古典的に振舞っているはずである。銀河は我々が観測するか否かに関わらず存在している。

もちろん、量子ゆらぎの自発的古典化という考え方はそれ自体量子論と相入れない。しかし、だからといって単純に上記のシナリオを否定することはできない。インフレーションによって量子ゆらぎの巨視化が起こること自体が量子論からの自然な帰結だからである。

ゆらぎの古典化を引き起こす可能性のある現象の一つは、宇宙の再加熱過程である。2.1で述べた様に、通常再加熱過程はスカラー場に対応する粒子の崩壊過程とみる。この崩壊過程によって生み出された素粒子ガスは、その多体的な相互作用によって元のスカラー場の持っていた量子力学的コヒーレンスを消し去る可能性がある。もっとも、この様な局所的な過程によってハッブルホライズンを越えたスケールのコヒーレンスを消し去ることができるかどうかは疑問である。特に、粒子間相互作用が大域的な時空構造の量子ゆらぎに影響を与えるとは考えにくい。

もう一つの可能性は、ゆらぎが再びハッブルホライズン内に入って後に物質の局所的相互作用により古典化するというものである。ただ、この場合、ホライズンを越えるスケールでの物質のゆらぎの記述が困難になる。ハッブルホライズンを越えるスケールでは空間的なゆらぎを定義するのに必要な同時刻面の選択の自

由度(gauge freedom)のためにゆらぎを物質のゆらぎと時空構造のゆらぎに一意的に分離することが不可能になる。したがって、時空構造のゆらぎが量子論的である以上、物質のゆらぎも量子論的であるということになるが、局所的にコヒーレンスを持たない高温の気体が大きなスケールで量子力学的コヒーレンスを持つというのは困難に思われる。

Problem 7. エントロピー生成と不可逆性の起源

再加熱直前におけるスカラー場の状態はほぼ量子力学的な純粋状態にあると考えてよい。従って、宇宙の再加熱は量子力学的純粋状態から熱的混合状態への変化を意味する。この過程は、量子系の不可逆性に関する概念的問題を伴っているが、それ自体は決して宇宙論特有のものではない。しかし、この過程のスカラー場のダイナミクスへの影響を調べてみると、それが単に概念的な問題に留まらないことが明らかになる。

再加熱はスカラー場のエネルギーが他の物質のエネルギーに転化する過程である。したがって、この過程は現象論的に次のようなスカラー場のエネルギー方程式として表される。

$$\dot{\rho}_{\phi} = -(\Gamma + 3H)\langle\dot{\phi}^2\rangle \quad (2.63)$$

この方程式は、スカラー場が振動的な振舞いをするポテンシャルの最小点の近傍だけでなく、ポテンシャルが単調な領域でも成立すると考えられる。この様な領域では、スカラー場が一様でそれが古典的なオーダーパラメーターとして扱えるとなると、(2.63)式は次のような方程式を与える。

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma)\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.64)$$

新たに加わった散逸項はスカラー場が複雑な構造を持つ場合にはその振舞いに、したがって、宇宙の振舞いに大きな影響を与えることが示される。ところが、Problem 4で指摘した様に、実際はポテンシャルの単調な領域でもスカラー場の量子力学的な特性を無視することはできない。しかも、この様な領域ではスカラー場をコヒーレントな粒子集団としてとらえることはできない。したがって、散逸効果がスカラー場の量子力学的振舞いにどのような影響を与えるのかという問題を直接扱わなければならない。これは、現在の量子力学の枠組みを超えた問題である。

§ 3. 量子宇宙論に伴う概念的諸問題

前節の議論は、熱的励起に基づくインフレーションは起こらないことを強く示

唆している。したがって、残るは量子論的励起に基づくインフレーションモデルということになるが、このタイプのモデルでは宇宙誕生時、すなわち時空自体が量子論的に振舞う時代での宇宙の構造がモデルの成否を左右する。もちろん、残念ながら満足のゆく時空の量子論（量子重力理論）は未だ完成していない。そこで、ここではその様な理論を作る上での一般的問題を指摘するにとどめる。

Problem 1. 全宇宙に量子力学は適用できるか。

量子宇宙論を議論する際、誰でも先ず疑問に思うのがこの問題である。全宇宙を一つの系と見るとき、もはやその外にいる観測者は存在しない。従って、その量子力学的記述が可能ならば、宇宙の状態は一意的に決っているはずである。しかし、これは古典的な観測者と対象となる量子系を分離する通常の量子力学と簡単には相入れない。特に、観測に伴う波束の収束は不変な宇宙の波動関数に対してどの様に位置づけられるのか不明である。また、通常の量子力学が（量子力学的）アンサンブルを対象としているという点も、宇宙はただ一つしか存在しないという我々の常識としっくりこない。この点は具体的に量子宇宙論を展開する際、その解釈に於て厄介な問題となる。

Problem 2. 量子状態をただ一つ選び出す原理

通常の量子力学は、異なった時刻における波動関数の相関を決定するが、初期時刻における波動関数を制限することはない。従って、宇宙がただ一つの波動関数で記述されるとすると、それを一意的に選び出す原理を新たに見いださねばならない。これはおそらく局所的な現象の研究によっては永久に発見できないものである。

Problem 3. 量子力学における時空概念

量子重力理論で忘れられがちな問題に、時空自体の実在性の問題がある。本来、古典理論に於て、時空概念は事象の実在性の上に構成されている。ところが、量子論では事象はア・プリオリな実在性を持っていない。したがって、時空概念、特に時空多様体、ないし時空連続体はア・プリオリな実在性を失う。最終的な量子重力理論は出発点に於て時空概念を用いてはいけなない。

Problem 4. 不可逆性の起源

前節で見たように不可逆性は宇宙の初期進化を決定する上で大きな役割を果たす。したがって、量子宇宙論により直接宇宙の初期進化を研究するためには不可逆性の起源を量子力学の立場から明らかにしなければならない。

最後に、これらの問題のうち、最初の二つの問題がこれまでになされた量子宇宙論を構成する試みの中で具体的にどのような形で現れるかを簡単な例でみてみよう。取り上げる例は、minisuperspace modelと呼ばれるものである。

まず、非常に単純化して、時空は空間的に一様等方で正の曲率を持つ時空

$$ds^2 = \sigma^2 [-N^2 dt^2 + a^2 d\Omega_3^2] ; \sigma^2 = 2G/3\pi \quad (3.1)$$

で、物質はコヒーレントで一様なスカラー場 ϕ で記述されるとしよう。すると、宇宙は2変数 a, ϕ で記述される力学系になる。そのラグランジアンは

$$L = N \left[\frac{1}{2} a \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{N^2} \right) + \frac{a^3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - a^3 V(\phi) \right] \quad (3.2)$$

で与えられる。正準変数を

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = - \frac{a \dot{a}}{N}, \quad \omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = a^3 \frac{\dot{\phi}}{N} \quad (3.3)$$

で定義すると、次のようなハミルトニアンが得られる：

$$\begin{aligned} H &= \pi \dot{a} + \omega \dot{\phi} - L \\ &= \frac{1}{2} \left[- \frac{\pi^2}{a} - a + \frac{\omega^2}{a^3} + 2a^3 V \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

ところが、(3.2)式の N に関する変分を取ると

$$\delta L / \delta N = H = 0 \quad (3.5)$$

となり、古典論の範囲では運動方程式を満たす限りハミルトニアンは常にゼロとなってしまいます（方程式(3.5)は一様等方宇宙におけるEinstein方程式になっている）。

量子論に移ると、(3.5)式は物理的に許される状態に対する拘束条件

$$\hat{H}\Psi \equiv \frac{1}{2} \left[- \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} - a - \frac{1}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2a^3 V \right] \Psi = 0 \quad (3.6)$$

に変わる。ここで p は operator ordering の不定性に起因する定数である。この拘束条件は通常の量子力学のシュレディンガー方程式が物理的に許される状態に対して

$$i\partial_t \Psi = 0 \quad (3.7)$$

となること、すなわち時間発展の概念が失われることを意味する。これは、一般座標変換に関して共変的な理論に共通の特徴であることが容易に示される。したがって、一般共変性を持つ理論では、時間概念自体を波動関数から導き出さねばならなくなる。(3.6)のタイプの方程式はWheeler-DeWitt方程式と呼ばれる。

量子力学的に記述された宇宙をいかにして古典的な宇宙と結び付けるか、特に時間の概念をどの様にして導入するかを $V = m^2 \phi^2 / 2$ の場合について具体的にみてみよう。この場合、(3.6)式の解の振舞いは $a^2 m^2 \phi^2 \gg 1$ の領域と $a^2 m^2 \phi^2 \ll 1$ の領域で全く異なった特徴を持つ。

$a^2 m^2 \phi^2 \gg 1$ の領域では、解は一般に振動的な振舞いを示し、WKB近似がよい近似を与える。すなわち、

$$\Psi = A \exp[i S] \quad (3.8)$$

と置くと、 S は近似的に次の方程式

$$-\frac{1}{a} \left(\frac{dS}{da} \right)^2 + \frac{1}{a^3} \left(\frac{dS}{d\phi} \right)^2 + a(a^2 m^2 \phi^2 - 1) = 0 \quad (3.9)$$

を満たし、さらに Ψ は正準運動量 π 、 ω の近似的な固有状態となる：

$$\hat{\pi} \Psi \simeq (\partial S / \partial a) \Psi, \quad \hat{\omega} \Psi \simeq (\partial S / \partial \phi) \Psi \quad (3.10)$$

これより、通常のWKB理論に従って、古典軌道及びそれにそう時間を

$$\partial S / \partial a = \pi = -a\dot{a}, \quad \partial S / \partial \phi = \omega = a^3 \dot{\phi} \quad (3.11)$$

によって導入すると、この古典軌道は古典的な運動方程式を満たすことが容易に示される。したがって、波動関数の振動的な領域では宇宙の波動関数を古典的な宇宙の集合に対応させることができる。ただし、どの古典宇宙が我々の宇宙に対応するのかを決定することはできない。これはProblem 1でも述べたように、宇宙を量子力学的に記述する限り避けられない問題である。さらに、今までの議論では、許される古典宇宙の集合自体を特定化することもできない。この特定化を行うためにはProblem 2で述べた波動関数をただ一つ選び出す原理が必要になる。

一方、 $a^2 m^2 \phi^2 \ll 1$ の領域では、波動関数は単調な振舞いを示す。したがって、波動関数は正準運動量の実の固有値を持つ固有状態ではなくなり、古典論との対応、特に時間の概念は定義不可能になる。したがって、量子宇宙論では時間の概念は波動関数に対して完全に相対的、かつ局所的なものとなる。

最後に、確率解釈に伴う問題を指摘しておこう。上で述べた波動関数の使い方は明らかに通常の量子力学での取扱と異なっている。通常の量子力学では波動関数はその絶対値の2乗が確率密度を与える。したがって、通常の量子力学と結び付けるためにはこの様な確率概念を波動関数から取り出さないといけない。確率の保存という視点からもっとも自然なものは、 a, ϕ の空間(minisuperspace)を計量

$$(G^{\mu\nu}) = (a^{-1}, -a^{-3}) \quad (3.12)$$

を持つローレンツ空間と見た時、保存的なカレント

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 : \quad (J^{\mu}) = \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial a}, -\frac{1}{a^3} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \quad (3.13)$$

から定義されるフラックス

$$F = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} J^{\mu} \quad (3.14)$$

である。ここで Σ は minisuperspace における空間的な面（今の場合曲線）である。 F は Σ の境界を固定した変形に対して不変となり、 Σ を通過する古典宇宙集合のフラックスを表す。しかし、Wheeler-DeWitt 方程式が Klein-Gordon 方程式と同じ構造を持つことから予想されるように、 F は定符号ではない。したがって、単純な確率解釈はできないことになる。これは、物理的には波動関数が膨張宇宙と収縮宇宙の量子力学的な重ね合わせを許容することに起因する。ここでは、再び巨視的量子状態の重ね合わせに関連した問題が顔を出す。