

解析空間のある位相的性質

東北大理 佐藤 肇 (Hajime SATO)

複素代数多様体, あるいは, 複素解析空間は, 広中の定理により, 特異点解消を持つ。この事実を '位相的' に証明せよ というのが Sullivan の問題 (加藤 [2] 参照) であった。しかし, この問題は, 一般の多面体の特異点解消という問題に一般化されるべきものではなく, まず

解析空間の位相 を調べよ

という方向から始まるべきものと思われる。ある種の隠れた位相的構造が, 特異点解消に役立っているのに違いない。

Sullivan は [6] で, 複素解析空間は, Euler 空間 であることを示した。即ち, 複素解析空間の, 各点の局所コホモロジーから定まる Euler 数は, 非特異なものと等しいという結果である。

この結果は著しいが, 複素解析空間の位相とよゝ為の条件から, まだ遠いと思われる。

Euler 空間は, (細分した空間の) 各次元単体すべてを集めたもののか, 輪体となり, そのホモロジー類

$$S_n \in H_n(\mathbb{Z}_2)$$

を, Stiefel-Whitney ホモロジー類 と呼ぶ。多様体の Stiefel-Whitney ホモロジー類は, Stiefel-Whitney コホモロジーのポアソナレ双対となり, ホモトピー不変の量となる。

非特異な複素解析空間 (即ち, 複素多様体) は, その接束が, 複素束に還元される。即ち, 複素多様体 である。このような多様体では, Chern コホモロジー類の mod 2 還元が Stiefel-Whitney 類 (偶数次元) となり, 奇数次元の Stiefel-Whitney コホモロジー類は, $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ で定められる Bockstein 同型

$$\begin{array}{ccc} H^{2i}(\mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^{2i+1}(\mathbb{Z}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^{2i} & & W^{2i+1} \end{array}$$

の像であるから, 常に消えている。即ち, 複素多様体の奇数次元 Stiefel-Whitney コホモロジー類は常に 0 である。

これに対応する事実が, 特異点のある解析空間の場合に成立するかどうか。疑問に思っていたが, 実は, 応中の特異点解消を用いれば, 簡単に示されることわかった。既知のこととは思われるが, 文献が見当たらないので, 述べておく。

定理 1 X をコンパクト複素解析空間, $S_{2j-1}(X)$ をその奇数次元 Stiefel-Whitney ホモロジークラスとすると,

$$0 = S_{2j-1}(X) \in H_{2j-1}(X; \mathbb{Z}_2) \quad j=1, 2, \dots$$

証明 X_i を非特異な複素多様体, $g_i: X_i \rightarrow X$ 射を

$$\forall p \in X \quad \sum_i k_i \chi(g_i^{-1}(p)) = 1$$

(但し $\chi(g_i^{-1}(p)) \in \mathbb{Z}$ は空間 $g_i^{-1}(p)$ の Euler 数を表わす)

となるように作ることは, 表中の定理と, 次の二からの induction を用いることにより, できる。この時, Atkin[1] により, $\bigcup (g_i)_*(S_n(\bigcup X_i)) = S_n(X)$ となることは知られており, $S_{2j-1}(X_i) = 0$ であるから, 定理は証明される。

この結果を, 表中の定理を用いずに証明できるだろうか?

Macpherson[3] により, (特異点のある) 代数多様体に対して, Chern ホモロジークラスが構成されている。次の結果も既知と思われるが, 文献は同様に見当らない。

今次元 Chern ホモロジークラスを $c_n(X) \in H_{2n}(X; \mathbb{Z})$ と書く。

定理 2 X をコンパクト複素代数多様体 (特異点と許す) とする. X の時

$$c_n(X) \equiv S_{2n}(X) \in H_{2n}(X; \mathbb{Z}_2)$$

証明は定理 1 と全く同様であり, 解析空間にも $c_n(X)$ が定義出来れば, 同様の定理が成立すると思われる。

MacPherson の Chern 数は, MacPherson cycle の構成と, X の blowing up (Nash による) から定まる Mather 類の構成という, 2 つの主要部分に分かれるが, 定理 2 は, Chern 数の combinatorial topological な構成の可能性を残している様 と思われる。

さて, 定理 1 は, Sullivan の定理のように, 解析空間か, 解析多様体による stratification を持つという事実のみから従うのかであろうか?, 次の定理は, このか, そうでは無いことを示している。即ち, 複素解析空間の複素多様体による stratification は, strata の間による“関係”が成立していることを意味している。

Euler 空間の定義で, mod 2 の Euler 数も考える時には mod 2 Euler 空間, 一般的に整数係数の時, 整 Euler 空間という。

定理 3 あるコンパクトな 整 Euler 空間 X は、複素多様体で stratify されており、 $\exists j. S_{2j-1}(X) \neq 0$ となるものが存在する。

複素多様体で stratify されていることの正確な意味は

$X = \bigcup_i X^i$ X^i : i 次元 複素多様体と同相
 ということである。

このような X は 沢山作れるが、例えば、

$X = P^3(\mathbb{R}) \times S^1 \times S^2 = P^3(\mathbb{R}) \times S^1 \times (S^2 - \text{pt}) \cup P^3(\mathbb{R}) \times S^1$
 と考え、

$P^3(\mathbb{R})$ の 1 次元ホモロジーに対応する元 π 、松井=依藤 [4][5] の方法で構成すれば、これは、各 stratum 毎に同相で、Stiefel-Whitney homology 類を数え子に与えるからである。

以上の結果は、筆者と松井明德氏 (一肉高寿) の共同研究の由に得られたものである。

References

- [1] E. Akin, Stiefel-Whitney homology classes and bordism, *Trans AMS* 205 (1975), 341-359.
- [2] 加藤十吉, 解析集合の初等位相幾何学, *数学* 25 (1973), 38-51.
- [3] R. D. MacPherson, Chern classes for singular algebraic varieties, *Ann. Math* 100 (1974), 423-432.
- [4] A. Maseri and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes and homotopy type of Euler spaces, *J. Math. Soc. Japan* 37 (1985), 437-453.
- [5] 佐藤 隆, 特異空間と両変理論, *数解研講究録* 577 (1985), 62-73.
- [6] D. Sullivan, Combinatorial invariants of analytic spaces, *Proc. Liverpool Singularities I. Lec. Note in Math* 192 Springer, 1971, 165-168.