

分子気体論による圧縮性乱流の計算－ 2

いわき明星大 高山文雄 (Fumio Takayama)

東京電機大 桜井 明 (Akira Sakurai)

1 はじめに

圧縮性乱流は渦や衝撃波が混在した複雑な流れ場であり、これを数値的に解析する方法として連続体モデルによる方法と分子気体論による方法が考えられる。連続体モデルに対しては DNS(Direct Numerical Simulation) により、これまでに多くの解析があるが、セルレイノルズ数を 1 以下するため、多くの格子点数が必要となる。一方、分子論による方法については、筆者らによる積分型 Boltzmann 方程式を用いれば、補間を利用するので少ない格子点数での計算が期待できる。これまでに分子気体論の方法を圧縮性乱流の解析に応用した例は、LBE (Lattice Boltzmann Equation) のほか筆者らの 2 次元問題の解析など少ないが、ここではこれを 3 次元問題に適用し、有効性を調べることを目的である。

さて分子気体論は元来、粘性係数などの流体諸定数の導出や稀薄気体の流れなど分子的構造が目立つものに使われてきたが、その後の方法論の進展に伴い巨視的な流れの計算にも応用される様になってきた (例えば文献 [1,2])。これまでに筆者らは、衝突項に BGK モデルを用いた積分型 Boltzmann 方程式を提案し、2 次元の Taylor-Green 型の正形状の周期解の場合について Navier-Stokes 式の解と比較し、その有効性を示した [3]。また、エネルギースペクトルは、大体において 2 次元乱流的特性の波数 k^{-3} に比例している部分があることが分かった。本報告は、この積分型 Boltzmann 方程式を基本的な圧縮性乱流の流れ場の解析として、前回の報告 [4] にひき続き 3 次元 Taylor-Green 型立方形状の初期値問題に適用し、密度、渦度分布の時間発展、速度勾配テンソルの不変量等の解析結果を述べたものである。

2 分子気体論モデル

分子論モデルとしては、ここでは、 $f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t)$ をある場所 $\mathbf{x}=(x, y, z)$ 、時間 t における分子速度 $\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$ に対する分子速度分布関数、 F は外力、 $\frac{\partial_{\mathbf{c}} f}{\partial t}$ は衝突項として、Boltzmann

方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + F \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial_e f}{\partial t} \quad (1)$$

を用いるが、乱流場のような細かい変化に対し、差分近似をさけるため、その特性曲線に沿う微小時間 Δt での積分形で外力のない場合、

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t, t + \Delta t) - f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t) = \Delta t \frac{\partial_e f}{\partial t}, \quad (2)$$

を用いる。(2)式において $\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t \rightarrow \mathbf{x}$ と変換して

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c}\Delta t, t) + \Delta t \frac{\partial_e f}{\partial t} \quad (3)$$

の形にして、 t におけるデータから $t + \Delta t$ での値を求める。

ここでは、衝突項 $\frac{\partial_e f}{\partial t}$ にBGKモデルを用いる。これは、BGKモデルが計算が容易であるという利点とPrandtl数 $\sigma = 1.0$ であるが定性的には有効であることが知られている。

BGKモデル:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_e f}{\partial t} &= \nu(f_0 - f), \\ \nu &= \frac{1}{\mu} p, \text{ (collision frequency, } \mu : \text{粘性係数)}, \quad f_0 = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{n/2}} e^{-C^2/2RT}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{c} - \mathbf{u}, \quad C = |\mathbf{C}|, \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \int f d\mathbf{c}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \int \mathbf{c} f d\mathbf{c}, \\ T &= T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \int \frac{2}{n} C^2 f d\mathbf{c}. \end{aligned}$$

ここで、 $n=2, 3$ はそれぞれ2次元(Coplanar)、3次元を表わす。

3 Taylor-Green 型 初期値、境界値問題

問題としては、3次元のTaylor-Green型問題を扱う。この問題は、DNSでも扱われているが主に非圧縮流の場合のプログラムのチェックに使われている。初期値として、前回の報告と同じ速度、密度、温度として $\mathbf{u}_{00}=(u_{00}, v_{00}, w_{00})$ 、 ρ_{00} 、 T_{00} を与え、それらで求められるMaxwell分布 f_{00} を f の初期値、すなわち $f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, 0) = f_{00}$ とする。

ここで速度分布関数、速度、密度、温度の初期値を、それぞれ以下のように与える、

$$f_{00} = \frac{\rho_{00}}{(\pi T_{00})^{3/2}} e^{-C^2/T_{00}}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{u}_{00},$$

$$\begin{aligned}
u_{00} &= A \cos 2\pi x \sin 2\pi y \sin 2\pi z, \\
V_{00} &= B \sin 2\pi x \cos 2\pi y \sin 2\pi z, \\
w_{00} &= C \sin 2\pi x \sin 2\pi y \cos 2\pi z, \\
\rho_{00} &= 1 + D \sin 2\pi x \sin 2\pi y \sin 2\pi z, \\
T_{00} &= 1 + E \cos 2\pi x \cos 2\pi y \cos 2\pi z.
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで $A, B, \dots, E$ は定数である。境界条件として、単位立方体 ($0 \leq x, y, z \leq 1$) の領域を考え、そのため周期境界条件として、すべての関数 $F(x, y, z)$ に対し

$$F(x+1, y+1, z+1) = F(x, y, z) \tag{5}$$

を課する。さらに、式 (3) で f の格子点以外の値が必要となるが、四面体領域をそれぞれ線形関数 $f = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z$ で表わして内挿する。

4 計算結果

2次元 Taylor-Green 型問題に対する結果

亜音速で $Kn=0.01$ の場合の 2次元 Taylor-Green 型問題に対する BGK モデルの結果は、Navier-Stokes の結果と比較して図 1 の様になった [3, 4]。この図より BGK モデルの結果は、Navier-Stokes の結果と良い一致を示し、また、エネルギースペクトルも波数 k の 3 に比例していることから、2次元乱流的な性質を示している。

2次元での分子流モデルの結果が有効であることが示せたので、3次元 Taylor-Green 型問題に対して分子流モデルを適用し、密度、渦度分布の時間発展、速度勾配テンソルの不変量等の解析を行なった。

3次元 Taylor-Green 型問題に対する初期条件、計算条件

計算スキームは、立方体内で境界条件 (5) の下、 $t=0$ での初期値 (4) から出発し、式 (3) により時刻 Δt ごとに求めていく。計算では、 $A=0.5, B=C=-0.2, D=E=0.01$ およびクヌーセン数 $Kn=0.1$ に対し、 $\mathbf{x}$ は $25 \times 25 \times 25$ 分割、 $\mathbf{c}$ は $-4 \leq c_x, c_y, c_z \leq 4$ で $8 \times 8 \times 8$ 分割で計算を行なった。

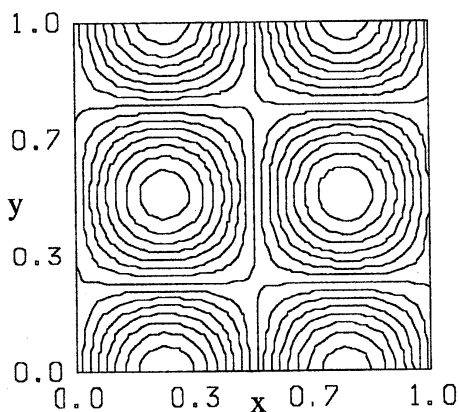
密度、渦度分布

図 2 は、密度、渦度に対して $t=0.0-0.7$ での変化の様子を等値面 (i.s.=iso surface) で示し

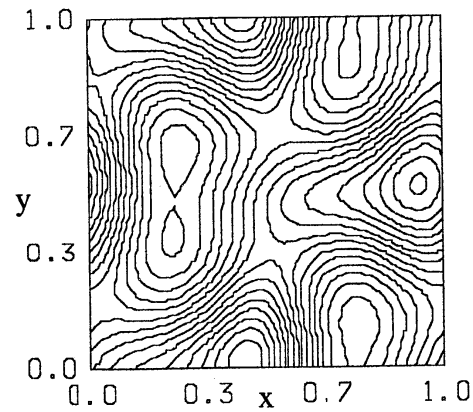
ている。密度分布図の等値面は最大値近傍を表示したもので、時間の経過とともに密度の大きな領域が生成され ($t=0.25$)、徐々に減衰均一化 ($t=0.5, 0.7$) していく様子が見られる。また、 $t=0.5$ では、衝撃波と思われる構造が見られる。渦度分布に関しては、初期値として与えた大きな渦構造が、時間の経過と共に崩壊し、小さな渦構造に減衰していくことが見られる。これは、流れ場が eddy-shocklet のようなものに発展し、時間の経過とともに減衰していくことを示していると考えられる。

エネルギースペクトル

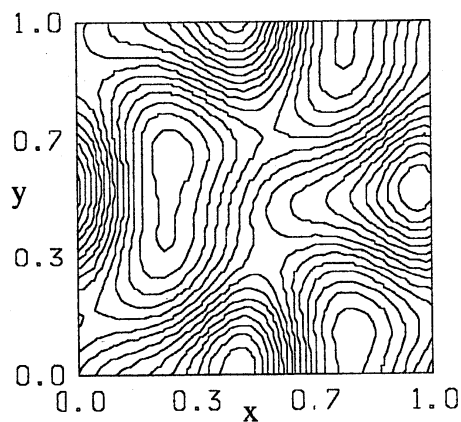
図3に示すように、エネルギースペクトル $E(k)$ は $-5/3$ の勾配を持つ部分がみられ、流れ場がほぼ3次元乱流的な性質を持つことを示している。クヌーセン数 $Kn=0.1$ (レイノルズ数 $Re=10$) 程度での計算で、波数 k の $-5/3$ 乗がでるかとの議論があるが、この傾向は、一様等方性の場合であるとは限らないので、むしろ渦が碎けるときの特性と考えられ、事



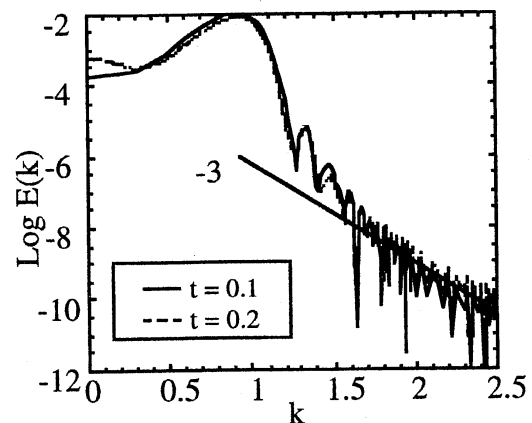
(a) Density contour at $t=0$



(c) Density contour at $t=0.1$, Navier-Stokes



(b) Density contour at $t=0.1$, BGK



(d) Energy spectrum

図1: 2次元Taylor-Green問題に対する密度分布とエネルギースペクトル (初期条件: subsonic、 $Kn=0.01$)

実シエルモデルでも数個の項でもこの傾向は出る。また、もとの Taylor-Green [5] では手計算で数個の harmonics の式を出しただけだが、それでも -5/3 の特性が見えて Koromogoroff の -5/3 乗則の発見 [6] に繋がったことを考えると、ここでの結果は有効であると考えられる。

速度勾配テンソルの解析

次に計算した流れ場について、速度勾配テンソルの解析 [7] により圧縮性乱流の性質を調べる。速度勾配テンソル A_{ij} において、3次元運動に対して固有値 λ は次の3次多項式

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (6)$$

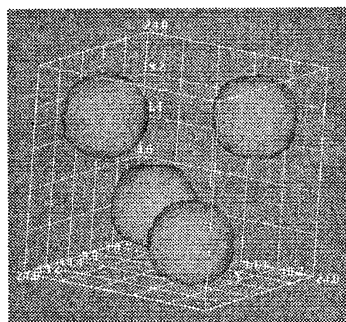
で表わされる。ここで、 P 、 Q 、 R はスカラー不変量と呼ばれ、座標変換に対して不変な量である。ただし、各不変量は、

$$P = -\text{trace}[\mathbf{A}], \quad Q = \frac{1}{2}(P^2 - \text{trac}[\mathbf{A}^2]), \quad R = -\det[\mathbf{A}]$$

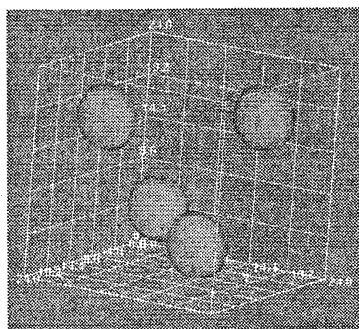
で表わされる。固有値に関する3次多項式を解いたとき、解が2個が複素数で1個が正の実数の場合(ケース(a))は伸張渦状点の軌道、2個が複素数で1個が負の実数の場合(ケース(b))は圧縮渦状点の軌道、3個が実数の場合(ケース(c))は鞍状点と結接点を組み合わせた軌道をそれぞれとる。

図4は、時間 $t=0.5$ における $z=0.5$ の平面で固有値と渦度 $|\omega|$ の分布を表示したものである。渦度は、黒色から白色に変化するにつれて強度が増す。これらの図より、渦度の強い部分に圧縮渦状点の軌道があり、また渦の外側に伸張渦状点の軌道があることがわかる。一方、渦度の小さい黒色の部分は鞍状点と結接点を組み合わせた軌道である。

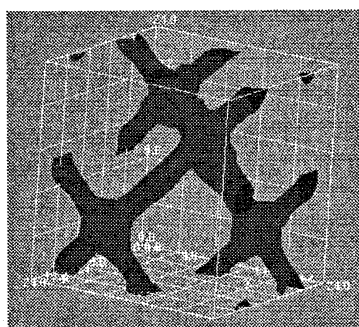
また、図5は時間 $t=0.5, 0.7$ におけるスカラー不変量の関係 $Q-R$ (図5(a), (b))、および $P-R$ (図5(c) and (d)) を示したものである。これらの図より、スカラー不変量 R は時間と共にその分布は縮む傾向を示しており、これは衝撃波生成による場の片寄りと速度場の減衰によるものと考えられる；スカラー不変量 P は、 $P = -\text{trace}[\mathbf{A}] = \text{div} \mathbf{u}$ であるから、非圧縮流であれば0となるが、ここでは圧縮流であるため $P \neq 0$ である。しかしながら、時間の経過とともに分布が0を中心として小さくなる傾向があり、これは速度場が減衰して非圧縮流の性質に近い流れ場になりつつあること示している。以上スカラー不変量に対する概括的な知見を述べたが、これに対する解析は始めたばかりであり、圧縮性乱流の詳細な解析は今後の課題である。

Density

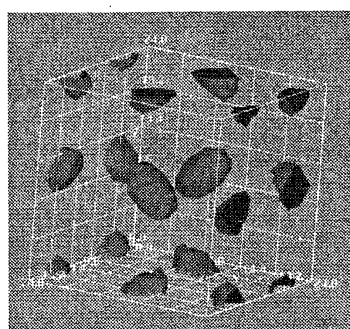
$t = 0.0$ (i.s.=1.004)



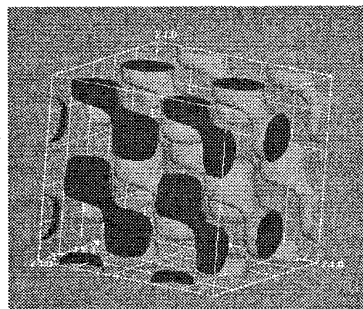
$t = 0.25$ (i.s.=1.053)



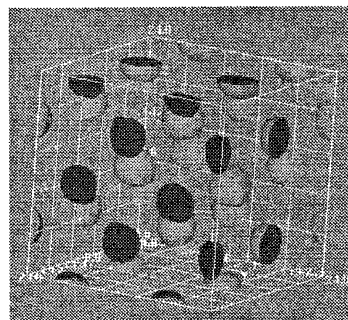
$t = 0.5$ (i.s.=1.024)



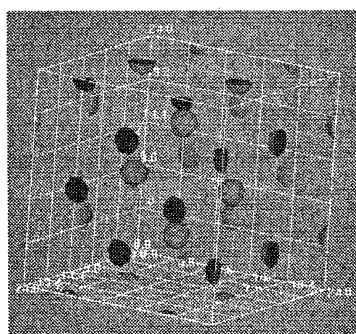
$t = 0.7$ (i.s.=1.016)

Vorticity

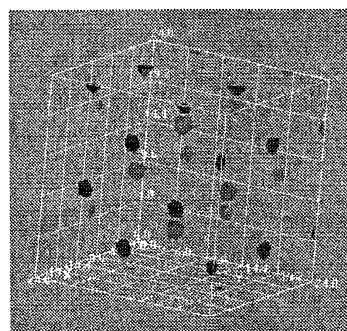
$t = 0.0$ (i.s.=3.13)



$t = 0.25$ (i.s.=1.00)



$t = 0.5$ (i.s.=0.24)



$t = 0.7$ (i.s.=0.072)

図 2: 3次元Taylor-Green型問題に対する時間
 $t = 0.0, 0.25, 0.5, 0.7$ での密度、渦度の等値面

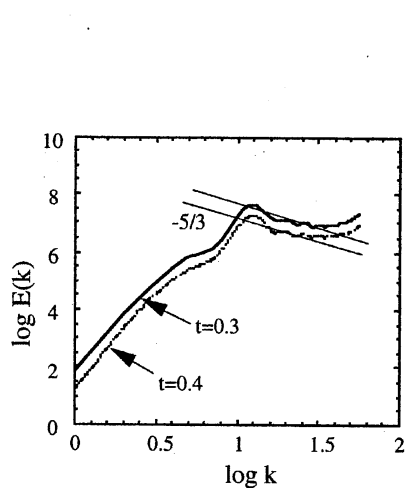


図 3: エネルギー
スペクトル

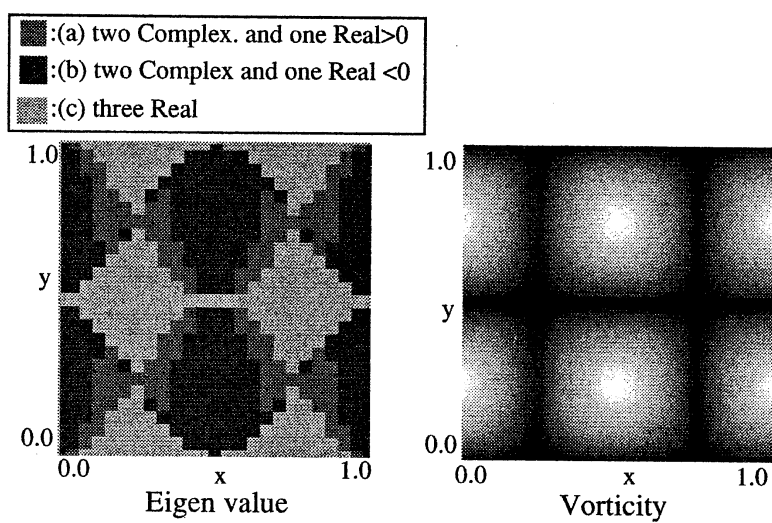
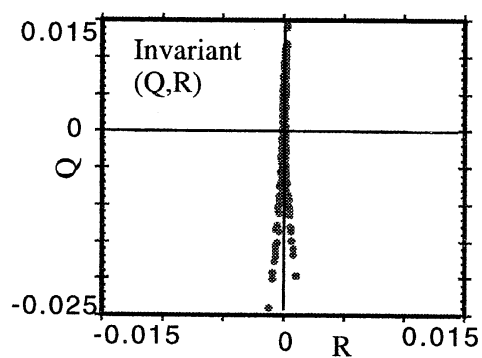
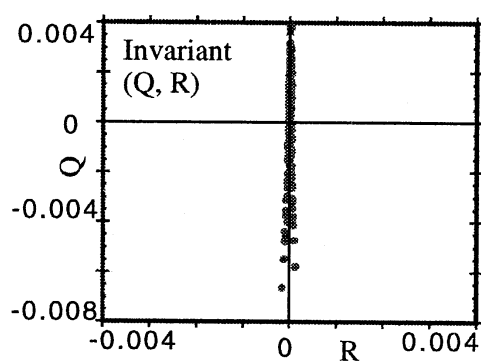


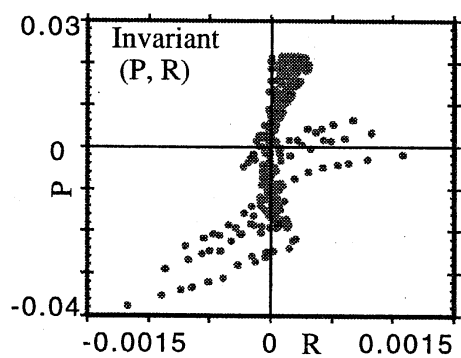
図 4: 速度勾配テンソルの固有値と渦度 ($t=0.5, z=0.5$)



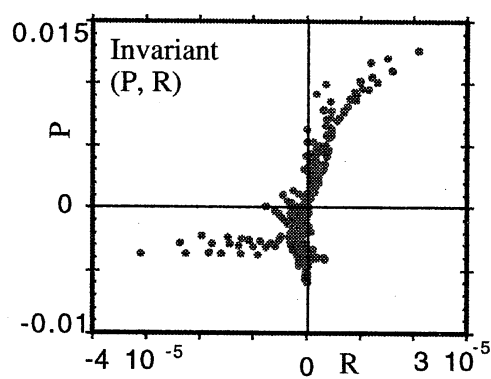
(a) $t = 0.5$



(b) $t = 0.7$



(c) $t = 0.5$



(d) $t = 0.7$

図 5: $t = 0.5, 0.7$ における速度勾配テンソルの不変量分布

クヌーセン数 Kn に対する議論

ここで計算した 3 次元 Taylor-Green 問題の初期条件において、クヌーセン数 $Kn=0.1$ が大きすぎるという議論がある。これは、普通の分子流では希薄気体流れに当たるが、ここでの問題では一様流といった流れ場はなく、時間と共に場所場所が変わる。2 次元の場合に対しては、 $Kn=0.01$ および 0.001 で計算をしたが、大きな違いは見られなかった。今後 3 次元に対しても、 $Kn=0.01$ などの場合に対しても計算してみることも必要である。

5 まとめ

分子流モデルによる圧縮性乱流に対する計算の可能性を調べるために、3 次元 Taylor-Green 型問題に適用した。結果は、流れ場が基本的な乱流の性質を示し、このモデルの有効性を示せた。今後の課題として、一様当方性乱流等の問題にこれを適用し、これまでに DNS 等で得られた結果と比較することがある。

6 参考文献

- [1] Satofuka, N., Morinshi K., and Oishi T., Numerical solution of the kinetic model equations for hypersonic flows, *Comput. Mec.*, 11, (1993), p.452.
- [2] Xu, D.Q., Honma, H., Numerical simulation for nonstationary Mach reflection of a shock wave: a kinetic-model approach, *Shock Wave* 1, (1991), p.43.
- [3] Sakurai, A. and Takayama F., Eddy shocklet in coplanar gas flow, *Fluid Dynamics Research* (Elsevier), 21, (1997), p.211.
- [4] 桜井 明, 高山文雄, 分子気体論による圧縮性乱流の計算, 数理解析研究所講究録, 1051, (1998), p.40.
- [5] Taylor, G.I. and Green A. E., Mechanism of the production of small eddies from large ones, *Proc. of Royal Soc. London A*, 158, (1937), p.499.
- [6] Yaglom, A.M., A.M. Kolomogorov as a Fluid Mechanician and Founder of a School in Turbulence, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26, (1994).
- [7] 前川 博, 圧縮性乱流の位相幾何学的構造, *ながれ*, 17, (1998), p.411.