

Analytic Structure と 極大 Ideal の中

阪大 理 西村 健

§ 0 序

B を単位元を持つ可換 Banach 環、 $\Sigma(B)$ を B 上の multiplicative linear functional の集合とし、 $\phi \in B$ を個定して考える。 $\mathbb{C}^L$ のある domain の analytic subvariety V と、 V から ΣB への連続な (ただし ΣB には、Gelfand 位相を考える)、one to one map Φ^* が存在して、 $0 \in V$ 、 $\Phi^*(0) = \phi$ 、かつ任意の $b \in B$ に対して、 $\hat{b} \circ \Phi^*$ が V 上で正則になるとき、 V を (正確には (V, Φ^*) を) 'Analytic variety at ϕ ' と言う。ここで $\hat{b}$ は b の Gelfand 変換を表わす。

この Analytic structure について広範囲にわたる報告が、[1] にもあります。ここでは話題をしばって、 $B\phi = \ker \phi$ の中 $B\phi^n$ ($n=1, 2, \dots$) と variety at ϕ の $0 \in \mathbb{C}^L$ に於ける次元 $\dim_0 V$ との関係と non-trivialness との関係も含めて、T. Read の結果 [2] を中心に紹介します。

§ 1. 'Analytic variety at ϕ ' の存在の十分条件.

$\mathbb{C}^t$ のある domain の subvariety V 上の正則関数全体からなる algebra を $\mathcal{O}[V]$ で表わす。次の事柄は容易にわかる。

命題 1.1 準同型 $\Phi: B \rightarrow \mathcal{O}[V]$ があり、 $\Phi(B)$ が V の点を分離すれば、 Φ の dual map を Φ^* としたとき、 (V, Φ^*) は analytic variety in $\Sigma(B)$ である。又 $0 \in V$ かつ、任意の $b \in B\phi$ に対し $(\Phi b)(0) = 0$ なら (V, Φ^*) は analytic variety at ϕ である。 V 上の sup norm を $\|\cdot\|_V$ であらわすと $\|\Phi b\|_V \leq \|b\|$ ($\forall b \in B$) (証明略)。

前にも述べたように、 $B\phi$ は $\ker \phi$ を表わす。以後 $n=1, 2, \dots$ に対し $B\phi^n$ を ' $B\phi$ の n 個の元の積' 全体から生成される ideal を表わす。 $B\phi^n$ は B と規約する。又 $(B\phi^n)^-$ でそれぞれ norm closure を表わす。これらも B の ideal である。 $R > 0$ に対し $\Delta(R) = \{z = (z_1, \dots, z_t) \in \mathbb{C}^t; |z_i| < R (i=1, 2, \dots, t)\}$ とおく。

以下を通して仮定「 $w_i + (B\phi^n)^- (i=1, 2, \dots, t)$ が vector space $B\phi/(B\phi)^-$ を張る」が成立するものとす話を進める。

今 $b \in B$ に対し $I_M(b) = \{f = \sum_{|i| \leq n} \rho_i z^{(i)} \in \mathcal{O}[\Delta(M')]; \sum_{|i| \leq n} \rho_i w^{(i)} - b \in (B\phi^{n+1})^-, n=1, 2, \dots\}$ とおくと次の事が成立する。(補題 1.1, 定理 1.1 等以下には [2] では implicit であった事柄が表に出てみた事柄もある。個人的な興味も理由の

ーのだが、こゝで得られに variety の dim. を調べる時の取り扱いが簡単になるなどの利便があると思ふ、だからでもある。

補題 1.1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, f \in \Psi_M(a), g \in \Psi_M(b)$ なら $\alpha f + \beta g \in \Psi_M(\alpha a + \beta b), fg \in \Psi_M(ab)$.

証明 $w^\omega = w_1^{\omega_1} \cdots w_r^{\omega_r} \in (B\phi^{n+1})^-$ if $|\omega| \geq n$ と考慮すれば容易にわかる。

次の条件が analytic variety at ϕ の存在の十分条件として考えられる. C1): $\exists M > 0$ s.t. $\Psi_M(b) \neq \emptyset (\forall b \in B)$

定理 1.1. C1 を仮定して、 $V = \{z \in \Delta(M^{-1}); f(z) = 0 \forall f \in \Psi_M(0)\}$ とおく. $\forall b \in B$ に対して $f, g \in \Psi_M(b)$ なら $f|_V = g|_V$. $\Phi(b) = f|_V$ とおくと B から $\mathcal{O}[V]$ への準同型 Φ が得られ、 Φ の dual map Φ^* は homeomorphism かつ (V, Φ^*) は 'analytic variety at ϕ ' である. (証明) $f|_V = g|_V$ であることは補題 1.1 で $a=b, \alpha=1, \beta=-1$ とおけばわかる.

Φ が準同型であることも補題 1.1 から判る. 座標関数 $s_i \in \Psi_M(w_i)$ より $\sigma \circ \Phi^* = \text{id. on } V$. こゝに σ は $\varphi \in \Sigma(B) \mapsto (\hat{w}_\lambda(\varphi), \hat{w}_\mu(\varphi)) \in \mathbb{C}^r$ で定義される連続写像. よって Φ^* は homeomorphism.

(証明終り). 次の条件 C2) は C1) と同等である.

条件 C2). $\exists M > 0$ s.t. $\forall b \in B \exists C(b) > 0$ s.t. $\forall n, \exists f_n = \sum_{|\omega| \leq n} \beta_\omega z^\omega$ with $f_n(w) = \sum_{|\omega| \leq n} \beta_\omega w^\omega \equiv b \pmod{(B\phi^{n+1})^-}, |\beta_\omega| \leq C(b)^{|\omega|}$

定理 1.2. C1 と C2 は同値である. (証明) $C1 \Rightarrow C2$

は明らか. 逆に C2) を仮定する. b に対する $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $\Delta(M')$ の任意の compact set 上で有界であるから, ある $f \in \mathcal{O}[\Delta(M')]$ に広義一様に収束すると考えよう. 以後一般に $g = \sum \alpha_\omega z^\omega$ に対し $\sum_{|\omega| \leq n} \alpha_\omega z^\omega$ を $g|_n(z)$ で表わす. $0 \in \mathbb{C}^t$ の近傍で正則な函数 h の 0 に於ける germ の全体からなる環 $\mathcal{O}$ から $B/(B\phi^{n+1})^-$ への $h \mapsto h|_n(w) + (B\phi^{n+1})^-$ で定義される写像は準同型であることがわかるから, その kernel $\mathcal{I}_n = \{h \in \mathcal{O}; f|_n(w) \in (B\phi^{n+1})^-\}$ は $\mathcal{O}$ の ideal. $f_n - f_{n+k} \in \mathcal{I}_n$ ($k > 0$) $f_n - f_{n+k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{広義一様}} f_n - f$ と closure of Modules Theorem [3.Th. II D3] により $f_n - f \in \mathcal{I}_n \therefore f|_n(w) \equiv f_n|_n(w) \equiv b \pmod{(B\phi^{n+1})^-} (\forall n) \therefore f \in \mathcal{I}_1(b)$ (証明終り).

Read [2] にある条件即ち C2) は見掛け上弱い (実は同等) 条件 C2') で置き換える. C2') $\forall b \in B \exists M(b) > 0, \exists C(b) > 0$ s.t. $\forall n \exists f_{b,n}(z) = \sum_{|\omega| \leq n} \beta_{b,n,\omega} z^\omega$ with $f_{b,n}(w) - b \in (B\phi^{n+1})^-, |\beta_{b,n,\omega}| \leq C(b)M(b)^{|\omega|}$.

定理 1.3. C2) と C2') は同値である. (証明). C2) $\Rightarrow$ C2') は明らか. 逆に C2') を仮定する. $B_{N,C} = \{b \in B; \forall n \exists f_{nb} = \sum_{|\omega| \leq n} \beta_{b,n,\omega} z^\omega \text{ s.t. } f_{nb}(w) - b \in (B\phi^{n+1})^-, |\beta_{b,n,\omega}| \leq CN^{|\omega|}\}$ ($N \in \mathbb{Z}^+, C > 0$) ($\mathbb{Z}^+$ は正整数の集合) とおく. C2) $\Leftrightarrow \exists M > 0$ s.t. $\bigcup_{C \in \mathbb{Z}^+} B_{M,C} = B'$ 又 C2') $\Leftrightarrow \bigcup_{C,N \in \mathbb{Z}^+} B_{N,C} = B'$ である. $B_{N,C}$ は閉である. 実際, $b_j \in B_{N,C} \rightarrow b$ とすると, $\exists f_{j,n}(z) = \sum_{|\omega| \leq n} \beta_{j,n,\omega} z^\omega$ s.t. $|\beta_{j,n,\omega}| \leq CN^{|\omega|}, f_{j,n}(w) - b_j \in (B\phi^{n+1})^-$.

必要なら部分列を取, $\beta_{j,n}(\alpha) \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} \beta_{n(\alpha)} (\forall n)$ とし.

$f_n(z) = \sum_{i \leq n} \beta_{i,n}(\alpha)$ ($n=1, 2, \dots$) とおくと $f_{j,n}(w) - b \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} f_n(w) - b$
より $f_n(w) - b \in (B_\phi^{n+1})^-$. 明らかに $|\beta_{n,\alpha}| \leq CN^{1/2}$ $\therefore b \in B_{N,C}$

. Baire の Category Theorem と $B_{N,C}$ の凸性により $\exists N_0, C_0$

s.t. 0 は B_{N_0, C_0} の内点. $\therefore \forall b \in B$ に対し $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $b \in$

$k B_{N_0, C_0}$. 定義より $k B_{N_0, C_0} = B_{N_0, k C_0}$ $\therefore b \in \bigcup_{N, C \in \mathbb{Z}^+} B_{N, C}$ (証明終り)

定理 1.3 から次の事も容易にわかる. $\mathcal{A}(b) = \{f \in \mathcal{A}; f|_n(w) \equiv b \pmod{(B_\phi^{n+1})^-}\}$ とおく. 1.3 の系 $\mathcal{A}(b) \neq \emptyset (\forall b \in B) \Rightarrow C1$ 成立

定理 1.4. 定理 1.1 で得られた analytic variety at ϕ に対し
1) 次の成立する. (U, θ^*) を analytic disc at ϕ (i.e. $\mathbb{C}^1$ の
単位円盤 U から $\Sigma(B)$ への連続写像 θ^* に対し $\hat{b} \circ \theta^*$ が U 上で
正則かつ $\theta^*(0) = \phi$ となる) とすると 0 のある近傍 $U' \subset$
 U) に対し $\theta^*[U'] \subset \mathcal{A}^*(V)$ (証明). θ^* は $\theta(b)(z) = \hat{b}(\theta^*z)$
により $\theta; B \rightarrow \mathcal{A}[U]$ なる準同型を引きおこす. U' を十分
小さくとると, $\sigma(\theta^*(U')) \subset \Delta(M^{-1})$ と出来る. (σ の定義は定
理 1.1 の証にある) $f \in \mathcal{A}_n(b)$ に対し $b - f|_n(w) \in (B_\phi^{n+1})^-$.

よって $\theta(b - f|_n(w))$ は $0 \in U$ に於ける zero の order が少な
くとも $n+1$: $\theta(b - f|_n(w))z = (\theta b)(z) - f|_n(\sigma \theta^*z) \Rightarrow \theta(b)z -$
 $f(\sigma \theta^*z)$ on U' だから $(\theta b)(z) = f(\sigma \theta^*z)$ on U' 特に関 $f \in$
 $\mathcal{A}(0)$ に対し $f(\sigma \theta^*z) = (\theta 0)(z) = 0 (\forall z \in U')$ よって $\sigma \theta^*(U') \subset V$.
 $\forall z \in U$ を固定する. $\forall b \in B$ に対し $\forall f \in \mathcal{A}(b)$ を

とすると $\hat{b}(\theta^*z) = (\theta b)(z) = f(\sigma\theta^*z) = (\Phi b)(\sigma\theta^*z) = b(\Phi^*\theta^*z)$
 だから $\theta^*z = \Phi^*\theta^*z$. 故に $\theta^*z \in \Phi^*(U)$ (証明終り).

定理 1.4 は、C1 (従って C2, C2') によ、保証される 'analytic variety at ϕ ' が、すべての analytic variety at ϕ のうちで '極大' であることを意味している。なお、これ等の条件は w_i ($i=1, \dots, t$) のとり方に depend しているように見えるが、一組の、 $\{w_i + (B\phi^2)^-\}$ が $B\phi/(B\phi^2)^-$ の basis になる様な組について成り立っていれば、他の ' $\{w_i + (B\phi^2)^-\}$ が basis になる組' についても成り立つことがわかってゐる。

§ 2 $(B\phi^n)^-$ $n=1, 2, \dots$ と variety の 0 に於ける次元。

直和 $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ は $(B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ を n 次の homogeneous element 全体と考えると、graded ring になる。この場合 $a + (B\phi^{p+1})^- \in (B\phi^p)^-/(B\phi^{p+1})^-$, と $b + (B\phi^{q+1})^- \in (B\phi^q)^-/(B\phi^{q+1})^-$ の積は $ab + (B\phi^{p+q+1})^- \in (B\phi^{p+q})^-/(B\phi^{p+q+1})^-$ とする。'well defined' である事は明らか。

§ 1 に於ける様にこの $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ が $B\phi/(B\phi^2)^-$ を張るという仮定を置く。すると不定元 $X_1, \dots, X_t$ の $\mathbb{C}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_t]$ から $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ への '自然な' degree zero の homogeneous homomorphism φ (従って $\varphi(X_i) = w_i + (B\phi^2)^-$) が考えられる。(Graded algebra に関する用語定義は [4] 参照)

定理 2.1 [S. J. Sidney [5]] . 上に述べた準同型 φ は onto で

ある。(証明省略 [5]参照)

上の定理は $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ の homogeneous ideal J が存在して、
 $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B\phi^n)^- / (B\phi^{n+1})^-$ が $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]/J$ と同型 ($J = \ker \phi$) となる
 事を示しているがその逆をも Sidney は示している。

定理 2.2 [5] J を任意の homogeneous ideal in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$
 とするとある supnorm algebra A と $\phi_1 \in \Sigma A$ が存在して、
 $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]/J$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (A\phi_1^n)^- / (A\phi_1^{n+1})^-$ は同型になる。(証明省略)

以下この § では $w_1, \dots, w_k$ について $C1$ (又は $C2$) $C2'$) が
 成立しているとして仮定する。従って定理 1.1 によつて analytic
 variety (V, Φ^*) at ϕ が存在する。この V の要素における次
 元 $\dim_0 V$ について次の事が成立する。

定理 2.3 a) ある多項式 $\pi(X)$ が存在して十分大きな n に
 対しては $\pi(n) = \dim(B\phi^n)^- / (B\phi^{n+1})^-$ が成立する。 b) $\dim_0 V =$
 $(\deg \pi) + 1$ 。ここに $\deg \pi$ は多項式 $\pi(X)$ の次数。ただし $\deg 0$
 $= -1$ と規約する。以下をこの定理の証明にあてる。 a) は次による。

定理 2.4 [4] Theorem 41 in Ch. VII Hilbert-Serre. $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ から、graded ring $R = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus R_n$ の上への、homo-
 geneous homomorphism ψ_R があれば、多項式 $\pi_R(X)$ が存在
 して $\pi_R(n) = \dim R_n$ が十分大きな n について成立する。

定理 2.3 b) の証明のために次の定理が必要

定理 2.5 定理 2.4 の ψ_R の $\ker$ を I で表わす。 P を I の

isolate ideal とし、動かしたとき、 $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_t]/P$ の最大の transcendence degree over $\mathbb{C}$ は $(\deg \pi_R) + 1$ である。
(証明略. [4] 参照). この定理は実際には次の形で使う. [2] に於ける系を一般的な形で述べておく.

定理 2.5 系 $\deg \pi_R + 1 = t$ とおく. $\varphi_R(X_1), \dots, \varphi_R(X_t)$ のうち t 個の元の組がある, t (これを簡単のために $\varphi_R(X_1), \dots, \varphi_R(X_t)$ とする) 任意の n に対してそれ等の n 次の単項式が R_n で一次独立である. かつ $t+1$ 個からなるこの様な組はない. (言い換えると $\varphi_R(X_1), \dots, \varphi_R(X_t)$ のうち代数的に独立な極大な組は t 個の元からなる). (定理 2.5 $\Rightarrow$ 定理 2.5 系の証) P を I に属する isolated prime ideal とし $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_t]/P$ の $\mathbb{C}$ 上の transcendence degree が t のものとする. $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_t]/P = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]$. (Y_i は X_i の P residue) $\ker \varphi_R = I \subset P$ ゆえ R から $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]$ 上への自然な homogeneous homomorphism φ' が存在して $\varphi'(\varphi_R(X_i)) = Y_i$ ($i=1, \dots, t$) $Y_1, \dots, Y_t$ を $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_t]$ の $\mathbb{C}$ 上での transcendence basis としよ. 今、ある n に対して一次従属関係 $\sum_{i=1}^t \beta_i \varphi_R(X_1)^{2i_1} \dots \varphi_R(X_t)^{2i_t} = 0$ ($\exists \beta_i \neq 0$) があれば、 φ' を両辺に施して $\sum \beta_i Y_1^{2i_1} \dots Y_t^{2i_t} = 0$ これは矛盾. 又 $t+1$ 個以上の元からなるその様な組があればそれ等の n 次単項式は mtC_n 個以上あるから十分大きな n に対して $\pi_R(n) = \dim R_n \geq n + t C_n$. 両辺の n に関する次数はそれぞれ $t-1$, t だから矛盾. (証明終り)

定理 2.3 b の証明) $(\deg \pi) + 1 = s$ とおく. まず $\dim_0 V \geq s$ を示す. $\mathcal{I}$ を C1) に於ける $\mathcal{I}_n(0)$ に属す函数の germ から生成される $\mathcal{I}$ の ideal とする. ある coordinate system に關して $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_s = \{0\}$ になる事を示せばよい. (ここに $\mathcal{I}_s$ は '最初の s 変数のみの函数' の germ からなる $\mathcal{I}$ の subring. 詳しくは [3] 参照.) 実際には $\mathcal{I} = \{ \sum \beta_i z^{(i)} \in \mathcal{I} ; \sum_{i \leq n} \beta_i w^{(i)} \in (B_{\mathcal{I}}^{m+1})^- \forall n \}$ とおくと $\mathcal{I} = \bigcap_n \mathcal{I}_n$ かつ $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I}_n$ は定理 1.2 の証明にある) は明らかだが, これについて $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_s = \{0\}$ が示される. $\therefore$ 定理 2.1 と定理 2.5 系により $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_s)$ の n 次の monomial が各 n に対して一次独立と考える. $\pi = \sum \beta_i z^{(i)} \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}_s$ とする. このとき (i) か (ii) $\dots \dots \dots i_s, 0, \dots, 0$ の type でなければ $\beta_i = 0$ である. まず $\sum_{|i|=1} \beta_i w^{(i)} \in (B_{\mathcal{I}}^2)^-$ だから $\sum_{|i|=1} \beta_i \varphi(x_1)^{i_1} \dots \varphi(x_s)^{i_s} = 0$ より $\beta_i = 0$ if $|i|=1$. 順次 $|i|$ に關する帰納法で任意の (i) に対して $\beta_i = 0$ がわかる. $\dim_0 V \leq s$ を示すにはさらに次のような準備が必要になる.

$\mathcal{I}$ の素 ideal $\mathcal{P}$ に対して $\mathcal{I}/\mathcal{P}$ を考え, $\pi \in \mathcal{I}$ の $\mathcal{P}$ residue を $\tilde{\pi}$ で表わし, $\mathcal{I}/\mathcal{P}$ の極大 ideal を $M_{\mathcal{P}}$ と書くことにする. $M_{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{I}$ の極大 ideal M の自然準同型による像である. $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B_{\mathcal{I}}^n / (B_{\mathcal{I}}^{m+1})^-)$ を構成するのと同じように, graded algebra $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathcal{P}}^n / M_{\mathcal{P}}^{m+1}$ が考えられ, 又 degree 0 の homogeneous homomorphism $\varphi_{\mathcal{P}}: \mathbb{C}[X_1 \dots X_r] \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathcal{P}}^n / M_{\mathcal{P}}^{m+1}$ で natural (従って $\varphi_{\mathcal{P}}(x_i) = \tilde{x}_i + M_{\mathcal{P}}^2 \in M_{\mathcal{P}} / M_{\mathcal{P}}^2$) なものが得られる. そこで定理 2.4 を適用して得られる多項式を $\pi_{\mathcal{P}}$

と以下では表わす. 従って十分大きな n に対し $\pi_{\mathcal{A}} = \dim M_{\mathcal{A}}^n / M_{\mathcal{A}}^{n+1}$.

命題 2.1 $\dim \mathcal{A} = (\deg \pi_{\mathcal{A}}) + 1$ ($\forall \mathcal{A}$ 素 ideal in $\mathcal{O}$). (証明)

$\dim \mathcal{A} = t'$, $(\deg \pi_{\mathcal{A}}) + 1 = t$ とおく. i) $t' \geq t$ を示す. 定理 2.5 系により必要なら $X_1, \dots, X_t, Z_1, \dots, Z_t$ の番号を付けなおして, $\forall n$ に対し $\varphi_{\mathcal{A}}(X_1), \dots, \varphi_{\mathcal{A}}(X_t)$ の n 次単項式が一次独立と考えるよい. これより $t\mathcal{O} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ がわかり, $t' = \dim \mathcal{A} \geq t$. ii) $t' \leq t$ を示す. まず $t' = 1$ のとき $\mathcal{A} \cap \mathcal{O} = \{0\}$ と考えるよい. $M_{\mathcal{A}}^n \neq M_{\mathcal{A}}^{n+1} (\forall n)$ を示せば $\pi_{\mathcal{A}}(n) \neq 0$ となり $\deg \pi_{\mathcal{A}} (= t) \geq 0$ がわかる. 今 $M_{\mathcal{A}}^n = M_{\mathcal{A}}^{n+1} (\exists n)$ とすると $Z_1^n \in \bigcap_{j=1}^{\infty} (\mathcal{A} + M_{\mathcal{A}}^j)$. よって $\exists f_j \in \mathcal{A} (\forall j)$ s.t. $f_j - Z_1^n$ has total order at least j . 故に $f_j \rightarrow Z_1^n$ simple convergence. [6] の定理 6.3.5 により $Z_1^n \in \mathcal{A}$. これは $\mathcal{A} \cap \mathcal{O} = \{0\}$ に反する.

$t' \geq 2$ の場合. 定理 2.5 系より $\forall j \leq t$ に対し $\varphi_{\mathcal{A}}(X_1), \dots, \varphi_{\mathcal{A}}(X_t), \varphi_{\mathcal{A}}(Z_j)$ は代数的に従属, かつ $\varphi_{\mathcal{A}}(X_1), \dots, \varphi_{\mathcal{A}}(X_t)$ は代数的に独立とよい. $Z_t \in \mathcal{A}$ なら $\varphi_{\mathcal{A}}(Z_t) = 0$ で矛盾. よって $Z_t \notin \mathcal{A}$. 今 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \mathcal{O}Z_t$ のある同伴素 ideal $\mathcal{A}'$ に対し $\dim \mathcal{A}' = t' - 1$. [(6) FR. III C 14]. このとき $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ より $\ker \varphi_{\mathcal{A}} \subseteq \ker \varphi_{\mathcal{A}'}$ となり, $\sum_{i=0}^{\infty} \oplus M_{\mathcal{A}}^i / M_{\mathcal{A}}^{i+1}$ から $\sum_{i=0}^{\infty} \oplus M_{\mathcal{A}'}^i / M_{\mathcal{A}'}^{i+1}$ の上への準同型 η が自然に決まり, $\eta \varphi_{\mathcal{A}}(X_i) = \varphi_{\mathcal{A}'}(X_i)$ ($i=1, \dots, t$). また $Z_t \in \mathcal{A}$ より $\varphi_{\mathcal{A}'}(Z_t) = 0$.

ゆえに $\forall j$ に対し $\varphi_{\mathcal{A}}(X_1), \dots, \varphi_{\mathcal{A}}(X_{t-1}), \varphi_{\mathcal{A}}(Z_j)$ は代数的に従属. ゆえに定

理 2.5 系により $(\deg \pi_{\mathcal{A}'}) + 1 \leq t - 1$. t' に関する帰納法の仮定に

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_t] & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{A}}} & \sum \oplus M_{\mathcal{A}}^i / M_{\mathcal{A}}^{i+1} \\ & \searrow \varphi_{\mathcal{A}'} & \downarrow \exists \eta \\ & & \sum \oplus M_{\mathcal{A}'}^i / M_{\mathcal{A}'}^{i+1} \end{array}$$

より、 $\dim \mathcal{D}' = \deg \pi_{\mathcal{D}'} + 1$ より、 $t' - 1 \leq t - 1$. $\therefore t' \leq t$.

定理 2.3 の証明の続き. $\dim_0 V \leq S$ を示す. $\mathcal{I}$ の同伴素 ideal $\mathcal{D}$ として $\dim \mathcal{D} = \dim_0 V$ となるものを考える. 命題 2.1 により $\dim V = (\deg \pi_{\mathcal{D}}) + 1$. $\therefore$ "degree 0 の homogeneous homomorphism $\theta: \sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B_{\mathcal{D}}^n / B_{\mathcal{D}}^{n+1}) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathcal{D}}^n / M_{\mathcal{D}}^{n+1}$ (onto) が存在すれば、十分大きな n について $\pi_{\mathcal{D}}(n) = \dim(M_{\mathcal{D}}^n / M_{\mathcal{D}}^{n+1}) - 1 \leq \dim(B_{\mathcal{D}}^n / B_{\mathcal{D}}^{n+1}) - 1 = \pi(n) - 1$ から $\dim \mathcal{D} = (\deg \pi_{\mathcal{D}}) + 1 \leq (\deg \pi) + 1$. $\therefore \dim_0 V \leq (\deg \pi) + 1 = S$.

以下 θ の構成について、 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ に注意すると、homomorphism $\wedge: B \rightarrow {}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}/\mathcal{D}$ を $\wedge(b) = \tilde{f}$ ($f \in \Psi_M(b)$) により定義出来て、 $\wedge(B_{\mathcal{D}}^n) \subseteq M_{\mathcal{D}}^n$ が成立する. $\wedge(B_{\mathcal{D}}^n) \subseteq M_{\mathcal{D}}^n$ が示されるのは、 $\theta_n: (B_{\mathcal{D}}^n / B_{\mathcal{D}}^{n+1}) \rightarrow M_{\mathcal{D}}^n / M_{\mathcal{D}}^{n+1}$ linear map ($\forall n$) が構成出来て、これより θ が導かれる. onto は $\wedge(w_i) = z_i + \mathcal{D}$ から θ_n が onto になるからわかる.

$\wedge(B_{\mathcal{D}}^n) \subseteq M_{\mathcal{D}}^n$ の証明. 明らかに $\wedge(B_{\mathcal{D}}^n) \subseteq M_{\mathcal{D}}^n$ だから、 $\wedge(B_{\mathcal{D}}^n) \not\subseteq M_{\mathcal{D}}^n$ なら ${}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}/\mathcal{D}$ 上の線型汎函数 t として $t|_{M_{\mathcal{D}}^n} = 0$ かつ $\exists \tilde{f} \in \wedge(B_{\mathcal{D}}^n) \setminus M_{\mathcal{D}}^n$ に対して $t(\tilde{f}) = 1$ となるものがある. ${}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}$ 上の線型汎函数 τ を $\tau(g) = t(\tilde{g})$ ($\forall g \in {}_{\mathcal{I}}\mathcal{O}$) により定義する. 列 $\{b_j\} \subseteq (B_{\mathcal{D}}^n)^-$ で $b_j \rightarrow b$ in B かつ $\wedge(b) = \tilde{f}$ となるものがある. $f_j \in \Psi_M(b_j)$ ($j=1, 2, \dots$) をとると $\tau(\tilde{f}_j) = t(\tilde{f}_j) = 0$ ($\because \tilde{f}_j = \wedge(b_j) \in M_{\mathcal{D}}^n$), $\|f_j - f\|_V \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|b_j - b\| \rightarrow 0$. [3] Cor V B 4 により $\mathbb{C}^k \ni 0$ のある近傍 W が存在して各 $h \in \mathcal{O}[V]$ に対して $H \in \mathcal{O}[W]$ が存在して $\|H\|_W \leq K \|h\|$ かつ $H|_{V \cap W} = h|_{V \cap W}$. 今 $(f_j - f)|_V$ $j=1, 2, \dots$ に対して F_j をその様にとれば

$\|F_j\|_W \leq K \|f_j - f\| \rightarrow 0$. $\forall g \in M^n$ (M は $\mathcal{H}$ の極大 ideal) に対し
 $\tau \tilde{g} \in M_{\mathcal{H}}^n$ だから $\tau g = 0$. これより τ は高々 order $n-1$ の partial
 derivatives の一次結合であることがわかる. $\therefore \|F_j\|_W \rightarrow 0$ より,
 $\tau(\tilde{F}_j) \rightarrow 0$. 一方 $(F_j - (f_j - f))|_{V \cap W} = 0$ より $\tilde{F}_j - (\tilde{f}_j - \tilde{f}) \in \text{ideal}$
 of $V \subseteq \mathcal{H}$ $\therefore \tau(\tilde{F}_j) = t(\tilde{F}_j) = t(\tilde{f}_j - \tilde{f}) = t(\tilde{f}) = 1$. 矛盾.

§ 3 応用, 'nontrivialness' など.

定理 3.1. $\dim(B\phi/B\phi^2) < \infty$ なら i) analytic variety (V, Φ^*)
 at ϕ が存在して, $\Phi^*(V)$ は ϕ の norm 近傍になる. ii) V が non-
 trivial (ie $\Phi^*(V) \neq \{\phi\}$ 又は $V \neq \{0\}$) である必要十分条件は,
 $(B\phi)^- \neq (B\phi^{n+1})^-$ ($n=1, 2, \dots$)

定理 3.2. $B\phi$ が有限生成なら i) analytic variety (V, Φ^*)
 at ϕ が存在して, $\Phi^*(V)$ は ϕ の Gelfand 近傍になる. ii) V が
 nontrivial である必要十分条件は $(B\phi)^- \neq (B\phi^{n+1})^-$ ($n=1, 2, \dots$).

定理 3.1 i) は Browder [9] の結果で, T. Read [2] には ii) をも含
 めた証明が tensor 積を使, てなされているが長いので省く.
 定理 3.2 の i) は Gleason [7] で定理 3.1 i) 以前に知られている.
 またその簡易化された証明は [8] などにも見られる. ここで
 は定理 3.2 ii) をも含めた証明を, Read の定理 3.1 の証明の考
 え方になら, てしるみる.

定理 3.2 の証明. $B\phi = \sum_{i=1}^L Bw_i$ ($\exists w_1, \dots, w_L$) とすると, 線型写

像 $B \oplus \cdots \oplus B \rightarrow B\phi$ $b_1 \oplus \cdots \oplus b_r \mapsto \sum_{i=1}^r b_i w_i$ が有界で onto だから、

$\exists K > 0$ s.t. $\forall b \in B \exists b_1, \dots, b_r$ with $b \cdot \widehat{b}(\phi) = \sum_{i=1}^r b_i w_i$ & $\|b_i\| \leq K \|b\|$ ($i=1, \dots, r$). よ、帰納法で次の事がわかる: $\forall b \in B$

$\exists \{b_{ni}\} \subseteq B$ s.t. $b = \sum_{i=1}^n \widehat{b_{ni}}(\phi) + \sum_{i=n+1}^{\infty} (b_{ni} - \widehat{b_{ni}}(\phi)) w_i$ ($\forall n$) — (*)

かつ $\|b_{ni}\| \leq (rK)^{n-1} \|b\|$ — (**). $n=1$ に於ける (*) により $w_i + (B\phi)^{\perp}$

$i=1, 2, \dots$ が $B\phi / (B\phi)^{\perp}$ を張ることかわかる. $M=rK$ とおき $\forall b$

に対して上の $\{b_{ni}\}$ をとり $f_b(z) = \sum \widehat{b_{ni}}(\phi) z^{w_i}$ とおくと (**) により

$|\widehat{b_{ni}}(\phi)| \leq M^{n-1} \|b\|$, これと (*) により容易に $f_b(z) \in \mathcal{F}_M(b)$ かわかる.

$\sigma(\varphi) = (\widehat{w_1}(\varphi), \dots, \widehat{w_r}(\varphi))$ ($\varphi \in \Sigma B$) とおくと $N = \sigma^{-1}(\Delta(M^{-1}))$ は ϕ の gel-

fand 近傍. $I = \{f_b f_a - f_{ba}, \alpha f_a + \beta f_b - f_{\alpha a + \beta b}; a, b \in B, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$

とおくと補題 1.1 より $I \subseteq \mathcal{F}(0)$ だから $V' = \bigcup_{g \in I} \{z \in \Delta(M^{-1}); g(z) = 0\}$

$\forall g \in I \} \supseteq V$ (V は定理 1.1 の variety で $V = \{z \in \Delta(M^{-1}); g(z) = 0$

$\forall g \in \mathcal{F}_M(0)\}$). $\Phi'; b \mapsto f_b|_{V'}$ は明らかに準同型だから命題 1.

1 により (V', Φ'^*) は analytic variety at ϕ になる. 又 $\Phi'^*|_V =$

Φ^* . 定理 1.4 により V は極大だから (必要なら M を大きくとり

なおいて) 結局 V' と一致する. あとは $N \subseteq \Phi^*(V)$ を言えばよい

. *) **) より $\forall \varphi \in N \forall b \in B$ に対して $\widehat{b}(\varphi) = f_b(\sigma\varphi)$ かわかる

. これより $\forall \varphi \in N$ に対して $\sigma(\varphi) \in V'$ ('' 例えは "($f_b f_a - f_{ba}$)("

$\sigma\varphi) = f_a(\sigma\varphi) f_b(\sigma\varphi) - f_{ab}(\sigma\varphi) = \widehat{a}(\varphi) \widehat{b}(\varphi) - (ab)(\varphi) = 0$ e.t.c.) $\therefore \sigma(N)$

$\subset V' = V$. $f_b \in \mathcal{F}_M(b)$ だから $f_b|_V = \Phi(b)$. 故に $\forall \varphi \in N$ に対して

$(\Phi^*(\sigma\varphi))(b) = f_b(\sigma\varphi) = \widehat{b}(\sigma\varphi) = \widehat{b}(\varphi)$ ($\forall b \in B$) 即ち $\Phi^*(\sigma\varphi) = \varphi$ ($\forall \varphi$

$\in N$) $\therefore N \subseteq \Phi^*(V)$ (証明終り)

T. Read [2] 以前にも、analytic structure が nontrivial であることと、maximal ideal の中との関係は Sidney [10], Crownover [11] 等で調べられていた。例えば、 A を uniform algebra. $\check{S}(A)$ をその Šilov 境界とすると、 $\check{S}(A)$ 上の表現測度が unique な $\varphi \in \Sigma A$ に対して P_φ で φ の属する part を表わせば次が成立する。i) $P_\varphi = \{\varphi\}$ 又は ii) 単位円盤 D ($\subset \mathbb{C}$) から P_φ (ここには $\|\cdot\|$ -topology を入れる) 上への同相写像 h があり $h(0) = \varphi$ かつ各 $f \in A$ に対して $\hat{f} \circ h$ は D 上で正則になる。これについて Sidney は [10] で次の結果を示している。

定理 3.3. $\{P_\varphi\} \neq \{\varphi\} \Leftrightarrow A_\varphi \neq (A_\varphi^2) \Leftrightarrow (A_\varphi^n)^- \neq (A_\varphi^{n+1})^- (\forall n)$.

文献

- (1) 鶴見 and 神保, Analytic structure について, 教理科学講究録 148 Function algebra, 教理科学刊行会, 1972.
- (2) T.T.Read, Powers of a maximal ideal in a Banach algebra and analytic structure, T.A.M.S. 161, Nov.(1971), 235-248.
- (3) R.C.Gunning and H.Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- (4) O.Zariski and P.Samuel, Commutative algebra. Vol.2, University Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.

- (5) S.T.Sidney, Properties of the sequence of closed powers of a sup-norm algebra, T.A.M.S. 131 (1968), 128-148.
- (6) L.Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
- (7) A.M.Gleason, Finitely generated ideals in Banach algebras, J.Math. mech. 13 (1964), 125-132.
- (8) A.Browder, Introduction to function algebras, W.A.Benjamin, 1969.
- (9) A.Browder, Point derivations and analytic structure in the spectrum of a Banach algebra, J.Functional Analysis 7 (1971), 156-164.
- (10) S.J.Sidney, Point derivations in a certain sup-norm algebras, T.A.M.S. 131, (1968), 119-148.
- (11) R.M.Crownover, One dimensional point derivation spaces in Banach algebras, Studia Math. 35 (1970), 249-259.