

セミマルコフモデルによるリアプノフ指数分布の解析

早大理工 菊地康裕

1次元マップやハミルトン系でみられる $1/f$ スペクトル現象は、これらのカオスがベキ的滞在時間分布をもつようなセミマルコフ過程へモデル化できるということで説明される。ここでは同様な立場から、リアプノフ指数の観測に関してセミマルコフ過程によるモデルを考えることにより、その分布に対する解析を行う。

セミマルコフモデル

A と B という2つの状態の間を、確率的に与えられる時間だけ滞在しながら行ったり来たりするような状況を考える。A で0, B で1の値をとる過程を $\lambda(t)$ であらわす。 $\lambda(t)$ のような過程はセミマルコフ過程と呼ばれるクラスに属している。以後このモデルをセミマルコフモデルとすることにしよう。有限の観測時間 N による $\lambda(t)$ の時間平均

$$\Lambda_N = \frac{1}{N} \int_0^N \lambda(t) dt$$

という変数に興味がある。 Λ_N の分布が $N \rightarrow \infty$ でどのように、そしてどんな分布に近づくかということを問題にする。

各状態における滞在時間 T_A と T_B の分布を F_A および F_B であらわす。

$$\text{prob}\{T_A \leq t\} = F_A(t), \quad \text{prob}\{T_B \leq t\} = F_B(t)$$

さらに、 $F_A(t)$ と $F_B(t)$ の末尾部が $t \rightarrow \infty$ においてそれぞれ $-a$ および $-\infty$ なる指数で正則変動するとしよう。具体的には、例えば以下のような場合である。

$$1 - F_A(t) = t^{-a}, \quad 1 - F_B(t) = e^{-b(t-1)} \quad (t > 1, \quad a, b > 0)$$

このとき、 $T = T_A + T_B$ の分布 $F = F_A * F_B$ (分布 F_A と F_B の畳み込み^[2]) は

$$1 - F(t) \sim t^{-a} L(t), \quad t \rightarrow \infty$$

のような末尾部をもつ。ただし、 L は緩慢変動関数である。

更新過程と変数 Λ'_N

$F = F_A * F_B$ を更新時間分布とする更新過程 S_n を考えよう。

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

ここに $T_2, \dots, T_n$ は F に, T_1 は F_1 にそれぞれ従う独立な非負の変数である. F_1 は初期更新時間 T_1 の分布であり, 実際の観測が更新時間の途中から始まるという事情から, F とは異なる任意の分布を仮定しておく. 時間 N の間の更新回数をあらわす変数を R_N としよう.

$$S_{R_N} \leq N < S_{R_N+1}$$

R_N が r 以上である確率は

$$\text{prob}\{R_N \geq r\} = F_1 * F^{r-1}(N)$$

となる. ただし, F^{n*} は F の n 回連続畳み込み関数を意味する.

ここで先の変数 Λ_N の代わりとして次のような変数

$$\Lambda'_N := \frac{\mu_B R_N}{N}$$

を導入する. μ_B は F_B の期待値である. $a < 2$ のときには F_A に比べて F_B のゆらぎが相対的に無視できるので, おおきな N でゆらぎまで含めて $\Lambda_N \sim \Lambda'_N$ とみなせるだろう.

詳細は省いて結果だけを述べよう. $a < 2$ における Λ'_N の分布密度 $p(N; \lambda)$ は $N \rightarrow \infty$ で以下のようになる.

$$p(N; \lambda) \rightarrow \begin{cases} k_a(\nu_{a,N}(\lambda - \lambda_0)) \nu_{a,N} & (2 > a > 1) \\ A_a \delta(\lambda) + (1 - A_a) \frac{1}{a} k_{1/a}(\nu_{1/a,N} \lambda) \nu_{1/a,N} & (1 > a > 1/2) \\ \frac{1}{2} \delta(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\nu_{2,N} \lambda)^2\right) \nu_{2,N} & (a = 1/2) \\ A_a \delta(\lambda) + (1 - A_a) h_a(\nu_{1/a,N} \lambda) \nu_{1/a,N} & (1/2 > a > 0) \end{cases}$$

ここに

$$\nu_{a,N} \sim N^{1-1/a} L_\nu(N), \quad N \rightarrow \infty$$

$$A_a = \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_1^\infty \frac{dz}{z^a(z+1)}$$

$$\lambda_0 = \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B}$$

である (L_ν は緩慢変動関数). また $k_\alpha(x)$ は特性関数

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\zeta x} k_\alpha(x) dx = \exp\left(-|\zeta|^\alpha \left(1 \pm \tan \frac{\alpha}{2} \pi\right)\right) \quad (+: \zeta > 0, -: \zeta < 0)$$

をもつ指数 α の安定分布密度で, $h_\alpha(x)$ はラプラス変換

$$\int_0^\infty e^{-sx} h_\alpha(x) dx = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-s)^j}{\Gamma(1+j\alpha)} \quad (s \geq 0)$$

をもつ $x > 0$ で定義された片側分布密度である. $1 > \alpha > 1/2$ のときにはこれらの関数の間には

$$h_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} k_{1/\alpha}(x)$$

なる関係がある.

この結果から、 Λ'_N は $2 > a > 1$ では λ_0 に、 $1 > a > 0$ では 0 にそれぞれ確率収束することがいえる。 $2 > a > 1$ および $1 > a > 1/2$ のときに $\nu_{a,N}$ および $\nu_{1/a,N}$ の指数が $1/2$ より小さくなることは、このときの収束が中心極限定理の収束よりも遅いことを示している。特に、 a が 1 に近い時には著しく収束性が悪くなる。

リアプノフ指数の分布

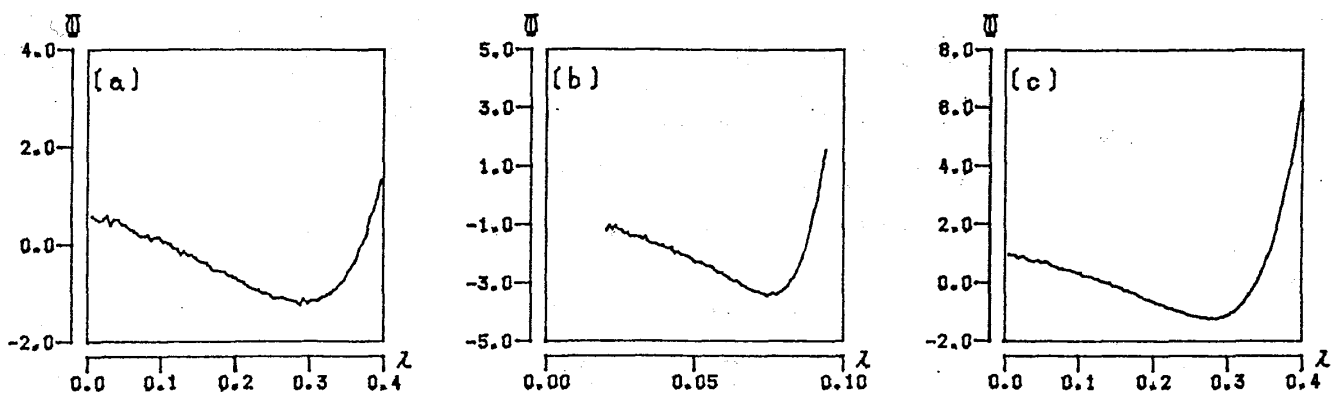
変形ベルヌーイマップ

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} x_n + 2^{B-1}(1-2\epsilon)x_n^B + \epsilon & (0 \leq x_n \leq 1/2) \\ x_n - 2^{B-1}(1-2\epsilon)(1-x_n)^B - \epsilon & (1/2 \leq x_n \leq 1) \end{cases}$$

およびスタンダードマップ

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$

のリアプノフ指数分布の $\Psi^{[3]}$ を示したのが図 a, b である。



(a) 変形ベルヌーイマップ ($B = 2.0, \epsilon = 1.0 \times 10^{-14}$) と (b) スタンダードマップ ($K = 0.5$) のリアプノフ指数、および (c) セミマルコフモデル ($a = 1.0$) の Λ_N の分布における Ψ のグラフ。ただし、 $N = 10000$ である。

これらの形を見てみると、セミマルコフモデルにおける Λ_N のもの (図 c) とよく似ていることがわかる。以下このことについて考えてみよう。

変形ベルヌーイマップの時間 N で計ったリアプノフ指数は、以下のようにあらわされる。

$$\Lambda_N^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{(m)}(n), \quad \lambda^{(m)}(n) = \log f'(x_n)$$

いま $0 < \epsilon \ll 1$ なる ϵ に対して、 $\lambda^{(m)}(n)$ が $\leq \epsilon$ となり続ける時間 T_A 、および $> \epsilon$ となり続ける時間 T_B の分布をそれぞれ F_A, F_B とする。 F_A は軌道が 0 および 1 の付近に滞在し続ける時間の分布に等しく、その末尾部はべき型で、その指数は $-1/(B-1)$ であることが知られている^[4]。また F_B の末尾部は通常のベルヌーイマップと同様指数型となるので、先に述べたセミマルコフモデルにおける状況と類似していることがわかる。

次にスタンダードマップについて考えよう。時間 N で計ったリアプノフ指数は

$$\Lambda_N^{(s)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{(s)}(n), \quad \lambda^{(s)}(n) = \log \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|}, \quad v_{n+1} = T_n v_n$$

とあらわされる。ただし T_n は I_n, θ_n におけるマップのヤコビ行列で、 v_0 は初期座標 (I_0, θ_0) における初期接ベクトルである。スタンダードマップの相空間には小さな島 KAM トーラスが無限階層的に分布しており、カオス軌道がこの近くにきたときには $\lambda^{(s)}(n)$ は小さな値をとり続ける。このような状態が続く時間の分布 F_A の末尾部はべき型をしているという結果がある^[5]。それに対して $\lambda^{(s)}(n)$ が大きな値をとるのは軌道が周期の小さな双曲型周期点の近くにきたときであり、そのような状態が続く時間の分布 F_B の末尾部は指数型である。この場合にも先のセミマルコフモデルとの類似がみられる。しかしながら、スタンダードマップの場合は変形ベルヌーイマップに比べてはるかに複雑である。というのは、一般に周期の小さな周期点はいくつか異なった系列のものが存在するので、 $\Lambda_N^{(s)}$ の分布としてはそれぞれに対応した分布が重なって観測されるからである。ここでは最も大きなピークのみに注目しており、他のピークが存在しても (実際存在するのだが) それは無視している。

まとめと課題

以上、2つの力学系のリアプノフ指数の観測において、ここで考えたセミマルコフモデルと類似の状況からその分布が決定されているということを見た。ここで考えたセミマルコフモデルはべき型の滞在時間分布をもつ状態を含むので、マルコフ過程の範疇には入らない、ノンマルコフ過程である。このようなノンマルコフ過程は、 $1/f$ スペクトルや相関関数の代数的減衰といったマルコフ過程にはみられない性質をもつことが知られている^[6,7]。それらの性質に対応した現象が、ここでの分布関数にも見られることが期待される。例えば、マルコフ過程では Ψ は観測時間 N に対して

$$\Psi(N; \lambda) \sim N \psi(\lambda), \quad N \rightarrow \infty$$

のようにスケールされることがわかっているが、ノンマルコフ過程にまでこれを適用できるかは不明であり、むしろ実験的にはこれはうまくいかないようである。残念ながらこのことに関する理論的な結果はまだほとんど出ていないので、今後の課題としてあげておきたい。

- [1] W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol.II, John Wiley & Sons, New York (1966).
- [2] $F_A * F_B(t) := \int_0^t F_A(t-\tau) dF_B(\tau)$
- [3] p を分布密度として $p = e^{-\Psi}$ なる Ψ のこと。
- [4] Y.Aizawa, C.Murakami and T.Kohyama, *Prog.Theor.Phys.Suppl.* 79 (1984), 96.
- [5] D.Meiss and E.Ott, *Phys.Rev.Lett.* 55 (1985), 2741.
- [6] I.Procaccia and H.Schuster, *Phys.Rev.A* 28 (1983), 1210.
- [7] Y.Aizawa, *Prog.Theor.Phys.* 72 (1984), 659.