

Monge-Ampère方程式のCauchy問題

岩崎敷久 京大数理解

§ 序. 最近の偏微分方程式の結果を使ってMonge-Ampère方程式の局所解(C^∞ 解)の存在を考えてみる。最近といってもこの20年以内くらいという意味である。楕円型, 狭あるいは対称双曲型といった, よく知られた型に次ぐものがいくつか見られる。その中では条件のわかりやすいものをMonge-Ampère方程式にあてはめてみる。主に双曲型方程式のCauchy問題を考えることにする。中村-前田氏の話と合せると3つ程取り扱うことになる。

古くはMonge-Ampère方程式とは $\mathbb{R}^2$ 上で

$$\Phi = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - f(x, y) = 0$$

のことを呼ぶようである。この線型化方程式は

$$D\Phi \varphi = (u_{yy}\partial_x^2 - 2u_{xy}\partial_x\partial_y + u_{xx}\partial_y^2)\varphi = g$$

となる。この線型化方程式 $D\Phi$ の微分方程式としての型でも

って Φ の解 u における型を定める。(1) $f > 0$ なら、 $\Phi = 0$

の解 u に対しては $\det \begin{pmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & u_{xx} \end{pmatrix}$ も又正より固有値は0

でなくしかも同符号。したがって $D\Phi$ より Φ は楕円型となる。

たとえば $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ とすると, $f = 1$, $D\Phi = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 。

(2) 更に $f < 0$ なる固有値は異符号となり Φ は狭双曲型。

$u = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$ とすると $f = -1$, $D\Phi = \partial_x^2 - \partial_y^2$ 。次に $f = 0$ となるが simple 即ち $\partial f \neq 0$ at $f = 0$ とする。この時 $D\Phi$ が kovarevskian だとすると典型的には (3) Tricomi 型と (4) Euler-Darboux 型の 2つに分かれる。(3) の例として、
 $u = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3$, $f = x$, $D\Phi = \partial_x^2 + x\partial_y^2$ 。(4) の例として
 は、 $u = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}x^2)^2$, $f = y + \frac{x^2}{2}$, $D\Phi = (\partial_x - x\partial_y)^2 + (y + \frac{x^2}{2})\partial_y^2$ 。
 これらの特徴は、(3) は $\partial_x f \neq 0$ (4) は $(\partial_x - x\partial_y)f = 0$ となることである。これらに続くものは、 f の critical points の $f = \partial f = 0$ での方程式である。 $\partial^2 f \neq 0$ とすると $\partial^2 f$ の固有値の正負によって、やはり方程式の型が分かれる。例に

よって考えると、(5) $u = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}x^4$ とすると
 $f = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)^2$, $D\Phi = (1 + x^2 + y^2)\partial_x^2 - 4xy\partial_x\partial_y + (x^2 + y^2)\partial_y^2$ 。 $D\Phi$ の symbol $D\Phi(5)$ は $D\Phi(5) \geq 0$ 。

(6) $u = \frac{1}{2}y^2 - (\frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}x^4)$, $f = -(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)^2$
 $D\Phi = (1 - x^2 - y^2)\partial_x^2 + 4xy\partial_x\partial_y - (x^2 + y^2)\partial_y^2$ $\therefore x = y = 0$ の近くで双曲型。(7) $u = \frac{1}{2}y^2 \pm (\frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}x^4)$,
 $f = \pm (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$, $D\Phi = (1 \pm (y^2 - x^2))\partial_x^2 \mp 4xy\partial_x\partial_y \pm (x^2 - y^2)\partial_y^2$ 。

(1) (2) (3) は偏微分方程式の言葉でまとめると Real Principal type となる。これは中村前田で使われる。

(4) の一般型を Fuchs 型の偏微分方程式とよんで最近よく研

示されている。(5)は、退化楕円型と呼び、 Δ_0 に対する
 Laplacianがその代表として現われてくる型である。もっと
 簡単なものとしては、 $u = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}x^4$, $f = x^2$, $D\Phi = \Delta_x^2 + x^2\Delta_y^2$ 。
 (6)は双曲方程式の中で特に実効的雙曲型とよばれるもので
 ある。典型は $u = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}x^4$, $f = -x^2$, $D\Phi = \partial_x^2 - x\partial_y^2$ である。
 この(5)(6)の型がここに取りあうものである。(7)は
 (3)(4)のように場所により型の変るものである。線型方程
 式の中で簡単なものを考えれば $\Delta_x^2 \pm (\alpha^2 - y^2)\Delta_y^2$ となる。
 この型の方程式については、どんな結果があるか、よくし
 べてないので知らない。 $z = u(\alpha, y)$ とおいた曲面を考えると
 (1)~(4), (7) はそれぞれ曲面の形においてもその特徴が
 あらわれている。しかし(5)は(1)の(6)は(2)の曲面の少
 しびしゃげた形でしかない。実際に解を作る場合も楕円型及
 び狭双曲型での構成法を少し一般化するだけで済む。

§ 1. 方程式と結果 real Monge-Ampère (型) 方程式とは、 Φ は次の形をした 2 階の非線型方程式のことであると理解しておく。問題は局所的であるから $\mathbb{R}^{n+1}$ 上で考える。

$$(1.1) \quad \Phi(u) = \det A - f = 0$$

但し,

$$A = \gamma^2 u + C(\alpha, u, \partial u),$$

$$f = f(\alpha, u, \partial u),$$

($C(\alpha, u, v)$, $f(\alpha, u, v)$) は $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ の関数で, C は $(n+1) \times (n+1)$ 実対称行列, f は実数値である。

まず Cauchy 問題を考える。方程式の形から初期面 $x_0 = 0$ と仮定 (一般性を失うわけではない。2 階の方程式であるから初期条件は

$$(1.2) \quad (u, \partial u)|_{x_0=0} = (g_0, g_1).$$

条件を述べるときに記号を定める。 A の各成分を a_{ij} ,

$$A_{i,j} = \{a_{kl}\}_{k,l \neq i,j} \text{ を } a_{i,j} \text{ に対する小行列, } A^{\text{co}} = \{a_{i,j}^{\text{co}}\}$$

$$a_{i,j}^{\text{co}} = (-1)^{i+j} \det A_{j,i} \text{ を } A \text{ の Cofactor 行列とする。}$$

このとき, Φ の線型化方程式 $D\Phi$ は

$$D\Phi \varphi = \text{Tr}(A^{\text{co}} \partial^2 \varphi) + \text{Tr}[A^{\text{co}} (\sum_i C_{v_i} \partial_i \varphi + C_u \varphi)] \\ - \sum_i f_{v_i} \partial_i \varphi - f_u \varphi,$$

但し, $C_{v_i} = \partial_{v_i} C$, etc, で与えられる。

仮定. f は常に非正な関数 (負半定値) とする。

$$(1.3) \quad f \leq 0.$$

初期条件 $(u, \partial_0 u)|_{x=0} = (g_0, g_1)$ において

$$(1.4) \quad A_{00} > 0$$

が成立するものとする。

$A_{00} > 0$ より $\det A_{00} \neq 0$ 。

$$\Phi(u) = (\det A_{00}) \partial_0^2 u + \dots$$

となつてゐるから、 $\Phi(u) = 0$ は

$$\partial_0^2 u = \dots$$

と書きかえられる。(Kowalevskian, 右辺は $\partial_0^2 u$ をふくまない。D Φ も同様。) 初期面 $\{x_0=0\}$ では右辺は初期条件によつて決定される。 $\partial_0^2 u$ を右辺で与え、以下順次 $\partial_0^s u$ ($s \geq 2$) が $\{x_0=0\}$ 上で定まる。これより

$$\Phi(\tilde{u}) \text{ flat at } \{x_0=0\} \quad (\partial^\alpha (\Phi(\tilde{u}))|_{x_0=0} = 0, \forall \alpha)$$

なる $\tilde{u} \in C^\infty$ が作れる。(Cauchy 問題の形式解)

この $\tilde{u}$ を使って、次の条件を設定する。

仮定. $x=0$ において $f(x, \tilde{u}, \partial \tilde{u}) = 0$ なら、 $x=0$ で

$$(1.5) \quad L^2 f(x, \tilde{u}, \partial \tilde{u}) \neq 0,$$

$$\text{但し} \quad L = \sum_{j=0}^{\infty} a_{0j}^{(0)}(x, \tilde{u}, \partial \tilde{u}, \partial^2 \tilde{u}) \partial_j.$$

この条件は, $\tilde{u}$ のとり方によらない。実際に, $\partial^2 \tilde{u}$ を $\tilde{u}(\tilde{u})=0$ かつ $x_0=0$ により決めれば, 初期条件 (g_0, g_1) に対する条件である。 $\tilde{u}$ の 2 階微分までしか陽に現われない。

定理 1. f は (1.3) をみたすとする。初期条件 (g_0, g_1) が (1.4) (1.5) をみたす時, Cauchy 問題 (1.1-2) の C^∞ -解が原点 $x=0$ の近傍で一意的に存在する。

注. $x_0=0$ の原点の近傍 Ω と, 十分大きな m の $C^m(\bar{\Omega})$ を考える。初期条件が定理の $g=(g_0, g_1)$ に, $C^m(\bar{\Omega})$ のノルム $\|\cdot\|_m$ に関し, 十分小さければ, 解の一意的存在領域 $\Omega \ni x=0$ は一様に取りれる。又この範囲で初期条件 $g \in C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow$ 解 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ の写像は連続である。

例, $\det(\nabla_{ij} u) = K(x) h(x, u, \nabla u),$

但し, $\nabla_{ij} = \partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$

$h(0, 0, 0) \neq 0,$

$K \leq 0, K(0)=0, \partial_0^2 K(0) \neq 0$

とする。

$g_0 = \frac{1}{2} \nu |x'|^2, \quad x' = (x_1, \dots, x_m) \quad \nu > 0.$

$g_1 = 0$

とある。

$$A_{00}|_{x_0=0} = (\partial_i \partial_j g_0 - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k g_0 - \Gamma_{ij}^0 g_1)$$

より,

$$A_{00}|_{x=0} = \nu I > 0.$$

その他の $q_{ij}|_{x=0} = 0$. 又 $L = \sum_{j=0}^n q_{0j}^{\text{co}} \partial_j$ は, $x=0$ では $q_{00}^{\text{co}} = n\nu$, 他は 0 より

$$L|_{x=0} = n\nu \partial_0$$

$$L^2 f|_{x=0} = (n\nu)^2 (\partial_0^2 K)(0) \cdot h(0,0,0) \neq 0.$$

一般に f が次の条件をみたしておれば, (1.4) 及び (1.5) が満たされる初期面と初期条件が作れる。

定理 2. $f(x, u, v)$ は $f \leq 0$ であつ 處 $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$ で $f = 0$ となす

$$(1.6) \quad H_f(L, L) \neq 0 \quad \text{in } \mathfrak{E},$$

但し, H_f は $f=0$ なる處 $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$ における f の hessian $\nabla^2 f$ で

$$L = \xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{v} \cdot \xi \frac{\partial}{\partial u} - \langle C\xi, \frac{\partial}{\partial v} \rangle,$$

とする。この時, (1.1) $\Phi(u) = 0$ は, $x = \tilde{x}$ で C^∞ -可解, 即ち, $x = \tilde{x}$ の近傍で (1.1) を満たす C^∞ 解 u が存在する。

又 $(u, \partial u)_{x=\tilde{x}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ で与えられる。

条件 (1.3-4) は未知関数 u を $-u$ とすれば、わかるように、不等式の向きに関して $n+1$ が偶数の時は (1.3) $f \leq 0$ が、 $n+1$ が奇数の時は (1.3) と (1.4) の不等式の向きが逆ということである。このことから、次の $n+1$ が奇数の時は不等式の向きがどちらであっても解の形を問題にしなければ局所可解性が言えたことになる。(f が ≥ 0 のときも ≤ 0 のときも)
 一方、 $f > 0$ の時は方程式を楕円型にすることが可能である。このことを使って局所可解性が示せる。これと同じ方法で、 $n+1$ が偶数 (奇数の時も当然ふくめて) の場合も、

$$(1.7) \quad f \geq 0,$$

と (1.6) との仮定のもとで $\Phi(u) = 0$ の局所可解性が示せる。

(1.6) があると (1.6) の L ($H_f(L,) \neq 0$) が transversal になるような初期値 $S = \{p=0\}$ をとる。 ($Lp \neq 0$) の S を $\chi_0=0$, $\hat{\chi}=0$ と思うと、(1.4) 及び

$$(g_0, g_1, \partial' g_0) |_{\chi=0} = (\tilde{u}, \tilde{v})$$

をみたす初期条件 (g_0, g_1) が作れる。この時 $\Phi(u) = 0$ は Kovalevskian となり形式解 $\tilde{u}$ が作れる。これに対し (1.5) が成立する。ここまでは f の正負は無関係である。一方、 u を $\Phi(u) = 0$ の解で (1.4) を $\chi=0$ でみたすものとする。線型化方程式 $D\Phi$ の主要部は次の形をしている。

$$(1.8) \quad P(\xi) = \langle \theta, \xi \rangle^2 + f(x, u, \partial u) E(\xi),$$

但し, $\theta \neq 0$, $E(\theta) = 0$, $E(\xi) \geq \varepsilon |\xi|^2$ ($\varepsilon > 0$) $\forall \xi \perp \theta$.

したがって, $f \leq 0$ なら P は双曲型になり条件 (1.5) は, $\langle \theta, \eta \rangle^2 f \neq 0$ を意味するから, このとき P は実効的雙曲型とよばれるものになり, Cauchy 問題は低階項の如何にかかわらず解ける。あとは Nash-Moser の陰関数定理を使って非線型方程式 $\Phi = 0$ に対する Cauchy 問題を解く。可解性のみを問題にする (一意性を考えない) なら $D\Phi$ の未知関数 u の変化に対して一様な右逆元の存在が言えればよい。

(1.6) (1.7) が成立するとき Gårding 型の不等式及び楕円型の不等式, その中でも楕円型について強い評価式が (1.8) を標象とする作用素 $P(\partial)$ に対して成立する。

$$\operatorname{Re}(P(\partial)\varphi, \varphi)_0 \geq \delta \|\varphi\|_{1/2} - C_{\delta} \|\varphi\|_0, (\delta > 0)$$

$$\|P(\partial)\varphi\|_s \geq \delta \|\varphi\|_{s+1} - C_{s,\delta} \|\varphi\|_0. (s \geq 0)$$

但し, $\varphi \in C_0^\infty$ (nbd of $x = \tilde{x}$), $\|\cdot\|_s$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上のソボレフノルムで, u の Fourier 変換を $\hat{u}$ とすると

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi.$$

(主). 楕円型するとき ($\delta > 0$ のとき) は右辺は $1/2$ が 1 , $s+1$ が $s+2$ で成立している。

このことから, 楕円型の時と同じく, $\lambda = \tilde{\lambda}$ の十分小正の近傍での, $D\Phi$ に対する Nash-Moser の定理の適用にたえ得る。

右逆作用素の存在を示せ, $\Phi(u) = 0$ の局所解を作れ。

定理.3. $f(x, u, v)$ は (1.7) の $f \geq 0$ であるとす。今, 集 $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$ で $f = 0$ なる (1.6) が成立すると仮定する。この時, (1.1) $\Phi(u) = 0$ は $x = \tilde{x}$ で C^1 -可解である。又, u は $(u, \partial u)|_{x=\tilde{x}}$ が $(\tilde{u}, \tilde{v})$ に十分近いものに取りれる。

§2. 応用例. 簡単な応用例を Spivak の本から引用する。2次元 Riemannian manifold M の $\mathbb{R}^3$ への局所等距離うめをみる。これは g を g の Metric とすると, M 上の関数, u, v, w によって局所的に

$$(2.1) \quad g = du^2 + dv^2 + dw^2$$

とできることを示すことである。Spivak の本によれば, g の一つの方法として, 新たな Metric

$$g - du^2$$

が flat 即ち Gauss 曲率が恒等的に 0 となる u を見つければ $g - du^2$ に対して

$$g - du^2 = dv^2 + dw^2$$

なる局所座標 (v, w) がユークリッド変換をのびいて一意にきまる, これを使って (2.1) を示す方法がある。そして, $g - du^2$ が flat ということ, u が Darboux の方程式, M 上の局所座標 (x_0, x_1) に関し,

$$(2.2) \quad \det(\nabla_{\tilde{e}_j} u) = K(x) \det(g_{\tilde{e}_j} - \nabla_{\tilde{e}_j} u \nabla_{\tilde{e}_j} u),$$

をみたすことと同値である。(但し, K は (M, g) の Gauss 曲率。) したがって Darboux 方程式の解 u を見つけることに問題は帰着される。今 M の点 p の近傍で g の Gauss 曲率 K は半定値 ($K \geq 0$ 又は $K \leq 0$) であるとする。もし $K(p) = 0$ なら, $L^2 K(p) \neq 0$ なる接ベクトル L があると仮定すると,

定理2及び定理3より, p の近傍で Darboux 方程式の C^1 解 u が存在する。よって, このような (M, g) の点 p に関しては p の適当な近傍が $\mathbb{R}^3$ への等距離うめこみ可能となる。

Cauchy 問題を解けるということは, 単に $\Phi(u)=0$ の解が存在するだけでなく, これらの解が初期条件 (初期面上の関数) でパラメトライズされている。うめこまれた曲面のあり種の同値性を示すのに, これが使える。Spirak の本に E. E. Levi の定理として紹介されている。 (M, g) の開集合 U から $\mathbb{R}^3$ への 2 つの等距離うめこみ Φ_0, Φ_1 への像曲面を S_0, S_1 とする。 (S_1 を S_0 の Wamp 曲面と呼ぶ。) さらにパラメータ $t \in [0, 1]$ に連続な U の等距離うめこみ Φ_t があつたとする。 ($\Phi_0 = \Phi_t|_{t=0}, \Phi_1 = \Phi_t|_{t=1}$) このとき S_0 は S_1 と (あるいは S_0 と S_1 は) bendable と呼ぶことにする。今 (M, g) の Gauss 曲率 K は $K \leq 0$ とする。 S_0, S_1 の第 2 基本形式 b_0, b_1 は点 p で, ある接ベクトル T に関して $b_0(T, T), b_1(T, T)$ が共に正 (又は共に負) になるものとする。 $K(p)=0$ のときは $b_0(L_0, L_0) = b_1(L_1, L_1) = 0$ なる $L_0, L_1 \neq 0$ がスカラー倍をのぎいて一意にきまるが, この L_0, L_1 に対して $(L^2 K)(p) \neq 0$ と仮定する。この時, S_0 と S_1 は p の近傍で bendable である。又 $K < 0$ のときは, この結果を 2 回使うと S_0 と $\bar{S}_0$ ($\bar{\Phi}_0 = (u, v, w)$ とすると $\bar{\Phi}_0 = (-u, v, w)$) が局所的に bendable となり, S_0 は

任意の Warp と局所的に bendable (E, E, Levi) となる。

証明は次の様になる。 $\mathbb{R}^3$ の 2-フリッド変換を使って、
 $\overline{\Psi}_0(p) = \overline{\Psi}_1(p)$, $\nabla \overline{\Psi}_0(p) = \nabla \overline{\Psi}_1(p)$ (よって p における S_0 と S_1 の接平面は一致している) としてよい。 $\Psi_t(p) = (u_t, v_t, w_t)$ とおき、 (v_0, w_0) は M の局所座標であるとする。 u_0, u_1 は Darboux 方程式の解であるが、解答には、Darboux 方程式の解 u_t が u_0, u_1 をおさぶきものを作ればよい。 p の近傍上で t に関して連続に動く u_t を作れば、 v_t, w_t は $v_0(p) = v_t(p)$, $w_0(p) = w_t(p)$, $\frac{\partial w_t}{\partial v_0}(p) = 0$, $\frac{\partial v_t}{\partial w_0}(p) > 0$, $\frac{\partial w_t}{\partial w_0}(p) > 0$ 7" v_t, w_t は共通な p の近傍上で一意にきまり t に関して連続に動く。 γ 2で、 p を通る初期曲線 Σ を $K(p) < 0$ のときは p における接線が T をふくむように、 $K(p) = 0$ のときは、 L_0 と L_1 の方向を適当にえらぶと $L_t = (1-t)L_0 + tL_1$ は $L_t^2 K(p) \neq 0$ とできる。 この L_t ($0 \leq t \leq 1$) が Σ に transversal になる様にとる。座標を適当にとれば $\Sigma = \{x_0 = 0\}$ としてよい。 γ 2で初期条件を

$$g_{0,t} = (1-t)u_0 + tu_1 \quad |_{x_0=0},$$

$$g_{1,t} = \frac{\partial}{\partial x_0} [(1-t)u_0 + tu_1] \quad |_{x_0=0}$$

7定めると、この $(g_{0,t}, g_{1,t})$ に対して Darboux 方程式は定理1の仮定をみたし、共通な p の近傍上に解 u_t が t に関して連続に存在する。

$\mathbb{R}^3$ へのうめこみ $\mathbb{R}^4$ に代えれば, どうなるであろうか。局所等距離うめこみは常に可能である。実際, $g - dz^2$ が Gauss 曲率が負の metric になるように関数 z を適当に選べば, これは $\mathbb{R}^3$ へのうめこみが可能, 従って $g = du^2 + dv^2 + dw^2 + dz^2$ 。bendable については, $\mathbb{R}^3$ への2つの warp 曲面 S_0, S_1 の点 P における二基本形式 b_0, b_1 に前と同様 $b_0(T, T), b_1(T, T)$ が共に正になる接ベクトル T があるとす。Gauss 曲率 K については何も仮定しない。このとき, $\mathbb{R}^4$ への連続な warp S_t により S_0 は S_1 に bendable である。 S_0 と S_1 は $\tilde{S}_t = (u_0 \cos \pi t, v_0, w_0, u_0 \sin \pi t)$, $0 \leq t \leq 1$ により bendable であるから, 系として, Gauss 曲率 K が正の点 P でも, P の近傍の任意の $\mathbb{R}^3$ への warp は $\mathbb{R}^4$ への連続な warp により局所的に bendable である。証明は次りようになる。 $\mathbb{R}^3$ の時と同じ設定で, より簡単にするため, $x = v_0, y = w_0$ と局所座標を取り, $\frac{\partial}{\partial x} u_i = \frac{\partial}{\partial y} u_i = 0$ ($i=0,1$) と仮定する。又 $T = \frac{\partial}{\partial x}$ とすると $(\frac{\partial}{\partial x})^2 u_i > 0$ ($i=0,1$)。まず, $\Phi_{\varepsilon} = (u_i, v_i, \varepsilon^{-1} \sin \varepsilon w_i, \varepsilon^{-1} (\cos \varepsilon w_i - 1))$ により, $\varepsilon > 0, S_i$ は $\mathbb{R}^4$ の中へ bend する。 $\varepsilon = 1$ で, $z_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_i - \varepsilon^{-1} (\cos \varepsilon w_i - 1))$, $z_t = (1-t)z_0 + tz_1$ とおいて $\tilde{g}_t = g - dz_t^2$ を考える。これは Gauss 曲率を K_t とすると点 P においては

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t &= K - \det \nabla^2 z_t \\ &= K - \frac{1}{2} \det \nabla^2 u_t - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u_t, \end{aligned}$$

$$u_t = (1-t)u_0 + tu_1.$$

ε を十分大きく取ると $\tilde{K}_t$ は一様に負となる。よって $\left[\tilde{g}_t - d\tilde{z}_t^2 \right]$ の Gauss 曲率 $\equiv 0$ の Darboux 方程式を考え、その初期面 $y=0$ での初期値を $\tilde{z}_t|_{y=0} = [(1-t)\tilde{z}_0 + t\tilde{z}_1]|_{y=0}$ 及び $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}_t|_{y=0} = [(1-t)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}_0 + t\frac{\partial}{\partial y}\tilde{z}_1]|_{y=0}$ 、但し、 $\tilde{z}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_\pm + \varepsilon^{-1}(\cos \varepsilon \omega_\pm - 1)]$ と取れば、方程式は t に関してなめらかに動く狭双曲型（古典的に解けている）になる。従って、その解 $\tilde{z}_t$ は t に関して、なめらかになり、 $t=0, 1$ では $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$ に一致している。よって、 t に関して連続な $\tilde{v}_t, \tilde{w}_t$ があって、 $\tilde{g}_t = d\tilde{z}_t^2 + d\tilde{v}_t^2 + d\tilde{w}_t^2$ 、よって、 $\tilde{\Phi}_t = (\tilde{z}_t, \tilde{v}_t, \tilde{w}_t, \tilde{z}_t)$ とおくと、これは $\mathbb{R}^4$ への $\mathbb{R}$ の近傍の局所等距離うめをみ。至る ε は $\mathbb{R}^4$ の座標のとり換え R （直交変換）で、 $R \cdot \tilde{\Phi}_{\pm \varepsilon} = \tilde{\Phi}_\pm$ となる。故に、 S_0 と S_1 をむすぶ warp の列が作れた。

参考文献

- [1] Reports on Global Analysis I, 微分幾何における非線型問題, 落合卓四郎編集, 1979.
- [2] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 5 (second edition), Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [3] N. Iwasaki, The strongly hyperbolic equations and their applications, to appear in PATTERNS AND WAVES --- Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations --- North-Holland, 1986.