

弾性方程式のレゾルベントの極について

茨城大学教育学部 川下 美潮 (Mishio Kawashita)

§0 序

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は ($n = 3$ のときは弾性体を表している) 領域とする。弾性体の運動は各 $x \in \Omega$ の時刻 t での変位 $u(t, x) = {}^t(u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$ (変位ベクトルと呼ばれている) を用いて記述される。弾性論によればこの $u(t, x)$ は次の方程式を満たすことが知られている。

$$(0.1) \quad (\rho \partial_t^2 - A(\partial_x))u(t, x) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R} \times \Omega$$

ただし、上で ρ は密度を表し、 $A(\partial_x)$ は $A(\partial_x)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u)$ で与えられる微分作用素である。 $A(\partial_x)$ の係数 a_{ij} は $n \times n$ 行列であり、その第 (p, q) 成分を a_{ipjq} と書く。各 a_{ipjq} は弾性テンソルと呼ばれている物理量である。

地震の際の波動伝播現象は地中を等方的な弾性体と見なすことによって説明されている。良く知られているように、地震では縦揺れを起こすP一波 (primary waves, 縦波) と横揺れを起こすS一波 (secondary waves, 横波) が現れる。実際、等方性弾性方程式の解にはこれらの波に相当するものが含まれている。これらの波は弾性体の内部を伝わるので内部波と呼ばれている。

一方、ノイマン境界条件 (これは物理的には境界面においては力がかかっていないという条件を意味する) を考えた場合は内部波のみではなく表面波と呼ばれている波が現れる。この波は弾性体の表面を内部波の速度よりも遅い速度で伝わっている。この表面波の存在は、始め Rayleigh [14] が半空間における等方性弾性方程式の場合に数学的に導いた。後に地震の観測結果からも

この表面波の存在が確認された。今日では弾性方程式のノイマン条件の下で現れるこの表面波をレーリー波と呼んでいる。

レーリー波の存在は弾性方程式のノイマン混合問題に特有の現象である。それ故、レーリー波の存在が混合問題の解にどのような影響を与えるかというのは興味ある問題である。この影響をスカラー値関数に対する通常の波動方程式など、表面波を持たない混合問題の解の性質と比較するために本稿では Ω が外部領域の場合のみを考察する。

外部領域における双曲型方程式の混合問題はスペクトル・散乱理論の枠組みにおいても様々な角度から研究されている。一般的には解の特異性が境界の存在により拘束されることと、解の局所エネルギーの減衰の速さや、より詳しくはレゾルベントの極（レゾナンスとも呼ばれる）が実軸の近くに現れることと深い関係があることが知られている。特に通常の波動方程式の場合は解の特異性の伝わり方は基本的には幾何光学の光線の伝わり方と一致しているので、特異性に関する情報が詳しく分かる。それ故、レゾルベントの極の分布に関しても深い結果が得られている（例えば、井川 [4]、Zworski [22]、およびそれらの文献表を参照）。

等方性弾性方程式の場合はレーリー波に対応する解の特異性は必ず発生し、それは境界上を永遠に回り続けることが知られている（例えば、Taylor [20] 参照）。このレーリー波による特異性は考えている境界値問題の楕円型領域内に現れるものである。一方、波動方程式の場合の特異性の拘束現象は特異性の境界による反射現象から引き起こされ、それらは双曲型領域内に現れる。この様に弾性方程式の場合、特異性の拘束を生む原因は波動方程式のときと全く異なるが、特異性の伝播という観点からはどちらも解の特異性は拘束されていることになる。このことより局所エネルギーの減衰の速さはむしろ遅く、また、速く実軸に近づくレゾルベントの極の列が存在することが予想される。実際、等方性の場合これらの予想が正しいことが確かめられている（[5]、[8]、[10]、[16]、[17]、[18] 参照）。

一方、非等方性の場合は等方性の場合と異なり、半空間の場合でもレーリー波が存在しない場合もある。レーリー波の存在の判定条件は $n = 2$ 又は 3 の半空間のときに Barnett and Lothe [1] が Stroh [19] の surface impedance tensor を用いる方法を発展させたものを用いることにより始めて与えられた。

一般のなめらかな境界を持つ場合は中村 [12] が特異性伝播の意味でレーリー波が局所的に存在するための必要充分条件を Barnett and Lothe [1] の surface impedance tensor をこの場合に拡張したものを用いて与えた。一般の境界の場合には surface impedance tensor は境界の位置にも依存する。すなわち、この条件は単に局所的な存在情報しか与えないのである。それ故、レーリー波に対する特異性は時間が経つと境界をどう伝わっていくのかということについてはこの存在条件のみからは全く分からないのである。等方性の場合には各点でこの存在条件を必ず満たすことが示せるので、この観点からもレーリー波に対する特異性はいつまでも残ることが分かる。この様に、等方性の場合には特異性の拘束が必ず起こることが分かるが、非等方性の場合はこの局所的な存在条件のみからは特異性の拘束までは分からないわけである。

では、非等方性の場合、局所的にレーリー波が存在するというもののみから局所エネルギーの減衰の速さや、実軸に近づくレゾルベントの極の列の存在について等方性の場合と同様のことが起こっていることがわかるのであろうか。意外なことのように思えるが、この局所的な条件の下で、等方性の場合の結果とほぼ同じことが示されている（中村、川下 [11]）。本稿では、非等方性の場合に対する [11] に沿ってレーリー波に対するレゾルベントの極の存在の証明の考え方について述べる。

従来、レゾルベントの極の存在に関しては基本的には混合問題の基本解の特異性に関する詳しい近似を構成することにより行われていた。この方法に従うと、レーリー波に対する特異性をすべて拾い上げるという作業を余儀なくされる。レーリー波の特異性が拘束されることが分かっている等方性の場合でもこの作業を行うのは容易ではない。

Stefanov and Vodev [17], [18] では等方性の場合は実軸に近づくレゾルベントの極の存在を示すために、従来の混合問題を經由するのとは異なる方法を提出した。その大筋は次の通りである。

- (1) 実軸に近づく極が存在しないと仮定すると、レゾルベントの正則性が分かるが、これよりレゾルベントの評価を出す。
- (2) レーリー波が存在することを用いて極の近似にあたると思われるものが存在することを示す。
- (3) (1) と (2) の結果より矛盾を導く。

この方法の基本方針はパラメーター付きの楕円型問題をそのまま扱うというものである。それ故、レーリー波のように特異性の拘束が強いと思われるものに対しては有効である。また、楕円型問題は一般化し易いということと相まって、様々な特異性の拘束現象に対しても適用可能である。例えば、非等方性弾性方程式の場合の他に、狭い意味で凸かつコンパクトな境界面の内側の伝播速度が外側よりも小さいスカラー値波動方程式の接合境界値問題の場合にも、対応するレゾルベントの実軸に近づく極の存在を示している (Popov and Vodev [13])。

この方法は適用範囲が広い一方、詳しいことが分かりにくいという面もある。一方、混合問題を經由する方法は複雑で適用しにくいのが難点だが、混合問題とレゾルベントとの関係や極の位置などについて、より詳しい情報が得られるという利点がある (井川 [3], Gererd [2])。

非等方性の場合には先にも述べたようにレーリー波の特異性の存在は局所的にしか分からない。しかし、この制限された情報だけからも等方性のときと同じことが示せるのである。このことは新しい方法の適用範囲が意外に広いこと、および、等方性においてでもまだレーリー波の大域的な存在の情報をすべて用いて示すべきことについて考える余地がまだまだあることを述べている。もちろんレーリー波の特異性に応じた極の数を数えるという Sjöstrand and Vodev [15] の仕事などこの方面の結果もあることに注意しよう。

以下、非等方性の場合のレーリー波の存在条件について説明し (§1)、問題の定式化を中村、川下 [11] に沿って述べる (§2)。弾性方程式に対するスペクトル・散乱理論の視点からの仕事は等方性の場合を中心として多くあるが、ここではその概説は行わない。§3 では非等方性の場合の極の存在の証明を概説する。ここでの重要な点はレゾルベントの正則性からその評価を導くことである (命題3.2)。この証明は $A(\partial_x)$ の特性行列 $A(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ の固有値の多重度が一定でないときは、等方性の場合と同様の方法は有効ではない。§4では $A(\partial_x)$ の固有値の多重度が一定でないときの処理の方法について述べる。

§1 レーリー波の存在条件

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) はなめらかな境界 Γ を持つ外部領域であるとする。次の混合問題が弾性方程式の外部ノイマン混合問題である。

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - A(\partial_x))u(t, x) = 0 & \text{in } \mathbf{R} \times \Omega, \\ N(\partial_x)u(t, x) = 0 & \text{on } \mathbf{R} \times \Gamma, \\ u(0, x) = f_1(x), \partial_t u(0, x) = f_2(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

ただし、上で、密度 ρ は $\rho = 1$ であるとし、 $A(\partial_x)$ の各係数 $a_{ij} = (a_{ipjq})$ は (t, x) によらない定数であるとする。また、境界作用素 $N(\partial_x)$ は $A(\partial_x)$ の余法線微分、すなわち、 $\nu(x) = {}^t(\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ を $x \in \Gamma$ での Ω に対する単位外向き法線ベクトルとすると $N(\partial_x)u = \sum_{i,j=1}^n \nu_i(x) a_{ij} \partial_{x_j} u|_{\Gamma}$ で与えられるものである。弾性テンソル a_{ipjq} には物理的な考察から導かれた次の (A.1) と (A.2) を仮定する。

$$(A.1) \quad a_{ipjq} = a_{jqip} = a_{pijq}$$

$$(A.2) \quad \text{ある定数 } \delta > 0 \text{ で次を満たすものが存在する。}$$

$$\left[\sum_{i,p,j,q=1}^n a_{ipjq} \varepsilon_{jq} \bar{\varepsilon}_{ip} \geq \delta \sum_{i,p=1}^n |\varepsilon_{ip}|^2 \right.$$

が任意の (複素) 対称行列 (ε_{ij}) に対して成り立つ。

$a_{ipjq} = \lambda_0 \delta_{ip} \delta_{jq} + \mu_0 (\delta_{ij} \delta_{pq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$ (λ_0, μ_0 は定数) のとき、弾性体は等方性であるという。このとき、 $A(\partial_x)u = \mu_0 \Delta u + (\lambda_0 + \mu_0) \text{grad}(\text{div } u)$ となる。等方性の場合、 $\lambda_0 + 2\mu_0/n > 0, \mu_0 > 0$ と (A.1)、(A.2) とは同値であることに注意しよう。

以下、ここでは、非等方弾性体とは弾性テンソルが (A.1)、(A.2) を満足する等方性でない弾性体を指すことにする。

§0 で述べたように、レーリー波は半空間の場合の等方性弾性方程式に対し、Rayleigh [14] が数学的に発見して以来様々な研究が成されてきた。レーリー波の発生は数学的にいえば、ロパチンスキー行列が正則とはならない点を作素 $\partial_t^2 - A(\partial_x)$ の楕円型領域 $\mathcal{E}$ 内に持つことに起因する。等方性の場合には上記の非正則点は必ず存在し、その点の集合 (レーリー波に対する特性集合のこと) の形も分かる (後述の注意 1.1 参照)。一方、非等方性の場合には非正則点が必ず存在するかどうかは分からない。Barnett and Lothe [1] は Stroh [19] の surface impedance tensor を用いてロパチンスキー行列の非正則点が存在するための必要充分条件を与えた。

一般のなめらかな境界の場合のレーリー波の存在は外向き (または、内向き) ノイマン作用素 T^+ (又は T^-) の解析を通じて特異性伝播の意味で調べられている。ノイマン作用素 $T^\pm$ の楕円型領域 $\mathcal{E}$ 内での主シンボル $\sigma_p(T^\pm)$ はロパチンスキー行列と一致する。このことより半空間の場合の結果を必要な修正を行って一般の曲がった境界の場合に拡張できる。実際、中村 [12] は非等方性の場合に境界の各点における surface impedance tensor を定め、これを用いてレーリー波が存在するための必要充分条件を与えた。

Surface impedance tensor $Z(\zeta, \tau)$ は $\mathcal{E}$ 上の $n \times n$ -Hermit 行列値 C^∞ 関数であり、 $\bar{\mathcal{E}} \subset T^*(\mathbf{R} \times \Gamma)$ 上連続に拡張される。(cf. [1]、[12]、[11]、また、上で $Z(\zeta, \tau)$ は $(t, \tau, \zeta) \in \mathcal{E} \subset T^*(\mathbf{R} \times \Gamma)$ の t にはよらないので t は略している。以下、 $(t, \tau, \zeta) \in \mathcal{E}$ のことを単に $(\zeta, \tau) \in \mathcal{E}$ と書く。)

レーリー波の存在条件 (ERW) は surface impedance tensor を用いて次の

ように表される ([11] 参照)。

$$(ERW) \quad \begin{cases} \text{Hermit 行列 } Z(\zeta^0, \tau^0) \text{ が非負定値とはならない様} \\ \text{な点 } (\zeta^0, \tau^0) \in \partial\mathcal{E} \text{ が存在する。} \end{cases}$$

注意. 条件 (ERW) は $n = 3$ の場合を扱っている [1]、[12] の存在条件と同値である。

$\|\zeta\|_\Gamma$ を Γ の通常のリーマン計量からきまる $T^*(\Gamma)$ のファイバー計量とする。 $T^\pm$ と $Z(\zeta, \tau)$ の間には

$$\sigma_p(T^\pm)(\zeta, \tau) = \|\zeta\|_\Gamma Z(\zeta, \tau) \quad (\mathcal{E} \text{ 上で})$$

の関係がある。これより、[1]、[12] と同様にして条件 (ERW) と $T^\pm$ が $\mathcal{E}$ 上実主要型であることは同値であることが示される。すなわち、条件 (ERW) が境界上のある点の近傍でのレーリー波の存在条件を与えるわけである。

Surface impedance tensor を導入するのはそれが弾性論におけるレーリー波の考察に用いられてきたという歴史的な理由のみではない。非等方性の場合、ノイマン作用素の性質をその主シンボルの形から直接導くのは困難である。むしろ、surface impedance tensor に対する解析を経由する事により始めて知ることができたのである。

注意 1. 1. 等方性の場合 $\sigma_p(T^\pm)$ 、 $Z(\zeta, \tau)$ の形を求めることができる。特にレーリー波は $C_R \|\zeta\|_\Gamma - |\tau| = 0$ を満たす点 $(\zeta, \tau) \in \mathcal{E}$ から発生することが示せる (定数 $C_R > 0$ はレーリー波の伝播速度である)。このことより Γ 全体でレーリー波の伝わる様子や、レーリー波による特異性の拘束が必ず起こることがわかる。もちろんこの場合、条件 (ERW) は常に満たされている。一方、非等方性の場合、条件 (ERW) はレーリー波の局所的な存在しか保証しない、すなわち、特異性の拘束までは条件 (ERW) からは分からないことに注意しよう。

§2 レゾルベントとその極

レゾルベントとは荒くいうとスペクトルパラメーター $z \in \mathbb{C}$ に対する次の楕円型境界値問題の解作用素のことである。

$$(2.1) \quad \begin{cases} (A(\partial_x) + z^2)v(x; z) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ N(\partial_x)v(x; z) = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

詳しくは次の手順で定める。定数 $a > 0$ を $\Gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < a\}$ となるように取り固定する。 $\text{Im } z < 0$ のとき、 $f \in L^2(\Omega)$ に対して (2.1) の一意解 $v(x; z) \in H^2(\Omega)$ が存在する。 $v(x; z) = R(z)f(x)$ で $R(z)$ を定めると $R(z)$ は $\tilde{\mathcal{C}}_+$ 上の $B(L_a^2(\Omega), H^2(\Omega \cap B_a))$ -値有理型関数に拡張できる (cf. [7], [6], [11])。ただし、 $L_a^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid f(x) = 0 \text{ (} |x| > a \text{ での)}\}$ 、 $\tilde{\mathcal{C}}_+ = \mathbb{C}$ 、(n が奇数のとき)、 $\tilde{\mathcal{C}}_+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{1}{2}\pi\}$ 、(n が偶数のとき) である。 $R(z)$ のことを (外向き) レゾルベントという。

各係数 a_{ij} の成分 a_{ipjq} が定数なので、岩下、柴田 [7]、岩下 [6] と同様にしてレゾルベント $R(z)$ は $\text{Im } z = 0, z \neq 0$ で正則である。よって外向きレゾルベント $R(z)$ の極は出るとすれば上半平面 $\text{Im } z > 0$ 上に現れる。

等方性で $n = 3$ のときに始めて Stefanov and Vodev [18] により次が成り立つことが示された。

$$(EP) \quad \begin{cases} \text{任意の } N > 0, C > 0, R > 0, \text{ に対して領域} \\ \quad 0 < \text{Im } z \leq C|\text{Re } z|^{-N}, \quad \text{Re } z \geq R \\ \text{内にレゾルベントの極は無数個存在する。} \end{cases}$$

非等方性の場合も同様のことが成り立つ。

定理 2. 1. (中村、川下 [11]) 次元 $n \geq 3$ は奇数とし、(A.1) と (A.2) を満たす非等方性弾性方程式を考える。このとき、もしレーリー波の存在条件 (ERW) が成り立つならば (EP) が成り立つ。特に、 $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Re } z_j = \infty$ となる

$R(z)$ の極の列 $\{z_j\}_{j=1,2,\dots}$ で、任意の $N > 0$ に対してある定数 $C_N > 0$ を用いて

$$0 < \operatorname{Im} z_j \leq C_N |\operatorname{Re} z_j|^{-N} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

と評価されるものが存在する。

注意 等方性の場合、レゾルベントの極の存在に関しては Stefanov and Vodev [16]、[17]、[18] の一連の仕事がある。また、レーリー波に対する極の個数の漸近分布 ([15]) や、実解析的な境界を持つ場合には指数的な速さで実軸に近づく極の存在 ([21]) も示されている。

レゾルベントの極が実軸の近くに存在する事から局所エネルギーの減衰の速さもそう速くはない、むしろいつまでも境界の近傍にエネルギーが残る解が存在することが予想される。これについては [5]、[8]、[9]、[10]、[11]、[21] で扱われている。

§3 パラメーター付き楕円型問題的方法

定理 2.1 の証明には、パラメーター付き楕円型境界値問題 (2.1) をできる限り直接扱うという方針が用いられる。この方法はレゾルベントの極と境界値問題 (2.1) とは次の関係があることを元になっている。

命題 3.1. $z_0 \in \tilde{\mathbf{C}}_+$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$ が外向きレゾルベント $R(z)$ の極であることと、境界値問題 (2.1) で $z = z_0$, $f(x) = 0$ としたものが自明でない解を持つこととは同値である。

命題 3.1 より境界値問題 (2.1) の自明でない解の近似となるものの存在を示せば、この近似に対するスペクトルパラメーター z_j が極の近似となることが予想される。そこで、

- (イ) 自明でない解の解の近似の列の存在を示す
- (ロ) この近似の列の存在がレゾルベントの正則性を妨げる

ことを示すのがこの方法の考え方の骨子である。上の (イ) は §0 の (2) に (ロ) は (3) (そのために (1) が必要である) がそれぞれ対応していることに注意しよう。

(イ) は例えば次のようなことを示すことを意味する。

「あるコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}^n$ と点列 $z_j \in \mathbf{C}$ とある関数 $v_j(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ($j = 1, 2, \dots$) で $\text{supp } v_j \subset K$, $\|v_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ (すべての $j = 1, 2, \dots$ について)、かつ $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Re } z_j = \infty$ であり、さらに

$$\begin{cases} (A(\partial_x) + z_j^2)v_j(x) = O(|\text{Re } z_j|^{-\infty}) & \text{in } \Omega, \\ N(\partial_x)v_j(x) = O(|\text{Re } z_j|^{-\infty}) & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

を満たすものが存在する。」

以下、上記の「…」を (AN) と略記する (漸近的な零解が存在するという意味)。

注意3. 1 $f_j(x) = (A(\partial_x) + z_j^2)v_j(x)$ とおくと、部分積分より

$$\text{Im } (z_j^2 v_j, v_j)_{L^2(\Omega)} = \text{Im } (f_j, v_j)_{L^2(\Omega)} = -\text{Im } (N(\partial_x)v_j, v_j)_{L^2(\Gamma)}$$

である。また楕円型作用素 $A(\partial_x)$ に関する楕円型評価式より $\|v_j\|_{H^2(\Omega)} = O(|z_j|^2)$ がわかる。これらのことと、 $f_j(x) = O(|\text{Re } z_j|^{-\infty})$ とに注意すれば (AN) の z_j は

(3.1)

$$|\text{Im } z_j| \leq C_N |\text{Re } z_j|^{-N}$$

(すべての $j = 1, 2, \dots$ と $N > 0$ に対して)

となる。

(ロ) に関しては背理法を用いる。すなわちレゾルベントの極が存在しないと仮定し、これが結果的に (AN) に反することを示すことを目指す。§0 でも述べたように、そのためには次のレゾルベントの正則性よりその評価が導かれるということが本質的である。

命題3.2. (レゾルベントの評価) 定理2.1と同じ仮定の下、もし、レーリー波の存在条件 (ERW) が成り立つならば、以下のことが成り立つ。

ある $m_0 > 0$, $C, C' > 0$ が存在して、レゾルベントが領域

$$|\operatorname{Im} z| \leq C |\operatorname{Re} z|^{-m_0}, \quad \operatorname{Re} z \geq C'$$

で正則であるとする。このとき、ある $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ が存在し、次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|R(z)\|_{B(L_a^2(\Omega), H^2(\Omega \cap B_a))} &\leq C_2 |z|^{m_0+3n+5} \\ (|\operatorname{Im} z| \leq C |\operatorname{Re} z|^{-(m_0+3n+4)}, \quad \operatorname{Re} z \geq C_1 \text{ 上で}) \end{aligned}$$

等方性の場合には上のレゾルベントの評価のところの $3n$ は n で充分である (Stefanov and Vodev [18] 参照)。

(AN) が分かれば (EP) が成り立つことを示す手順はつぎの通りである。もし、(EP) が成り立たないとする、命題3.2の仮定を満たすことになる。よって命題3.2のレゾルベントの評価と (3.1) より

$$1 = \|v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C |z_j|^{m_0+3n+5} C_N |\operatorname{Re} z_j|^{-N}$$

(すべての j と N について)

を得るので、 N を充分大きくした後、 $j \rightarrow \infty$ とすれば矛盾が生ずる。これがパラメーター付き楕円型問題的な取扱いの概要である。

非等方性の弾性方程式の場合、レーリー波が局所的に存在する条件 (ERW) は (AN) が成り立つことを保証するために用いる。しかしながら実際の証明はこの手順どうりには行わない。すなわち境界値問題 (2.1) を直接扱うことによって (AN) を示さない。その代わりに定常問題に対するノイマン作用素 $T^+(z)$ (z はスペクトルパラメーター) の楕円型領域における近似を考え、この近似に対して (AN) に相当することを (ERW) を用いて示す。一方、命題3.2よりノイマン作用素も下からの評価を受けることになるので、その

評価から矛盾を導くことになる(詳しいことは [11] 参照)。この様にノイマン作用素を経由することは、(ERW) はノイマン作用素を用いて表されているなど、レーリー波を扱う際にはその方が扱いやすいことが多いからである。また、もともとこの方法は等方性の場合に Stefanov and Vodev [17]、[18] で導入されたものであることに注意しよう。

注意 3.2 ここで述べた手順を用いているのは、波動方程式に対する接合境界問題に関する同様の問題を扱った Popov and Vodev [13] である。ここでは弾性方程式に対する扱いをそのまま述べるよりも [13] に沿って述べる方がパラメーター付き楕円型方程式的な方法の本質が分かりやすいので、あえてこのようにした。

§4 レゾルベントの評価

命題 3.2 ではもともと等方性弾性方程式の場合に Stefanov and Vodev [17]、[18] が与えたものであるが、そこでは等方性という性質を本質的に用いていた。この証明を見直せば、作用素 $A(\partial_x)$ の特性行列 $A(\xi)$ の固有値の多重度が一定であるときは有効であることがわかる。しかし、多重度一定ではない場合(一般的にはその方が多い)にはこの証明は適用できない。ここでは (A.1)、(A.2) のみをみたす一般の非等方性弾性方程式の場合に命題 3.2 を示す。大筋は [17]、[18] と同様なので修正を要する部分のみを述べる。

$\Gamma \subset B_a$ となる正の数 $a > 0$ と、この $a > 0$ に対し $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ で $\phi(x) = 1$ ($|x| > a$ の近傍で)、 $\phi(x) = 0$ ($\mathbf{R}^n \setminus \Omega$ の近傍で)、 $0 \leq \phi(x) \leq 1$ (すべての $x \in \mathbf{R}^n$ において) となるものを取り固定する。これに対して $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ で、 $\psi(x) = 1$ ($\text{supp } \phi$ の近傍で)、 $\psi(x) = 0$ ($\mathbf{R}^n \setminus \Omega$ の近傍で)、かつ $0 \leq \psi(x) \leq 1$ (すべての $x \in \mathbf{R}^n$ において) を一つ取る。

$R_0(z)$ を境界がない(すなわち $\Omega = \mathbf{R}^n$) の場合の外向きレゾルベントとする。 $\text{Im } z_0 < 0$ を一つ取り固定しておく。外向きレゾルベントの定義より次

が成り立つ。

(4.1)

$$R(z)(I - K(z)) = R(z_0) + \psi(R_0(z) - R_0(z_0))K_\phi,$$

$$K(z) = -\{(z^2 - z_0^2)(1 - \phi)R(z_0) + Q_\psi(R_0(z) - R_0(z_0))K_\phi\},$$

ただし、 $Q_\phi = [A(\partial_x), \phi]$, $Q_\psi = [A(\partial_x), \psi]$, $K_\phi = \phi \cdot I + Q_\phi R_0(z_0)$ である。次元が奇数故、 $R_0(z)$ は $B(L_a^2(\mathbf{R}^n), H^2(B_a))$ -値整関数である。よって $K(z) \in B(L_a^2(\Omega))$ はコンパクトかつ z について整関数である。また、 $R(z_0)$ は通常の L^2 -枠での楕円型境界値問題 (2.1) の解作用素であるから、準楕円性より $s > n/4$ で $(K(z))^s \in B(L_a^2(\Omega))$ はヒルベルトシュミット族、特に $s > n/2$ のとき $(K(z))^s \in B(L_a^2(\Omega))$ はトレース族に入る。以下、 $s > n/2$ を一つ取り固定する。この s に対して (4.1) の右から $\sum_{j=0}^{s-1} (K(z))^j$ をかける。レゾルベント $R_0(z)$ は

$$(4.2) \quad \|R_0(z)\|_{B(L_a^2(\mathbf{R}^n), H^2(B_a))} \leq C_a |z| e^{C|\operatorname{Im} z|} \quad (|z| \geq 1)$$

という評価を受けるので、もし $I - (K(z))^s$ が $B(L_a^2(\Omega))$ で逆作用素を持てば $\|R(z)\|_{B(L_a^2(\Omega), H^2(\Omega_a))} \leq C e^{C|z|} \|(I - (K(z))^s)^{-1}\|_{B(L_a^2(\Omega))}$ と評価できる。それ故、 $(I - (K(z))^s)^{-1} \in B(L_a^2(\Omega))$ の存在を示し、さらにそのノルムを評価すれば良い。

以下、必要となるトレース族に関する性質について述べておく。 X は可分なヒルベルト空間とし、 $B_c(X) = \{A \in B(X) \mid A \text{ はコンパクト作用素である}\}$ とおく。 $A \in B_c(X)$ に対して $\lambda_j(A)$ ($|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots$) を A の固有値を多重度の分だけ重複して並べたものとする。また、 A の特性値 $s_j(A)$ を $s_j(A) = \lambda_j((A^*A)^{1/2})$ で定める。特性値には次の性質があることに注意しよう。

(4.3)

$$s_{p+q-1}(A+B) \leq s_p(A) + s_q(B) \quad (A, B \in B_c(X), p, q = 1, 2, \dots)$$

(4.4)

$$s_j(AB) \leq \|A\|_{B(X)} s_j(B) \quad (A \in B(X), B \in B_c(X), j = 1, 2, \dots)$$

$$s_j(AB) \leq s_j(A) \|B\|_{B(X)} \quad (A \in B_c(X), B \in B(X), j = 1, 2, \dots)$$

等方性の場合の Stefanov and Vodev [17], [18] と同様にすれば、結局次を示せばよいことがわかる。

命題4. 1. ある定数 $C > 0$ が存在して、すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j((K(z))^s)) \leq C e^{C|z|^{3n+1}}$$

が成り立つ。

命題4. 1 の証明。 $F(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j((K(z))^s))$, $K_2(z) = Q_{\psi} R_0(z) K_{\phi}$, $K_1(z) = K(z) + K_2(z)$ とおく。 $|z| \geq 1$ で示せば充分である。(4.3) より

$$F(z) \leq \prod_{i_1, \dots, i_s=1,2} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j(K_{i_1}(z) \cdots K_{i_s}(z)))$$

である。 $\|K_1(z)\|_{B(L_a^2(\Omega))} \leq C|z|^2$, $\|K_2(z)\|_{B(L_a^2(\Omega))} \leq C \exp(C|z|)$ ($|z| \geq 1$ のとき) と評価できるので、[17], [18] と同様にして

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j(K_1(z) K_1(z) \cdots K_1(z))) \leq C e^{C|z|^{2s}}$$

となる。問題はそれ以外の項、すなわち、 $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j(K_{i_1}(z) \cdots K_{i_s}(z)))$ で $i_1, i_2, \dots, i_s$ のうちの少なくとも一つは 2 である場合である。このときは (4.4) より

$$(4.5) \quad s_j(K_{i_1}(z) \cdots K_{i_s}(z)) \leq C e^{C|z|} s_j(K_2(z))$$

となる。そこで、 $s_j(K_2(z))$ に関する次の評価が重要である。

補題4. 1. ある定数 $C > 0$ が存在して、すべての $l, j = 1, 2, \dots$ と $|z| \geq 1$ に対して次の評価が成り立つ。

$$s_j(K_2(z)) \leq C e^{C|z|} (C|z|)^{2l} ((2l)^{2l})^2 j^{-2l/n}$$

補題4.1をひとまず認めて命題4.1を示す。補題4.1で $|z| \geq 1$ と $r > 1$ に対して $l = 3\lfloor |z|/2 \rfloor$ ($\lfloor p \rfloor$ は p 以下の整数の中で最大のものを指す)、 $j \geq r|z|^{3n}$ とすると

$$\begin{aligned} s_j(K_2(z)) &\leq C e^{C|z|} (C|z|)^{2l} (3|z|)^{4l} j^{-2} (r|z|^{3n})^{-\frac{2}{n}(l-n)} \\ &\leq C' r^2 e^{C'|z|} (C^2 3^4 r^{-2/n})^l j^{-2} \end{aligned}$$

であるので、 $r > 0$ を充分大きく取ることにより、任意の $q > 0$ に対してある $C_q > 0$ が存在し、 $j \geq C_q |z|^{3n}$ 、 $|z| \geq 1$ のとき

$$(4.6) \quad s_j(K_2(z)) \leq C_q e^{-q|z|} j^{-2}$$

が成り立つ。(4.6) で $q > 0$ を (4.5) の定数 $C > 0$ より大きく取ると

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + s_j(K_{i_1}(z) \cdots K_{i_s}(z))) &\leq \prod_{j \leq C_q |z|^{3n}} C e^{C|z|} \prod_{j \geq C_q |z|^{3n}} (1 + C_q j^{-2}) \\ &\leq C' e^{C'|z|^{3n+1}} \end{aligned}$$

となる。この様にして命題4.1を得る。

補題4.1の証明。この証明を始める前に後に必要となることを先に述べておく。 $A(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ ($A(\partial_x)$ の特性行列) とする。(A.2) より $A(\xi) \geq (\delta/2)|\xi|^2$ となる。 $B(\xi) = (I + A(\xi))^{-1}$ とおく。 $B(\xi)(I + A(\xi)) = I$ より

$$\partial_{\xi}^{\alpha} (B(\xi))^{-1} = - \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_{\xi}^{\alpha-\beta} B(\xi)) (\partial_{\xi}^{\beta} A(\xi)) B(\xi)$$

であるので帰納的に考えれば次が分かる。

補題4.2.

(1) ある定数 $C_0, C_1 > 0$ が存在して、すべての $\xi \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}_+^n$ に対して

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} B(\xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha|} \alpha! (1 + |\xi|)^{-2-|\alpha|}$$

が成り立つ。

(2) (1) の評価における定数 $C_0, C_1 > 0$ に対して次が成り立つ。

$$|\partial_\xi^\alpha (B(\xi))^j| \leq (2^n C_0)^j (2C_1)^{|\alpha|} \alpha! (1 + |\xi|)^{-2j - |\alpha|}$$

すべての $\xi \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_+^n$ と $j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ について

ただし、 $\bar{\mathbf{Z}}_+^n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \text{各 } \alpha_i \text{ は非負の整数}\}$ である。

$\mathcal{O} \in \mathbf{R}^n$ は領域とし、 $\Psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は $\bar{\mathcal{O}} \cap \text{supp } \Psi = \emptyset$ をみたすものとする。このとき $(I - A(\partial_x))^{-j} \Psi : H^{-\infty}(\mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\bar{\mathcal{O}})$ は連続である。

補題4.3. ある $C'_0 = C'_0(n, d, C_1, \|\Psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}) > 0, C'_1 = C'_1(d, n, C_1) > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathcal{O}} |\partial_x^\alpha ((I - A(\partial_x))^{-j} \Psi f)(x)| \leq (2^n C_0)^j C'_0 C_1^{|\alpha|} \alpha! \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

(すべての $j \geq 0, \alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_+^n, f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して)

が成り立つ。ただし、上で $C_0, C_1 > 0$ は補題4.2で出てきたものであり、 $d > 0$ は $d = (\text{dist}(\mathcal{O}, \text{supp } \Psi))^{-1} > 0$ で定めたものである。

証明。 $r \geq 0$ を $|\alpha| - 2r < -n$ をみたすようにとり、

$$J_r(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \exp(\xi \cdot y) (-\Delta_\xi)^r (B(\xi)^{-j}) d\xi \text{ とおくと}$$

$$\partial_x^\alpha (I - A(\partial_x))^{-j} \Psi f(x) = \int_{|y| \geq d^{-1}} |y|^{-2r} J_r(y) \Psi(x-y) f(x-y) dy \quad (x \in \mathcal{O})$$

となるので

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{O}} |\partial_x^\alpha (I - A(\partial_x))^{-j} \Psi f(x)| \\ \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n} |J_r(y)| \left(\int_{|y| \geq d^{-1}} |y|^{-4r} dy \right)^{1/2} \|\Psi f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

であるが、補題4. 2の (2) より特に $|\partial_\xi^\alpha (B(\xi))^{-j}| \leq (2^n C_0)^j (2C_1)^{|\alpha|} (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$ となることより r を $|\alpha| - 2r = -(n+1)$ または $|\alpha| - 2r = -(n+2)$ となるようにとると

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^n} |J_r(y)| \leq C(n) (2^n C_0)^j (2(1 + nC_1))^{|\alpha|} \alpha!$$

(ただし、 $C(n) = (2C_1)^{n+2} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|)^{-(n+1)} d\xi$ である) となるので補題4. 3を得る。

レゾルベントの分解 (4.1) での関数 $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し、 $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\text{supp } \phi$ の近傍で $\chi(x) = 1$, $\text{supp } \chi$ 上で $\psi(x) = 1$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$ (すべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して) となるように選ぶ。このとき任意の $l \in \mathbf{N}$ に対して次が成り立つ。

$$(4.6) \quad \begin{aligned} Q_\psi R_0(z) K_\phi &= (1 + z^2)^l Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-l} (1 - \chi) R_0(z) K_\phi \\ &\quad + \sum_{j=1}^l (1 + z^2)^{j-1} Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-j} Q_\chi R_0(z) K_\phi \end{aligned}$$

(4.6) の証明。 $Q_\psi = Q_\psi (1 - \chi) = Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-1} (I - A(\partial_x)) (1 - \chi)$ と $(I - A(\partial_x)) (1 - \chi) = (1 - \chi) (I - A(\partial_x)) + Q_\chi$ より $Q_\psi R_0(z) K_\phi = Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-1} (1 - \chi) (I - A(\partial_x)) R_0(z) K_\phi + Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-1} Q_\chi R_0(z) K_\phi$ となる。さらに $(I - A(\partial_x)) R_0(z) = (1 + z^2) R_0(z) - I$ と $(1 - \chi) \cdot I \cdot K_\phi = 0$ より $l = 1$ のときは正しい。 l まで成り立つとすると、

$$\begin{aligned} Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-l} (1 - \chi) R_0(z) K_\phi &= Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-l-1} (I - A(\partial_x)) (1 - \chi) R_0(z) K_\phi \\ &= Q_\psi (I - A(\partial_x))^{-l-1} \{(1 - \chi) (I - A(\partial_x)) + Q_\chi\} R_0(z) K_\phi \end{aligned}$$

となるので以下、 $l = 1$ のときと同じ様にすれば $l + 1$ のときも正しい。よって、帰納法により (4.6) が成り立つことが分かる。

以上の準備の下で補題4.1を示す。まず次の関数列 $\{\Phi_m\}_{m=1,2,\dots}$ をとる。
「ある定数 $C_2 > 0$ とコンパクト集合 $K \subset \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid \chi(x) = 1\}$ が存在して、任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して

$$0 \leq \Phi_m \leq 1, \quad \text{supp } \Phi_m \subset K, \quad \Phi_m(x) = 1 \quad (\text{supp } (1 - \phi) \text{ 上で})$$

をみたし、かつ

$$|\partial_x^\alpha \Phi_m(x)| \leq C_2^{|\alpha|} \alpha! \quad (\text{すべての } x \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \overline{\mathbf{Z}}_+^n, |\alpha| \leq 2m \text{ に対して})$$

が成り立つ。」また、 $\Psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ で、 $0 \leq \Psi(x) \leq 1$ (すべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して)、 $\cup_{|\beta| \neq 0} \text{supp } \partial_x^\beta \chi$ 上で $\Psi = 1$, $\Psi \subset \{x \in \mathbf{R}^n \setminus K \mid \psi(x) = 1\}$ を満たすものを取り、固定する。また A_{B_a} を $-A(\partial_x)$ の B_a でのノイマン問題の自己共役拡張とする ($D(A_{B_a}) = H^2(B_a)$ である)。

補題4.4. ある定数 $C > 0$ と $C_3, C_4 > 0$ が存在して

$$s_k(\Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j} \Psi) \leq C C_3^j C_4^l (2l)^{2l} e^{-l} s_k((I + A_{B_a})^{-l})$$

がすべての $k, l, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対してなりたつ。

補題4.4を認めて先に補題4.1を示す。 $Q_\psi = \sum_{p=1}^n b_p(x) \partial_{x_p} + b_0(x)$ とすると $\cup_{p=0}^n \text{supp } b_p$ 上 $\Phi_l(x) = 1$ より

$$\begin{aligned} Q_\psi(I - A(\partial_x))^{-j} Q_\chi R_0(z) K_\phi &= \sum_{p=1}^n b_p \Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j} \Psi \partial_{x_p} Q_\chi R_0(z) K_\phi \\ &\quad + b_0 \Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j} \Psi Q_\chi R_0(z) K_\phi \end{aligned}$$

となる。よって (4.3) と $R_0(z)$ の評価 (4.2) とを合わせると

$$\begin{aligned} (4.7) \quad s_k(Q_\psi(I - A(\partial_x))^{-j} Q_\chi R_0(z) K_\phi) \\ \leq C e^{C|z|} C_3^j C_4^l (2l)^{2l} e^{-l} s_{\frac{k}{(n+1)}}((I + A_{B_a})^{-l}) \end{aligned}$$

がすべての $l, k, j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $|z| \geq 1$ で成り立つことがわかる。また、 $b_p(I - A(\partial_x))^{-l} = b_p(I + A_{B_a})^{-l} \cdot (B_a \text{ への制限作用素})$ となるので

$$(4.8) \quad s_k(Q_\psi(I - A(\partial_x))^{-l}(1 - \chi)R_0(z)K_\phi) \leq Ce^{C|z|}s_{\frac{k}{(n+1)}}((I + A_{B_a})^{-l})$$

を得る。(4.7)、(4.8) と (4.6) より、ある定数 $C > 0$ が存在して

$$s_k(Q_\psi R_0(z)K_\phi) \leq Ce^{C|z|}(C|z|)^{2l}(1 + (2l)^{2l})s_{\frac{k}{(n+1)(l+1)}}((I + A_{B_a})^{-l})$$

となる。この評価と $s_j((I + A_{B_a})^{-l}) \leq (Cj^{-2/n})^l$ がすべての j について成り立つことに注意すると補題 4. 1 を得る。

補題 4. 4 の証明。 $\Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j}\Psi = (I + A_{B_a})^{-l}(I - A(\partial_x))^l\{\Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j}\Psi\}$ だから (4.4) より $\|(I - A(\partial_x))^l\{\Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j}\Psi\}\|_{B(L^2(\mathbf{R}^n))}$ を評価すると良いことがわかる。補題 4. 2 の $\mathcal{O}$ を K の近傍で $\overline{\mathcal{O}} \cap \text{supp } \Psi = \phi$ となるようにとると

$$\|\partial_x^\alpha \Phi_l(I - A(\partial_x))^{-j}\Psi\|_{B(L^2(\mathbf{R}^n))} \leq C_0^j C_1^{|\alpha|} \alpha!$$

となるので、 $|(A(\partial_x))^p u(x)| \leq (\max_{i,j=1,\dots,n} \|a_{ij}\|_{B(\mathbf{C}^n)})^p \sum_{|\alpha|=2p} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |\partial_x^\alpha u(x)|$ と $(I - A(\partial_x))^l = \sum_{p=0}^l \binom{l}{p} (A(\partial_x))^p$ を用いて評価すれば補題 4. 4 の評価を得る。

REFERENCES

- [1] D.M. Barnett and J. Lothe, *Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half spaces: the surface impedance method*, Proc. R. Soc. London **A 402** (1985), 135–152.
- [2] C. Gérard, *Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull. Soc. Math. France **116** (31) (1988).

- [3] M. Ikawa, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1983), 127–194.
- [4] M. Ikawa, 散乱行列の極について. 数学 **42** (2) (1990), 317–331.
- [5] M. Ikchata and G. Nakamura, *Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 83–95.
- [6] H. Iwashita, *A remark on the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problem*, Sci. Rep. of Niigata Univ. **24** (1988), 25–31.
- [7] H. Iwashita and Y. Shibata, *On the analyticity of spectral functions for exterior boundary value problems*, Glasnik Math. **43** (1988), 291–313.
- [8] M. Kawashita, *On the local energy decay property for the elastic wave equation with the Neumann boundary condition*, Duke Math. J. **67** (1992), 333–351.
- [9] M. Kawashita, *On the decay rate of local energy for the elastic wave equation*, Osaka J. Math. **30** (1993), 813–837.
- [10] M. Kawashita, *On a region free from the poles of the resolvent and decay rate of the local energy for the elastic wave equation*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 1013–1043.
- [11] M. Kawashita and G. Nakamura, *The poles of the resolvent for the exterior Neumann problem of anisotropic elasticity*, preprint.
- [12] G. Nakamura, *Existence and propagation of Rayleigh waves and pulses*, “Modern theory of anisotropic elasticity and applications,” SIAM, Philadelphia, 1991, pp. 215–231.
- [13] G. Popov and G. Vodev, *Resonances near the real axis for transparent obstacles*, preprint.
- [14] Lord. Rayleigh, *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*, Proc. Lond. Math. Soc. **17** (1887), 4–11.

- [15] J. Sjöstrand and G. Vodev, *Asymptotics of the number of Rayleigh resonances*, Math. Ann. **309** (1997), 287–306.
- [16] P. Stefanov and G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity in the exterior of a ball*, Ann. Inst. H.Poincaré (Physique Théorique) **60** (1994), 303–321.
- [17] P. Stefanov and G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity in the exterior of a strictly convex body*, Duke Math. J. **78** (1995), 677–714.
- [18] P. Stefanov and G. Vodev, *Neumann resonances in linear elasticity for an arbitrary body*, Comm. Math. Phys. **176** (1996), 645–659.
- [19] A. N. Stroh, *Steady state problems in anisotropic elasticity*, J. Math. Phys. **41** (1962), 77–103.
- [20] M. Taylor, *Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon.*, “In Proc. Conf. on PDE and Geometry.” Marcel Dekker, New York, 1979. pp. 273–291.
- [21] G. Vodev, *Existence of Rayleigh resonances exponentially close to the real axis*, Ann. Inst. H.Poincaré (Physique Théorique) **67** (1997).
- [22] M. Zworski, *Counting scattering poles*, “In Spectral and scattering theory (ed. by M. Ikawa),” Marcel Dekker, New York, 1979, pp. 301–331.