

Equivariant stable S -cobordism theorem

阪市大理 荒木捷朗 (Shôvô Araki)

阪大理 川久保勝夫 (Katsuo Kawakubo)

G をコンパクト Lie 群, X を G -空間とする. X の同変 G -Whitehead 群 $Wh_G(X)$ の定義は Illman, 1974, によるものとする. G -空間の圏を $G\text{-Top}$ と書くと, Wh_G は

$$Wh_G: G\text{-Top} \rightarrow Ab$$

なる G -ホモトピー-関手になっている.

$Wh_G(X)$ の構造の研究は, $Wh_G(X)$ をより単純なものの直和に分解し, 更にそれをより簡単なものに reduce し, 又, 直和に分解し etc. の過程を経て最終的にはいくつかの代数的に定義された Whitehead 群の直和にあらずること (Illman, 1983) であるが, その過程と私流に解釈すると, 第一段階は次の Hanschild (1983) の定理である.

定理 (Hanschild). X について自然な直和分解

$$Wh_G(X) = \coprod_{(H)} Wh_G(X, (H))$$

が成立つ. ここで (H) は G の閉部分群のすべての同型類を動き,

$Wh_G(X, (H))$ は, $Wh_G(X)$ の元 $[V, X]$ を代表する相対有限 CW-複体 (V, X) が $V-X$ のすべての isotropy 型 $= (H)$ とされるような元全体を作る部分群である.

この後のすべての過程は X についての naturality を用いて導かれる.

定理 1. $f: X \rightarrow Y$ が G -写像とし, $H \in G$ の内部部分群, X^H, Y^H が locally path-connected 且つ semi-locally 1-connected とし, $f^H: X^H \rightarrow Y^H$ が path-components の bijection を与え, 且つ, 各 path-component については基本群の同型を与えたとする. 則ち,

$$f_*: Wh_G(X, (H)) \cong Wh_G(Y, (H)), \text{ 同型.}$$

この講義録中にのっている松本-塩田の最近の研究で, コンパクト Lie 群 G の作用するコンパクト G 多様体の G ホモトピー-同値性に対して G -Whitehead torsion が定義出来ることが示された.

コンパクト smooth G 多様体の同変ホモロジー (W; X, Y) を考える. 即ち $W = X \sqcup Y$ で包含 $i_X: X \hookrightarrow W, i_Y: Y \hookrightarrow W$ が G ホモトピー-同値写像である. この $(W; X, Y)$ について次の 2 条件を考える.

(*1) H, K が W の isotropy 群で $H \not\cong K$ のとき, $W^K = \coprod W_\nu^K, W^H = \coprod W_\lambda^H$ とする連結成分への分解とし,

$$W_\nu^K \supset W_\lambda^H \Rightarrow \dim W_\nu^K - \dim W_\lambda^H \geq \dim G + 3.$$

(*)2) H が W の局大 isotropy 型 α のとき,

$$\dim W^K \geq \dim G + 6 \quad (\text{すべての成分に対して}).$$

定理 2. コンパクト smooth G 多様体の同変 G - h -コボルディズム $(W; X, Y)$ が, i) $\tau_G(W, X) = 0$, ii) 条件 (*1), (*2) を満たすとき,

$$(W, X) \approx (X \times I, X \times \{0, 1\}). \quad G\text{-diffeo. rel } X.$$

これは一種の同変 S -cobordism theorem と呼んでよからう。
この証明には W の isotropy 型 (有限個) $(H_1), \dots, (H_r)$ とし,
これに $(H_i) \geq (H_j) \Rightarrow i \leq j$ となるように番号をつけておく。

Corners を含むコンパクト G 多様体からなる filtration

$$W = W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_r$$

で, 各 W_i の isotropy 型全体 $= \{(H_1), (H_2), \dots, (H_r)\}$ とする。この
次のように作る。番号のつけ方より, (H_1) は W の局大 isotropy 型
である。 $W(H_1) = G \cdot W^{H_1}$ は W のコンパクト G 部分多様体になる。
 W に G -不変 R -metric を入れ, $\nu_1 \rightarrow W(H_1)$ を G -不変 normal bundle
とし, これは G -不変管状近傍と同型で, $W_2 = W - \overset{\circ}{\nu}_1(1)$ と
おく。 W_2 の isotropy 型全体 $= \{(H_2), \dots, (H_r)\}$ となり, (H_2) は W_2 の
局大 isotropy 型になる。上と同様に W_2 に対して $W_2(H_2) =$
 $G \cdot W_2^{H_2}$ の G -不変 normal bundle を $\nu_2 \rightarrow W_2(H_2)$ とし, $W_3 =$
 $W_2 - \overset{\circ}{\nu}_2(1)$ とおく。以下, この操作をくりかえして, 上の filtration

が得らる。作らる。

$$W = v_1(1) \cup \dots \cup v_r(1).$$

$$W_i = v_i(1) \cup \dots \cup v_r(1), \quad 1 \leq i \leq r,$$

とすると、 $\dots$ $\gamma_i = W_i \cap X$, $\gamma_i = W_i \cap Y$, $1 \leq i \leq r$,
と置く。

川久保, 1981, Lemma 3.1 より, この定理の仮定 ii) の下で,
(特に条件(*1)), 各 (W_i, X_i, Y_i) は G - h -コホモロジーである
り, 又, 同じ仮定の下で包含 $X_{i+1}^{H_j} \subset X_i^{H_j}$, $j \geq i+1$, が 2-連結に
なり, 定理 1 が適用出来る。

$$\text{inductive に } (W - W_i, X - X_i) \cong (X - X_i) \times I, (X - X_i)$$

を繰り返して行くのであるが, 第一階段をみる。

$$\text{Illman は } \tau_G(W, X) = 0 \Rightarrow \tau_G(W(H_1), X(H_1)) = 0.$$

$$\text{次に } (3) \text{ 型: } Wh_G(X(H_1), (H_1)) \approx Wh_{WH_1}(X^{H_1}, \{1\}) \text{ なる}$$

$$\tau_{WH_1}(W^{H_1}, X^{H_1}) = \tau_G(W(H_1), X(H_1)) = 0.$$

よって W^{H_1}, X^{H_1} 上には WH_1 が free に作用する。

$$\tau(W^{H_1}/WH_1, X^{H_1}/WH_1) = 0 \quad (\text{Illman は}).$$

$$\text{条件 (*2) は } \dim(W^{H_1}/WH_1) \geq 6.$$

よって古典的 S -cobordism 定理より

$$(W^{H_1}/WH_1, X^{H_1}/WH_1) \approx (X^{H_1}/WH_1 \times I, X^{H_1}/WH_1) \text{ diffe.}$$

$WH_1 \rightarrow W^{H_1}/WH_1$ は principal WH_1 -bundle であり, 同位型である。
より。

$$(W^{H_1}, X^{H_1}) \approx (X^{H_1} \times I, X^{H_1}) : WH_1\text{-diffeo.}$$

3.2.2

$$(W^{(H_1)}, X^{(H_1)}) \approx (X^{(H_1)} \times I, X^{(H_1)}) : G\text{-diffeo.}$$

3.2.3. nontrivial bundle ν_1 is trivial via homotopy $\nu_1 \simeq 0$ in $\mathcal{A}$.

$$(\nu_1, \nu_1|X(H_1)) \approx (\nu_1|X(H_1) \times I, \nu_1|X(H_1)) : G\text{-diffeo.}$$

4.3.2

$$(\nu_1(1), \nu_1(1)|X(H_1)) \approx (\nu_1(1)|X(H_1) \times I, \nu_1(1)|X(H_1))$$

$$(S\nu_1(1), S\nu_1(1)|X(H_1)) \approx (S\nu_1(1)|X(H_1) \times I, S\nu_1(1)|X(H_1))$$

2.7.7, 4.3.2

$$\tau_G(\nu_1(1), \nu_1(1)|X(H_1)) = 0$$

$$\tau_G(S\nu_1(1), S\nu_1(1)|X(H_1)) = 0$$

2.7.8.

3.2.2. ~~triple~~ ^{triad} α incl. $k = (X; X_2, \nu_1(1)|X(H_1)) \subset (W; W_2, \nu_1(1))$

12.3.7.1.2. G -Whitehead torsion α Meyer-Vietoris α $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$.

$$\tau_G(W, X) = \hat{j}_1 \tau_G(W_2, X_2) + \hat{j}_2 \tau_G(\nu_1(1), \nu_1(1)|X(H_1)) \\ - \hat{j}_0 \tau_G(S\nu_1(1), S\nu_1(1)|X(H_1))$$

12.3.7.1.2. $\hat{j}_1 : X_2 \subset X$, $\hat{j}_2 : \nu_1(1)|X(H_1) \subset X$, $\hat{j}_0 : S\nu_1(1)|X(H_1) \subset X$.

4.3.2

$$\hat{j}_1 \tau_G(W_2, X_2) = 0.$$

X_2 is isotropy $\mathbb{P}_2$ is $(H_2), \dots, (H_r)$ τ $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$.

$$Wh_G(X_2) \cong \prod_{i=2}^r Wh_G(X_2(H_i))$$

この形は、古典的には既に知られているものであり、この定理を W の isotropy 型の数 r の induction で証明することにしよう。定理 2 の証明の第一段階として isotropy 型の数 r を減らすことが出来る。証明が完了する。但し、既に product になっている部分 $(Z, \partial X, \partial Y)$ と接する所には何かを遠くを生成する。この r は small G -isotropy で修正する必要がある。

定理 4. (equivariant stable s-cobordism theorem).

$(W; X, Y)$ を G - h -コホモロジー空間とし、 $\tau_G(W, X) = 0$ とする。 G の表現空間 V を

$$(W \times V(1), X \times V(1)) \cong (X \times I \times V(1), X \times \{0\} \times V(1)).$$

G -diffeo. rel $X \times V(1)$, となるものが存在する。

仮定よりある表現 V に対して $\tau_G(W \times V(1), X \times V(1)) = 0$ となるが、 V を適当に大きくとれば $(W \times V(1), X \times V(1), Y \times V(1))$ が定理 2 の条件 (1), (2) を満たすように出来る。上の定理が成立。条件 (1), (2) は互いに独立である。上のように equivariant s-cobordism theorem は stable には成立。この辺で書いた方が、事情をよく説明しているというべきかも知れない。

(2) 以上