

Fourier multiplier に関する de Leeuw の定理および

Wiener Tauberian Theorem の証明を見直し?

Univ. of New Mexico

L.-S. HAHN

一変数の場合だけ考える.

A. まず Fourier multiplier の定義から始める. 簡単のため $1 \leq p \leq 2$ とする. $\hat{\mathbb{R}}$ 上の可測函数 φ が p -multiplier であるとは任意の $f \in L^p(\mathbb{R})$ に対し $\varphi(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$, $\xi \in \hat{\mathbb{R}}$, となる $g \in L^p(\mathbb{R})$ が存在することである.

この定義を言い換えれば次の補題 1 が得られる.

補題 1 $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\varphi \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ に対し, 次の二条件は同値である:

(a) φ は p -multiplier である. [即ち $\varphi \in M_p(\hat{\mathbb{R}})$],

(b) 不等式

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\mathbb{R}}} \varphi(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \right| \leq K \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

がすべての $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する.

$p=1$ の場合は簡単である:

定理 2 $\varphi \in M_1(\hat{\mathbb{R}})$ となる必要十分条件は $\varphi = \hat{\mu}$ となる測度 $\mu \in M(\mathbb{R})$ が存在することである。即ち L -multipliers は Fourier-Stieltjes 変換に限る。

一方次の定理が成り立つ。

定理 3 (Bochner) $\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続函数 φ に対して次の二条件は同値である。

(a) φ は Fourier-Stieltjes 変換である; 即ち $\varphi = \hat{\mu}$ が成り立つ $\mu \in M(\mathbb{R})$ が存在する。

(b) 不等式

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \varphi(\xi_j) \right| \leq K \left\| \sum_{j=1}^n a_j e^{i\xi_j x} \right\|_{\sup}$$

が任意の $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \hat{\mathbb{R}}$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する。

又 $\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続函数 φ に対して Bochner の定理の条件 (b) は次の条件 (b') と同値である。

(b') 不等式

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\mathbb{R}}} \hat{f}(\xi) \cdot \varphi(\xi) d\xi \right| \leq K \|f\|_{\sup}$$

がすべての $f \in d(\mathbb{R})$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する。

蛇足だが $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\mathbb{R}}} \hat{f}(\xi) \cdot \varphi(\xi) d\xi \right| \leq K \|\hat{f}\|_{L(\hat{\mathbb{R}})}$, $\forall f \in d(\mathbb{R})$, は trivial である。 ($K = \|\varphi\|_{\sup}$ とすればよい)。 $\|\hat{f}\|_{L(\hat{\mathbb{R}})}$ をもっと小さい $\|f\|_{\sup}$ で置き換える事によって (b') は φ を

Fourier-Stieltjes 変換 たりしめる条件となるのである。

(b) $\Rightarrow$ (b') (b) が $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ に対し成り立つと仮定して (b') がすべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対し成り立つ事を示せばよい。
十分大きな N に対し f_N を $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ の $2\pi N$ -periodic extension とすれば $\hat{f}(\frac{n}{N}) = 2\pi N \hat{f}_N(\frac{n}{N})$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$) だから Riemann 積分の定義から直ぐ出る。

(b') $\Rightarrow$ (b) 測度 $\mu(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \delta_{\xi_j}(\xi)$ を連続関数 $(\hat{K}_\varepsilon * \mu)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-\frac{(\xi-\xi_j)^2}{2\varepsilon}}$ で「近似」すればよい。こゝで $K(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, $K_\varepsilon(x) = K(\sqrt{\varepsilon}x) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ である。

条件 (b') が成り立つと $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上の C -線型写像 $f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \cdot \varphi(\xi) d\xi$ は $C_b(\mathbb{R})$ 上の連続線型汎関数に拡張出来るから Riesz の表現定理によつて $\mu \in M(\mathbb{R})$ の存在が言える。
即ち (b') $\Rightarrow$ (a). 逆は明らかである。

よつて条件 (b') は (a), 即ち $\mathbb{R}$ 上の測度 μ の存在と同値である。同様に (b) が成り立つと三角多項式 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\xi_j x}$ の集合は $\mathbb{R}$ の Bohr コンパクト化 $\bar{\mathbb{R}}$ 上の連続関数空間 (即ち $\mathbb{R}$ 上の概周期関数空間) で稠密であるから再び Riesz の表現定理によつて $\bar{\mathbb{R}}$ 上の測度の存在と同値である。

若し φ が $\bar{\mathbb{R}}$ 上の連続関数であるならば此の四条件は全部同値である。

此の同値と定理 2 を見れば de Leeuw [2] は次の定理を証

明した.

定理4 (de Leeuw) $\hat{\mathbb{R}}$ 上連続有界函数 φ に対し次の二条件は同値である.

(a) $\varphi \in M_p(\hat{\mathbb{R}})$.

(b) 不等式

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \varphi(\xi_j) \right| \leq K \left\| \sum_{j=1}^n a_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_p} \cdot \left\| \sum_{j=1}^n b_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_q}$$

がすべての $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{C}$, $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \hat{\mathbb{R}}$ に対

して成り立つ様な定数 K が存在する. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ で

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_p} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{i\xi_j x} \right|^p dx \right]^{1/p}$$

である. $\left\| \sum_{j=1}^n b_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_q}$ も同様.

[彼は φ が不連続な場合にも拡張してゐる.]

de Leeuw の証明は p -multiplier の定義を補題1に言い直し
 上記の討論 (b) $\Leftrightarrow$ (b') の trivial でない拡張を行なったも
 ので「名人藝」と言える. 周知の様に超函数では Dirac 測度
 につき「驚嘆すべき玲瓏な」表現法がある. この技巧的な証
 明を見透しのよりエレガントな証明でおき換えられたいだろ
 うか? 又 Dirac 測度の translates の線型結合の Fourier-Stieltjes
 変換は三角多項式でそれは又概週期函数に連がる. よって概
 週期函数の理論を複素函数論的な方法で再建設出来たいもの
 だらうか?

B. 次に Wiener Tauberian Theorem を考える.

定理 5 (Wiener) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ とする.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi(y) dy = A \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

がある $f \in L^1(\mathbb{R})$ について成り立つ.

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) \varphi(y) dy = A \int_{\mathbb{R}} g(y) dy$$

がすべての $g \in L^1(\mathbb{R})$ について成り立つ.

(i) と (ii) が同値であるための必要十分条件は $\hat{f}(\xi) \neq 0, \xi \in \hat{\mathbb{R}}$,
である.

この有名な定理の証明は Hahn-Banach の定理によって次の
補題 6 に帰する.

補題 6 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}), f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f}(\xi) \neq 0, \xi \in \hat{\mathbb{R}}$, の条件
の下で $(f * \varphi)(x) = 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ
ば $\varphi = 0$ a.e. である.

この補題 6 の証明は「乱暴に」 Fourier 変換をとればすぐ出ま
る: $\hat{f}(\xi) \cdot \hat{\varphi}(\xi) = 0$ かつ $\hat{f}(\xi) \neq 0, \xi \in \hat{\mathbb{R}}$, だから $\hat{\varphi}(\xi) = 0$,
 $\forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$. よって Fourier 変換の一意性により $\varphi = 0$ a.e.

持論 L^p 関数の Fourier 変換はさう簡単には行かない. しか
し L^p 関数の Fourier 変換を正則関数に対して定義すると
言う idea を活かして上記の「証明」を救えぬだろうか?

確かに T. Carleman [1] はこの idea に沿った証明を興えてゐる.
但し彼はその証明で Wiener (-Levy) の定理を使つてゐる. 若

し後者を使うのであれば T. Carleman の様にしなくても証明は二・三行ですむ。Wiener-Levy の定理を使わず L^p 函数の Fourier 変換を正則函数の列で近接するという idea を用いた Wiener-Tauberian Theorem の直接的証明は存在しないだろうか？

文 献

1. T. Carleman, L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent
Almqvist and Wiksell, Uppsala 1944.
2. K. de Leeuw, On L^p Multipliers, Ann. Math. 81 (1965), 364-379.