

抽象的微分方程式の 摂動について

早大 理工 実方宣洋

§1. 序

(B)-space X における線型作用素 A について, 次の X における常微分方程式の初期値問題が考えられる。

$$(1) \quad \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad u(0) = u_0.$$

ここで扱う問題は, (1) が適当な意味で解ける場合, 線型作用素 B にどれ位の条件を与えたならば, 初期値問題

$$(2) \quad \frac{du(t)}{dt} = (A+B)u(t) \quad u(0) = u_0.$$

が解けるかという事になる。

問題(1)が (C_0) well posed (又は, $(1A)$ well posed) となる場合について, R. S. Phillips ([2]) による研究があり, I. Miyadera [3] ではさらにこれらの問題が,

(I) B が有界作用素のときの perturbation

(II) semi group 列の収束性

とに分解される事を示した。問題 (II) については (C_0) s.gr. に対して, H. F. Trotter [10] の研究があり, (IA) s.gr. については I. Miyadera [3], (OA) 及び (A) s.gr. に対しては S. Oharu and H. Sunouchi [5], さらに $(C_{(k)})$ s.gr. に対して, T. Takahashi and S. Oharu [9] により拡張された。

問題 (II) が拡張されているのであるから, 問題 (I) がいえれば同様な形の *perturbation* がいえるであろうが, (I) が (OA) well posed の場合すでに否定的である事を例で示す。しかし (I) は弱い形では成立する。§2. ではこの二つの事について述べる。§3 では I. Miyadera [4] の結果の一部を紹介する。§4 では解作用素列の収束性について調べ, *perturbation* の問題に適用する。§5 では §4 で得られた結果を基に幾つかの事柄について調べた。

§2. 問題 (I) について

初期値問題 (I) が (OA) well posed となる場合について例を考える。Differential operator

$$P(D) = \begin{pmatrix} -D^2 + iD^4 & D^4 \\ 0 & -D^2 + iD^4 \end{pmatrix} \quad D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

を $L_2 = L_2(R_1) \times L_2(R_1)$ で考える。D を通常の意味にと

ると, $P(D)$ は preclosed であるがこの closure (the minimal operator) と D を distribution の意味で考えた operator (the maximal operator) とは一致するから,

$$A = \overline{P(D)} \text{ と書けば, } D(A) = \{u \in L_2; P(\zeta)\hat{u}(\zeta) \in L_2\} = H_4 \times H_4$$

ここで $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\hat{u}(\zeta) = \int e^{-i\zeta x} u(x) dx$

この operator A に対して, Cauchy problem (1) は $(0, A)$ well posed となる事が知られている (H. Sunouchi [8]).

Cauchy problem (2) における operator B として次のものを考える。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

B は L_2 の有界作用素で, (2) は Fourier 変換により, 形式的に,

$$(2)' \quad \begin{aligned} d\hat{u}(t, \zeta)/dt &= P(\zeta)\hat{u}(t, \zeta) + B\hat{u}(t, \zeta) \\ \hat{u}(0, \zeta) &= \hat{u}_0(\zeta) \end{aligned}$$

となる。Operator $Q(D) = A + B$ の resolvent を調べるため, matrix $\lambda I - Q(\zeta)$ の逆を計算すれば,

$$(i) \quad \det(\lambda - Q(\zeta)) = (\lambda - (\sqrt{\varepsilon} - 1)\zeta^2 - i\zeta^4)(\lambda + (\sqrt{\varepsilon} + 1)\zeta^2 - i\zeta^4)$$

$$(ii) \quad (\lambda - Q(\zeta))^{-1} = 1/\det(\lambda - Q(\zeta)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda + \zeta^2 - i\zeta^4 & \zeta^4 \\ \varepsilon & \lambda + \zeta^2 - i\zeta^4 \end{pmatrix}$$

となり, もしも $\varepsilon > 1$ ならば $Q(\zeta)$ の固有値 $\lambda(\zeta) = (\sqrt{\varepsilon} - 1)\zeta^2$

$+i\zeta^d$ は Petrowsky の条件 ([11] p.101) を満たさず
 s. gr. well posed ではない (H. Sunouchi [8])。し
 かし作用素 $Q(D)$ は、最近発表された J. Chazarain [1]
 による Gevery class の distribution の意味では well
 posed となる。実際 $Q(D)$ の resolvent set $\rho(Q)$ は、
 (ii) より $\lambda \in \Lambda = \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq a|\lambda|^{1/d} + b\}$, $1 < d \leq 2$, $a =$
 $\sqrt{e} - 1$, $b: +\infty$, ならば, $\sup_{\zeta} |(\lambda - Q(\zeta))^{-1}| < \infty$
 となる事から $\rho(Q) \supset \Lambda$ 。又 (iii) より容易に $\sup_{\zeta} |(\lambda -$
 $Q(\zeta))^{-1}| \leq \operatorname{Const.} (1 + |\lambda|)^2$, $\lambda \in \Lambda$ を示す事も出来、
 [1] THÉOREME 4.4. を適用できる。一方 [1] の摂動に関
 する定理, THÉOREME 6.2., は作用素 $A = \overline{P(D)}$ が
 被摂動作用素に対する仮定, (DEFINITION 6.1.), $\rho(A)$
 $\supset \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$ & $\|R(\lambda; A)\| \leq M / \operatorname{Re} \lambda$, を満たさな
 いため, 適用できない。

上記の例により問題 (I) は否定的であるが, (1) における作
 用素 A を class $G_2(\omega, k)$ に属すると仮定して, 問題 (I)
 を弱い形で試みる。

定義 2.1. (B)-space X における closed
 linear operator A が, 条件

$$(I \omega) \quad \rho(A) \supset \{\zeta \in K; \zeta > \omega\}$$

$$(II\ k) \quad \|R(\xi; A)^m x\| \leq M / (\xi - \omega)^m \cdot \sum_{j=0}^k \|A^j x\|$$

$$x \in D(A^k), \quad \xi > \omega, \quad m = 1, 2, \dots$$

を満たすとき A は $G_2(\omega, k)$ に属すという。

$A \in G_2(\omega, k)$ ならば, これから解作用素 $\{T(t; A)\}_{t \geq 0}$ が構成される。詳細は [6] に示されている。又 $D(A^k)$ は $norm \quad \|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^k \|A^j \cdot\|$ により (B) space $[D(A^k)]$ となる。

命題 2.2. $A \in G_2(\omega, k)$, $B \in \mathcal{B}(X; [D(A^k)])$ ならば, ある実数 ω_1 が存在して, $A+B \in G_2(\omega_1, k)$ 。さらに $D(A)$ が X で dense ならば $A+B$ により構成される解作用素 $\{T(t; A+B)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}([D(A^k)] X)$ は,

$$T(t; A+B)x = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu}(t)x \quad x \in D(A^k)$$

$$S_0(t)x = T(t; A)x \quad (A \text{ の解作用素})$$

$$\begin{aligned} S_{\nu+1}(t)x &= \int_0^t T(t-s; A) B S_{\nu}(s)x \, ds \\ &= \int_0^t S_{\nu}(t-s) B T(s; A)x \, ds \end{aligned}$$

と表現できる。

命題 2.2. を示すため, $\zeta - A - B = (\zeta - A)(I - R(\zeta A)B)$
 $= (I - BR(\zeta A))(\zeta - A)$ と書くと,

$$\|R(\zeta A)Bx\| \leq M / \zeta - \omega \|B\|_{(k)} \|x\| \quad x \in X$$

$\|\cdot\|_{(k)}$ は, $\mathcal{B}(X, D(A^k))$ の operator norm
より (B) space X で $(I - R(\zeta A)B)^{-1}$ を Neumann 展
開する事により $A+B$ に対して $(I - \omega_1)$, $\omega_1 = \omega + M\|B\|_{(k)}$
が示される. (II k) を示すためには,

$$\|BR(\zeta A)x\|_{D(A^k)} \leq M / \zeta - \omega \|B\|_{(k)} \|x\|_{D(A^k)}$$

$$x \in D(A^k)$$

より (B) space $[D(A^k)]$ 上で $(I - BR(\zeta A))^{-1}$ を Neumann
展開すれば,

$$R(\zeta A+B)x = R(\zeta A) \sum_{v=0}^{\infty} (BR(\zeta A))^v x \quad x \in D(A^k)$$

このべきを [2] に従って計算すると,

$$\|R(\zeta A+B)^m x\| \leq M / (\zeta - \omega_1)^m \|x\|_{D(A^k)}$$

$$x \in D(A^k) \quad \zeta > \omega_1 \quad m = 1, 2, \dots$$

ところで (II k) を示すためには上の評価式の右辺は $\|\cdot\|_{D(A^k)}$
ではなく $\|\cdot\|_{D(A+B)^k}$ でなければならない。そこで次の補題
が必要である。

補題 2.3. A を $D(A)$ で定義された線型作用素, B
を X から normed space $[D(A^k)]$ への有界作用素とする
と,

$$D(A^j) = D((A+B)^j) \quad j = 1, 2, \dots, k+1$$

$$C^{-1} \|x\|_{D(A^j)} \leq \|x\|_{D(A+B)^j} \leq C \|x\|_{D(A^j)}$$

$$x \in D(A^j), \quad C > 0 \text{ 定数}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

が成立する。

この補題は帰納法で証明される。以上の事により命題 2.2 は証明される。

§ 3. 解作用素の構成について

この節では I. Miyadera [4] による一般的な解作用素の構成定理を紹介する。

X を (B) -space としてその norm を $\|\cdot\|$, Y を X の sub space で, $\|\cdot\|$ よりも強い norm $\|\cdot\|_Y$ により (B) -space となるものとする。 A を X の中の linear operator とするとき, Y の sub spaces $Y_A, Y_{A^2}, \dots, Y_{A^n}, \dots$ を次の様に定める。

$$Y_A = \{x \in D(A) \cap Y; Ax \in Y\}$$

$$Y_{A^2} = \{x \in Y_A; Ax \in Y_A\}$$

$$Y_{A^n} = \{x \in Y_{A^{n-1}}; Ax \in Y_{A^{n-1}}\}$$

A を Υ_A に制限したものを A_0 と書けば, $\Upsilon_A = D(A_0)$,
 $\Upsilon_{A^2} = D(A_0^2) \dots \Upsilon_{A^n} = D(A_0^n) \dots$.

A に次の仮定を置く.

(a₁) Υ 中の作用素として, A_0 は resolvent set,
 $\rho(A_0)$ を持ち,

$$\rho(A_0) \supset \{\lambda; \lambda > \omega\}$$

(a₂) Υ 中の作用素 A_0 の resolvent $R(\lambda) = R(\lambda, A_0)$

$$\text{は, } \|R(\lambda)^m x\| \leq M / (\lambda - \omega)^m \|x\|$$

$$x \in \Upsilon, \lambda > \omega, m = 1, 2, \dots$$

を満たす.

(a₁), (a₂) を満たす作用素 A に対して,

$$T_\lambda(t)x = e^{-\lambda t} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda t)^\nu (\lambda R(\lambda))^\nu x / \nu!$$

$$\lambda > \omega \quad t \geq 0 \quad x \in \Upsilon$$

と置く。級数は $\|\cdot\|$ norm により収束する。又収束は $\lambda > \omega$
 $t \geq 0$ に対して compact - 様収束。

命題 3.1. 作用素 A に条件 (a₁) (a₂) を仮定すると
 次の事が成立する。

$$(b_1) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x, \quad x \in \Upsilon_{A^2}$$

が存在する。収束は $t \geq 0$ に対して compact - 様
 収束。

$$(b_2) \quad \|T(t)x\| \leq M e^{\omega t} \|x\| \quad x \in \Upsilon_{A^2} \quad t \geq 0$$

$$(b_3) \quad \|T(t)x - T(s)x\| \leq M/\omega |e^{t\omega} - e^{s\omega}| \|Ax\|$$

$$x \in Y_{A^2} \quad t, s \geq 0$$

$$(b_4)' \quad T(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t T_\lambda(s) Ax \, ds$$

$$x \in Y_{A^2} \quad t \geq 0$$

$$(b_4) \quad T(t)x - x = \int_0^t T(s) Ax \, ds$$

$$x \in Y_{A^3} \quad t \geq 0$$

$$(b_5) \quad R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$$

$$\lambda > \omega \quad x \in Y_{A^2}$$

== 以下に条件

(A₃) A は X の中の閉作用素

を付け加えると。

$$(b_6)' \quad AT_\lambda(t)x = T_\lambda(t)Ax \quad x \in Y_A$$

$$(b_6) \quad AT(t)x = T(t)Ax \quad x \in Y_{A^3}$$

[(b₁) の証明の概略]

$T_\lambda(t)x$ を λ について微分

すれば,

$$\partial/\partial\lambda T_\lambda(t)x = -te^{-\lambda t} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda t)^\nu (\lambda R(\lambda))^\nu R(\lambda)^2 A^2 x / \nu!$$

$$x \in Y_{A^2}$$

これより

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq \int_\mu^\lambda \|\partial/\partial\nu T_\nu(t)x\| d\nu$$

$$\begin{aligned}
&\leq t \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mu}^{\lambda} e^{-vt} \|(vt)^k (vR(v))^k R(v)^2 A^2 x\| / k! dv \\
&\leq Mt \int_{\mu}^{\lambda} 1/(\lambda-\omega)^2 \exp(vt\omega/v-\omega) dv \|A^2 x\| \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{as } \lambda, \mu \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

ここで $\Upsilon = [D(A^k)]$ と置けば, $E_{ik}(\omega k)$ に属する作用素に対する解作用素が $D(A^{k+2}) = \Upsilon A^2$ の上で構成される事に注意しておく ([b] では $D(A^{2k+1})$ の上で構成された)。尚 [4] ではさらに鋭く, $D(A^{k+1})$ の上で構成されている。

次に subspace ΥA^2 へ norm $\|\cdot\|_2 = \sum_{i=0}^2 \|A^i \cdot\|$ を導入して (B) space としよう。次の補題が成立する。

補題 3.2. A が Υ の中の作用素として resolvent set を持つとする。もしも ΥA が $\|\cdot\|$ -dense in Υ ならば, ΥA^n は $\|\cdot\|_k$ -dense in ΥA^k , $n \geq k \geq 0$ 。

この補題から:

命題 3.3. 仮定 $(a_1), (a_2)$ にさらに仮定

(a_4) ΥA は $\|\cdot\|$ -dense in Υ

を加えると次の事が成立する。

$(b_1), (b_2)$ は $x \in \Upsilon$ で成立。

$(b_3)'$ $T(t)x$ は $\|\cdot\|$ -continuous in $t \geq 0$. $x \in \Upsilon$

(b₄) は $x \in Y_A$, 又 (b₅) は $x \in Y$ で成立。

ここでさらに条件 (a₃) を仮定すると

(b₆) は $x \in Y_A$ で成立。

以上の結果を基に, 命題 2.2. と同様な結果が成立する。ここでは補題 2.3. は必要としない。

[命題 2.2]′ 作用素 A が条件 (a₁) (a₂) を満たすとする。 $B \in \mathcal{B}(X; Y)$ ならば $A+B$ も条件 (a₁) (a₂) を満たす。さらに A が条件 (a₄) を満たせば, $A+B$ も (a₄) を満たし, $A+B$ により構成された解作用素は命題 2.2. の表示で書ける。又 A が (a₃) を満たせば $A+B$ も (a₃) を満足する。

§4. Perturbing operator の近似

§3. の結果を基に, 解作用素列の収束性の問題について考える。次の命題が成立する。

命題 4.1. 線型作用素の列 $\{A_n\}$ を一定の実数 ω により条件 (a₁) を満たすものとする, $\rho(A_n) \subset \{\zeta > \omega\}$ 。さらに条件

(C1) ある $\zeta_0 > \omega$ とある $R(\zeta_0) \in \mathcal{B}(Y)$ が存在して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\zeta_0; A_n)x - R(\zeta_0)x\| = 0 \quad x \in Y$$

$$\mathcal{N}(R(\zeta_0)) = \{0\}$$

$$(C_2) \quad \sup_n \|R(\xi; A_n)\| < \infty \quad \xi > \omega$$

(C₃) ある正数 M が存在し、

$$\|R(\xi; A_n)^m x\| \leq M/(\xi - \omega)^m \|x\|$$

$$\xi > \omega, \quad x \in Y, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

を仮定する。条件 (a₁) (a₂) を満足する次の様な作用素 A が存在する。

$$(d_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\xi; A_n)x - R(\xi; A)x\| = 0$$

$$\xi > \omega \quad x \in Y$$

(d₂) $\{T(t; A)\}_{t \geq 0}$, $\{T(t; A_n)\}_{t \geq 0}$ をそれぞれ A , A_n より構成された解作用素とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t; A_n)R(\xi; A_n)^2 x - T(t; A)R(\xi; A)^2 x\| = 0$$

$$\xi > \omega, \quad x \in Y$$

さらに条件

(C₄) 各 Y_{A_n} は $\|\cdot\|$ -dense in Y , 又 $R(R(\xi_0))$ も $\|\cdot\|$ -dense in Y .

を仮定すると, A は条件 (a₄) を満たし,

$$(d_3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t; A_n)x - T(t; A)x\| = 0 \quad x \in Y$$

ここで perturbation の問題にもとり, 初期値問題 (1) を (C_k) well posed とする。作用素 A は (C_k) s.gr. $\{T(t; A)\}$ の C.I.g. である。([6], [9]) §3.1 に習って $Y = D(A^k)$

$\|\cdot\|_{D(A^k)} = \|\cdot\|$ と書く。次の条件を満足する作用素 B を考える。

$$(p_1) \quad D(B) \supset D(A^\infty) = \bigcap_{n \geq 1} D(A^n), \quad B(D(A^\infty)) \subset Y$$

(p₂) 作用素の列 $\{B_n\} \subset \mathcal{B}(X; Y)$ が存在して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n x - Bx\| = 0 \quad x \in D(A^\infty)$$

$$(p_3) \quad \sup_n \int_0^1 \|B_n T(t; A)x\| dt < \infty \quad x \in Y$$

命題 4.2. 初期値問題 (1) を (C_k) well posed とする。
作用素 B を条件 (p₁), (p₂), (p₃) を満たすものとするとき, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\forall \varepsilon; |\varepsilon| < \varepsilon_0$ に対して, $A + \varepsilon B$ は (B) -space Y の中で閉包, $\overline{A + \varepsilon B}$, を持ち, $\overline{A + \varepsilon B}$ は条件 (a₁), (a₂), (a₄) を満たす。又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(t; A + \varepsilon B_n)x = T(t; \overline{A + \varepsilon B})x \quad x \in Y$$

が成立する。

§5. Miscellanies

命題 4.2.1 における $A + \varepsilon B$ が仮定 (a₃) を満たすための条件を求める。

命題 5.1. 命題 4.2. の仮定の基にさらに仮定

ある $\xi_0 \in \mathcal{P}(A)$ が存在して, $BR(\xi_0 A) \in \mathcal{B}(X)$

を加えると, $\varepsilon_1 > 0$ が存在して, $\forall \varepsilon; |\varepsilon| < \varepsilon_1$ に対して, $D(A)$

上で定義された X の中的作用素 $A+\varepsilon B$ は λ_0 を resolvent set の中にふくみ, 条件 $(G_1), (G_2), (G_3), (G_4)$ を満たす。

次に $\overline{A+\varepsilon B}$ が resolvent set $=\emptyset$ の場合の $G_2(\omega, 1)$ ([7]) に属するための条件を調べる。補題 2.3 と類似な結論が成立すればよい。

[補題 2.3]' A を $D(A)$ で定義された作用素として, B を条件

$D(B) \supset D(A)$, $\|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad x \in D(A), a \geq 0, 1 > b \geq 0$ を満足する作用素とすると, 正数 $C > 0$ が存在して,

$$C^{-1}\|x\|_{D(A)} \leq \|x\|_{D(A+B)} \leq C\|x\|_{D(A)}$$

が成立する。

最後に作用素 B が $(P_1), (P_2), (P_3)$ を満たすための条件を調べる。

命題 5.2. 初期値問題 (1) を (A) well posed と仮定する。作用素 A は (A) s.g. $\{T(t; A)\}_{t \geq 0}$ の C.i.g. である。作用素 B は次の仮定

$$(F_1) \quad D(B) \supset D(A^\infty), \quad B[D(A^\infty)] \subset D(A^2)$$

(F₂) ある $k_0 \geq 0, \lambda_0 \in \rho(A), K > 0$ が存在して,

$$\|BR(\lambda_0; A)^{k_0} x\|_{D(A^2)} \leq K\|x\| \quad x \in D(A^\infty)$$

$$(\S_3) \quad \int_0^1 \|BT(t;A)x\|_{D(A^2)} dt \leq K \|x\|_{D(A^2)} \quad x \in D(A^\infty)$$

を置くと, B は条件 $(p_1)(p_2)(p_3)$ を満足する。又 (1) が (0A) well posed と仮定した場合, 仮定 $(\S_1), (\S_2), (\S_3)$ において,
 $D(A^2) \rightarrow D(A)$, $\|\cdot\|_{D(A^2)} \rightarrow \|\cdot\|_{D(A)}$, と置き換えれば同様な結論が成立する。

系 5.3. (1) を (0A) well posed と仮定して, 閉作用素 B を, $D(B) \supset D(A)$, $B[D(A)] \subset D(A)$ を満足するものとする, B は条件 $(p_1)(p_2)(p_3)$ を満足する。

文献

- [1] J. Chazarain, Problèmes de Cauchy Abstracts et Applications à Quelques Problèmes Mixtes, J. Funct. Analysis 7, 386-446 1971.
- [2] E. Hille & R.S. Phillips, Functional Analysis and Semi Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1957
- [3] I. Miyadera, Perturbation theory for semi groups of linear operators, 数学 20 (1968) 14-25
- [4] I. Miyadera, Generation theorems of semi groups of linear operators, to appear
- [5] S. Oharu and H. Sunouchi, On the Convergence of semi groups of linear operators, J. Funct. Analysis, vol 6,

No 2, October 1970.

- [6] S. Oharu, Semi groups of linear operators in a Banach space, to appear.
- [7] N. Okazawa and S. Oharu, Abstract Cauchy problems and semi groups of linear operators, to appear.
- [8] H. Sunouchi, Convergence of semi discrete difference schemes of abstract Cauchy problems, Tôhoku Mat. Journ, vol. 22, 394-408 1970
- [9] T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semi groups, to appear.
- [10] H.F. Trotter, Approximation of semi groups of operators, Pacific J. Math., 8 (1958) 887-919

[11] 山口昌哉, 野木達夫, 数値解析の基礎, 共立出版