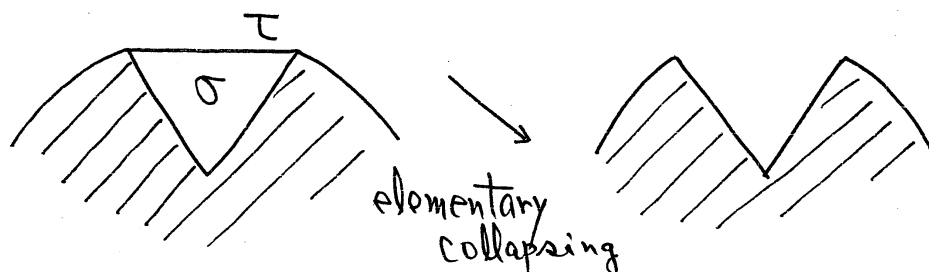


3次元多様体上の collapsing map

神戸大 教養 池田 裕司
東洋大 工 山下 正勝

3次元組合せ多様体 K について考える. 境界 ∂K は K で full であるとする. $c: K \rightarrow L$ を simplicial collapsing, F を c の collapsing field, 即ち c から定まる rooms (σ, τ) の全体 $\{(\sigma, \tau)\}$ とする.



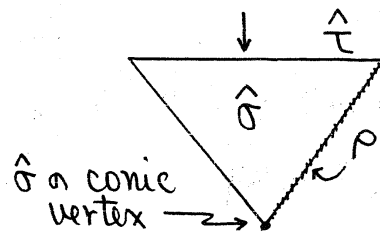
c から自然に induce される PL map $f_c: |K| \rightarrow |L|$ を collapsing map と呼ぶ. spine L の simplex α に対して, α の interior $\dot{\alpha}$ の f_c による逆像の closure を α の (c による) inverse といい, $c^{-1}(\alpha)$ と表わす.

即ち

$$c^{-1}(\alpha) \equiv \overline{f_c^{-1}(\dot{\alpha})}$$

である.

$P \in K$ が F の room $\hat{\sigma}$
 $(= (\hat{\sigma}, \hat{\tau}))$ の proper face
 であり, P が $\hat{\sigma}$ の conic
 vertex を含むとき, $\hat{\sigma}$ は



P に対して vertical である. ということにする.

我々の目標は $C^+(\alpha)$ の様子を調べることであるが.
 それには先ず α の各 vertical room $\hat{\sigma}_\lambda$ ごとに $C^+_{\hat{\sigma}_\lambda}(\alpha)$
 を調べて, その後で それらを集めてやればよい. 即ち.

$$C^+(\alpha) = \bigcup_\lambda C^+_{\hat{\sigma}_\lambda}(\alpha).$$

こゝでは α が 1-simplex の場合に限定して, 実際に
 $C^+_{\hat{\sigma}}(\alpha)$ としてどのような集め方をしてやればよいかの説明
 をしてみたい. 即ち.

状況 $\cdot \alpha \in L$ は 1-simplex で, $\alpha \cap |K| = \emptyset$ とする.

$\cdot \alpha$ は vertical 2-room $\hat{\sigma}$ を持つ. とする.

この状況のもとで.

定理 $\cdot A \equiv C^+_{\hat{\sigma}}(\alpha)$ は

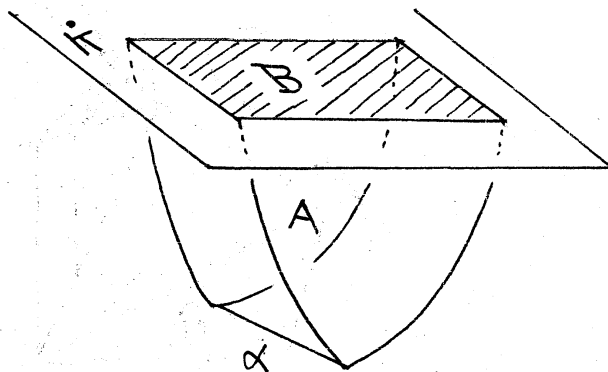
3-ball である,

$\cdot B \equiv C^+_{\hat{\sigma}}(\alpha) \cap |K|$ は

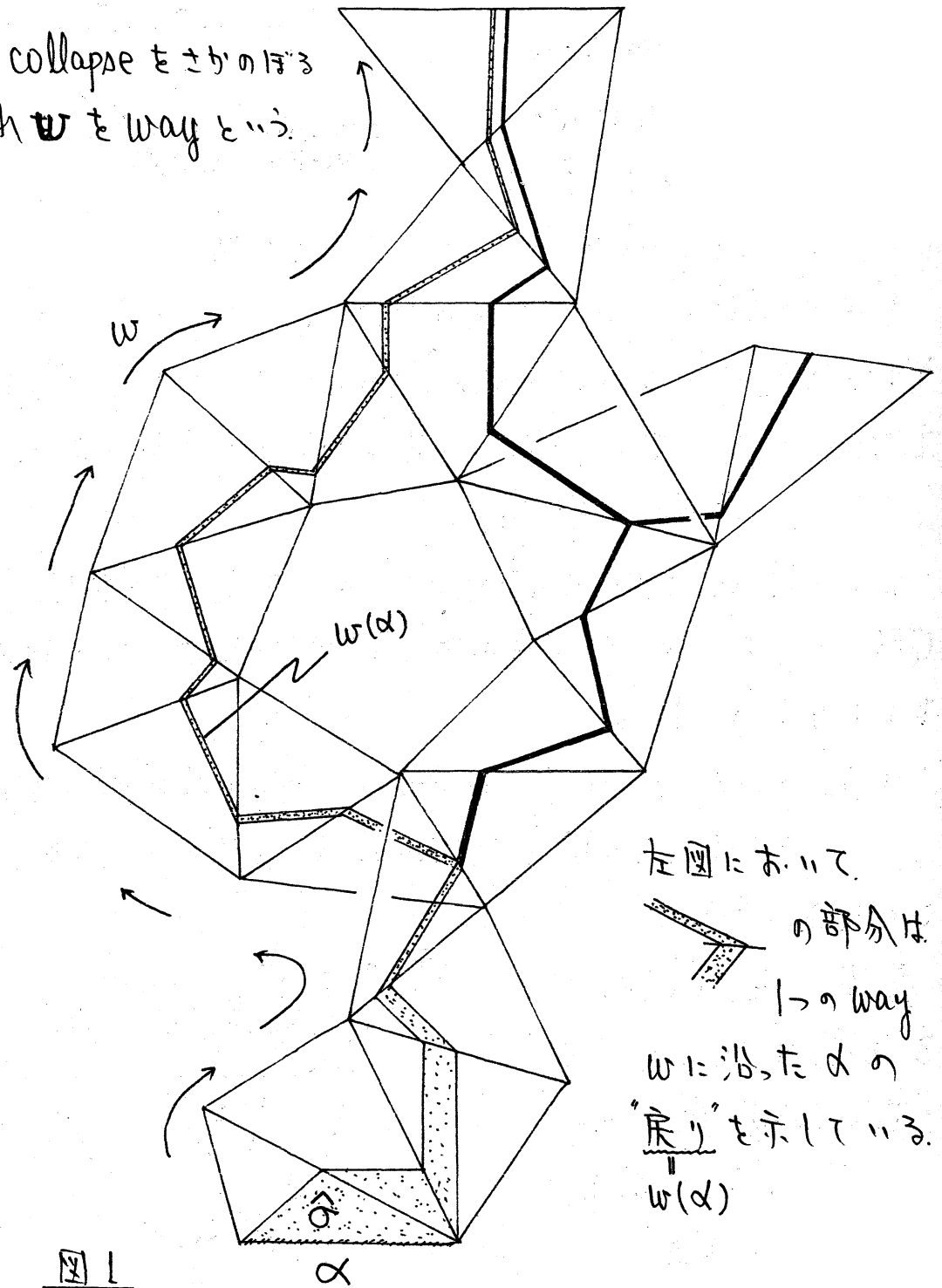
2-ball in $\dot{A}$ である,

$\cdot \alpha \in \dot{A}$ である.

ことを示す.



* collapse をさかのぼる
流れ w を way という



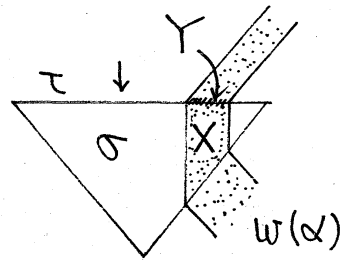
左図において、
の部分は
1つの way
 w に沿った α の
“底”を示している。
 $w(\alpha)$

α の逆像は 先ず σ から 順次 2-rooms をさかのぼってゆく. α を河川として, 1→1→ 支流を選択して源流へたどりつく経路を 2-way といい. 全体としてそれは Tree の構造をもつ (図1参照). この逆像を $w(\alpha)$ とあらわす. 但し w は 1つの 2-way である.

(σ, τ) を w 上の 2-room とするとき

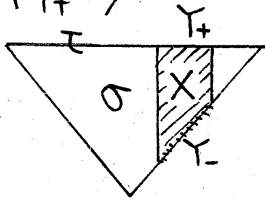
$$X \equiv w(\alpha) \cap \sigma$$

$$Y \equiv w(\alpha) \cap \tau$$

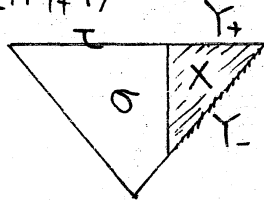


とみると, 下図のような 2つの場合が考えられる.

$$(i) Y_- \cap Y_+ = \emptyset$$



$$(ii) Y_- \cap Y_+ \neq \emptyset$$



* この場合は必然的に $\sigma \cap \alpha \neq \emptyset$

さて 2-way 上の 2-room ~~sigma~~ に対して, この σ 上の (maximal な) 3-way が存在する. かくてそれは

$$\sigma \notin K \Rightarrow \text{丁度 } 2 \rightarrow$$

$$\sigma \in K \Rightarrow \text{丁度 } 1 \rightarrow$$

である. いま Z を σ 上の 1つの (maximal な) 3-way とする. この 3-way Z に従って さかのぼった X の逆像を $Z(X)$ とあらわすことにすると, 次のように

なっている:

① $z(X) = 3\text{-ball}$.

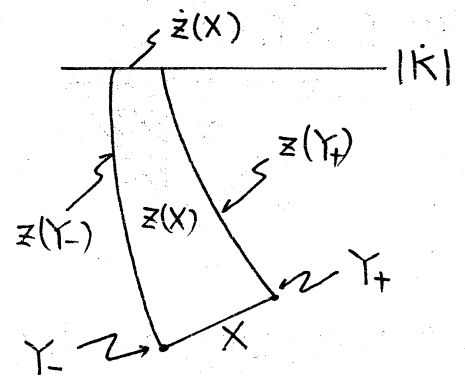
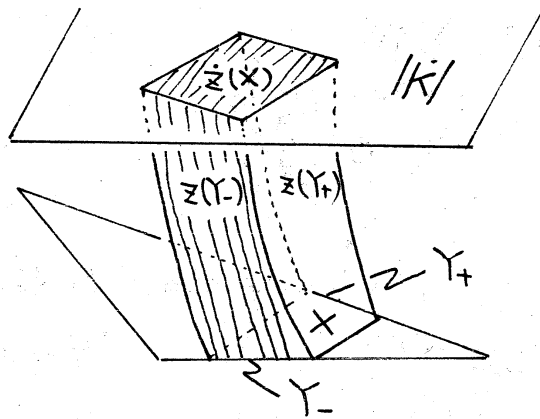
② $z(X) \cap |K| = \partial(z(X)) \cap |K| = 2\text{-ball}$.

* この 2-ball を $\dot{z}(X)$ と書くことにする.

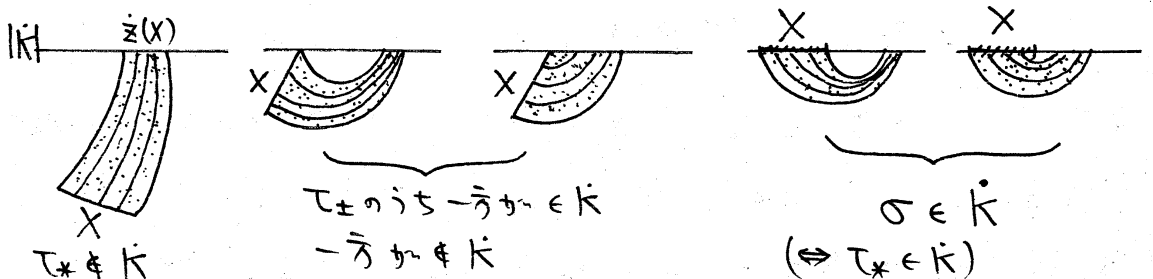
③ $z(Y_*) = \begin{cases} 2\text{-ball, 又は} \\ Y_* \end{cases}$, 但し Y_* は Y_+ 又は Y_- .

④ $X \cup \dot{z}(X) \cup \{z(Y_+) \cup z(Y_-)\}$ は $\partial(z(X)) (= S^2)$ 上の $S^1 \times I$.

この様子を示したものが下の左図であり、 X の幅を無視して、2次元モデルであらわしたものが下の右図である。



$z(X)$ の様子は σ の位置によって見かけ上次の5種がある。



いま σ を 2-way 上の 2-room とし, τ_-, τ_+ をそれぞれ σ の face 上にある entrance とする. とくに τ_+ の方を σ の entrance とする. 代表して τ_* とあらわすことにする. k を τ_* の 1-の vertical 3-room とする. σ の vertical 3-room ρ からスタートして $st(\tau_*, k)$ の中の 3-rooms だけを伝うような k までの 3-way が存在するとき, k は σ に compatible である, ということにしよう.

τ_* の vertical 3-rooms のうち, σ に compatible なものの数を $u(\sigma, \tau_*)$ と書き, $\text{pair}(u(\sigma, \tau_-), u(\sigma, \tau_+))$ を $d(\sigma)$ とあらわす. (正確には $d(w, \sigma)$ と書くべきであろう) $\tau_* \in k$ のとき, 上に dot をつけ, そうでないとき無印とする. たとえば $d(\sigma) = (2, \dot{1})$ ならば $\tau_- \notin k, \tau_+ \in k$ ということである.

Lemma w を maximal な 2-way とし, σ を w 上の 2-room とするとき, $d(\sigma)$ は 次の各場合 1 かない:

(i) σ が w の最後の 2-room であるとき.

$$(\dot{1}, \dot{0}), (\dot{1}, 1), (2, \dot{0}), (2, 1), (2, 1)$$

(ii) σ が w の途中の 2-room であるとき.

$$(\dot{1}, \dot{1}), (\dot{1}, 2), (2, \dot{1}), (2, 2), (2, \dot{2}), (\dot{2}, 2)$$

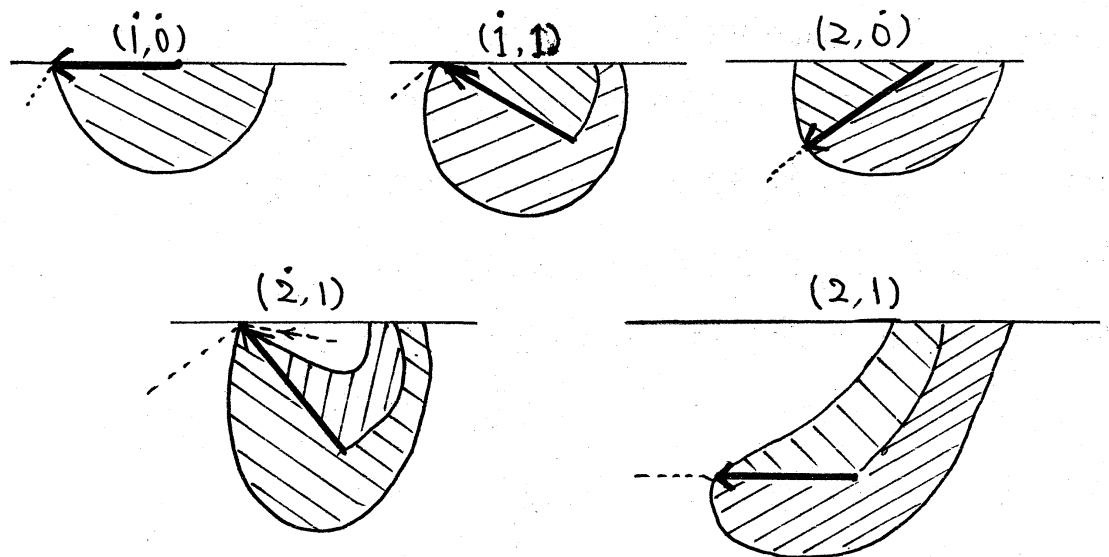
(iii) σ が w の最初の 2-room であるとき.

$$(2, \dot{1}), (2, 2)$$

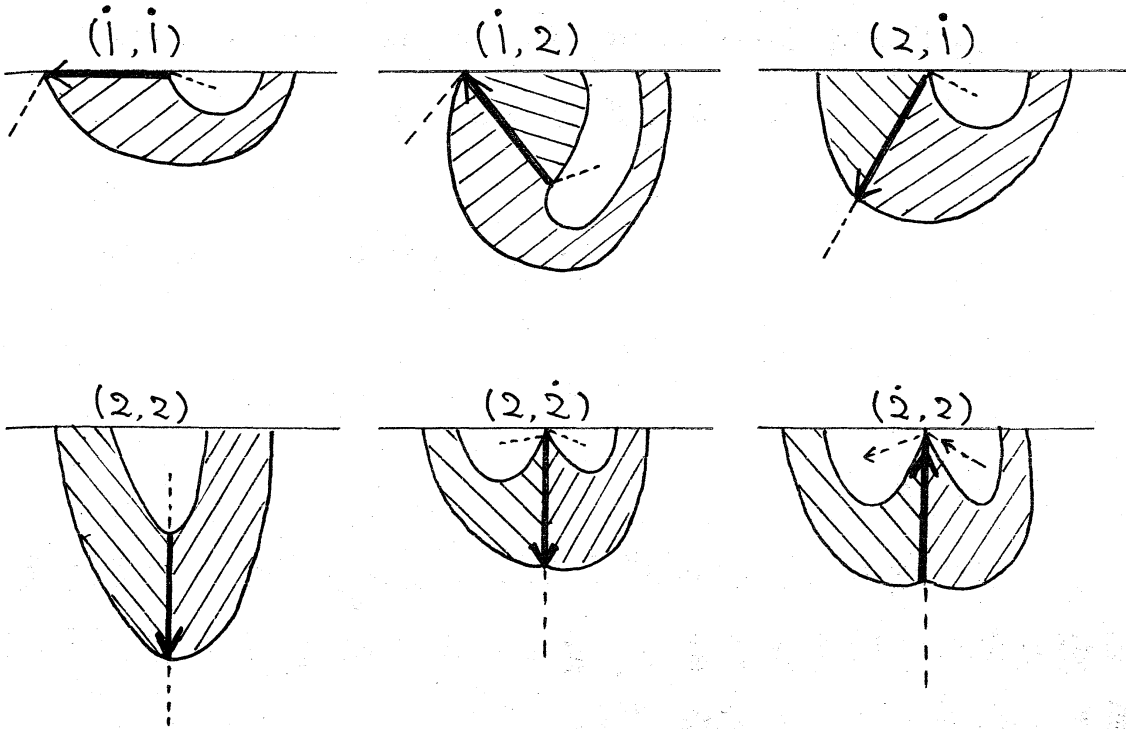
σ は 1- または 2- の vertical 3-room を持ち、 X をこの各 vertical 3-room の方向に戻してやると 3-ball になるが、 Y も併せたものもまた 3-ball になる。このようにして得られる 3-ball と $|K|$ との関係などは Lemma の d(i) の各場合に応じて次の図のようになっている。

図で  は、矢印の方向が collapse の方向、矢印の全体が X 、矢印の始点が Y_+ 、終点が Y_- をあらわす。実線は、その前(又は後)に 2-way が続く様子も暗示したものである。斜線部分が X の戻り 即ち 3-ball である。(図は X 及び Y_* の厚みを無視したもので、1次元低いモデルであらわしてある)。

(1) の場合



(D) の場合



* (A) の 2 ケースは 何れも (D) の場合 に 帰着 される。

これらの 3-ball を 2-way の 終り から 始まり へ
さかのぼって 集めて やれば、定理の結果を得る。

(以上)