

# Parabolic initial-boundary value problems and the asymptotic expansion of fundamental solutions

姫路工大 岩崎千里 (Chisato Iwasaki)

## § 1. Introduction.

$M$  を次元  $n$  の compact Riemann manifold とし,  $\Gamma$  をその境界とする. 次の放物型混合問題について考察する.

$$(B) \begin{cases} Lu = \left( \frac{\partial}{\partial t} + P \right) u(t, x) = 0 & \text{in } (0, T) \times M, \\ Bu(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ u(0, x) = \Phi(x) & \text{in } M. \end{cases}$$

ここで,  $P = -\Delta + P_1$ ,  $P_1$  は一階の微分作用素であり,  $B$  は以下で述べるような退化したものも含む, 境界上の微分作用素とする.

目的は, (B) に対する基本解, 即ち  $LE(t) = 0$ ,  $BE(t) = 0$ ,  $E(0) = I$  を満たす  $E(t)$  を, 応用するのにできるだけ都合の良い形で構成することである. どのような応用かは以下

に述べる.

$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$  を 楕円型境界値問題  $(P, B)$  の固有値とする.

$$T_t(B) = (4\pi t)^{n/2} \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\lambda_j t)$$

とおくと

$$T_t(B) = (4\pi t)^{n/2} \int_M E(t; x, x) dx$$

( $E(t; x, y)$  は  $E(t)$  の kernel)

である.

$t \rightarrow +0$  のときの  $T_t(B)$  の挙動が得られる様な基本解  $E(t)$  もしくは  $E(t)$  の近似を得たい.

境界作用素  $B$  としては, 次の様なものを考察する.

(D) Dirichlet

(N) Neumann

(R) Robin  $B = \frac{\partial}{\partial n} + f(x)$

(O) Oblique  $B = \frac{\partial}{\partial n} + f(x, D)$

$\frac{\partial}{\partial n}$ : 内向き単位法線微分,

$f(x, D)$ :  $\Gamma$  上の複素数係数とするベクトル場,

かつ放物型境界値問題 (See Arima [1]).

以下の (S), ( $\bar{\sigma}$ -N) は [1] の意味では放物型境界値問題

とならない.

(S) Singular  $B = a(x) \frac{\partial}{\partial n} + f(x)$ ,  $0 < a(x) < \infty$ ,

$a(x)$ ,  $f(x)$  には次の仮定をおく.

$$(*) \begin{cases} (1) \, a(x) \geq 0 & x \in \Gamma, \\ (2) \, f(x) < 0 & \text{if } a(x) = 0. \end{cases}$$

( $\bar{\partial}$ -N)  $\bar{\partial}$ -Neumann problem (See [3]).

正確には, これは system に対する問題  
なのだが, 本質的に問題となるのは, Oblique の形があり,  
放物型境界値問題でない.  $Z(q)$  の仮定のもとに簡単のために,  
(0, q)-form の上を考える (See [3]).

## § 2. Results.

得られた基本解を使う,

Theorem 1 (解の存在定理),

(0) ~ (5) については, 任意の  $p$  ( $1 < p < \infty$ ),  $\Phi \in L_p(M)$   
に対して, (B) の解  $u(t) \in C([0, T]; L_p(M))$  が得られ,  
 $u(t) \longrightarrow \Phi$  in  $L_p(M)$ ,かつ  $u(t) \in \bigcap_s H_p^s(M)$  ( $t > 0$ ) を満たす.

Remark. 上の結果は  $a(x)$ ,  $f(x, D)$  又は  $f(x)$  を  $a(x, t)$ ,  
 $f(x, t, D)$  又は  $f(x, t)$  としても同様に得られる.

$T_t(B)$  については,

Theorem 2.  $t \rightarrow +0$  のとき次の漸近挙動を得る.

$$(i) \, T_t(D) = |M| - \frac{1}{2} \sqrt{\pi t} |\Gamma| + c_2 t + O(t^{3/2})$$

$$(ii) \, T_t(N) = |M| + \frac{1}{2} \sqrt{\pi t} |\Gamma| + \tilde{c}_2 t + O(t^{3/2})$$

$$(iii) T_t(R) = |M| + \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}|\Gamma| + \left(\tilde{c}_2 + 2 \int_{\Gamma} f(x) dS\right)t + O(t^{3/2})$$

$$(iv) T_t(O) = |M| + \sqrt{\pi t} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \|f_2\|^2 - \|f_1\|^2 + 2\langle f_1, f_2 \rangle i}} - \frac{1}{2} \right\} dS$$

$$+ O(t), \text{ 且 } f(x, \xi) = f_1(x, \xi) + if_2(x, \xi) \text{ とする.}$$

$$f_j(x, \xi): \text{real}$$

上のいずれの場合も  $T_t(B) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j(B) t^{j/2}$  なる展開が得られる.

$$(v) \Gamma_0 = \{x \in \Gamma: a(x) = 0\} \text{ とすると } |\Gamma_0| > 0 \text{ ならば,}$$

$$T_t(S) = |M| + \frac{1}{2}\sqrt{\pi t} \{ |\Gamma| - 2|\Gamma_0| \} + o(\sqrt{t}).$$

Remark. (i)  $c_2, \tilde{c}_2$  は  $M$ , 及び  $\Gamma$  の curvature を使った正確に書ける. (ii), (iv) において, 境界条件が放物型であることより  $\sqrt{\quad}$  は well defined.

Theorem 3. Levi matrix に関する条件  $Z(q)$  のもとで

$$T_t(\partial-N) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j/2} + \sum_{j \geq 2} c'_j t^{j/2} \log t \quad \text{ある, 特に } (0, q)$$

form 上のものを書くと

$$L_0 = \sqrt{2}^n \left\{ \binom{n/2}{q} |M| + \int_{\Gamma} \tilde{c}_0(x) dS \right\},$$

$$L_1 = -\sqrt{2}^{n-1} \binom{n/2}{q} \frac{\sqrt{\pi}}{2} |\Gamma|, \text{ さらに } \lambda = \frac{n}{2} - 1 \text{ とおくと}$$

$\tilde{c}_0(x)$  は Levi matrix の固有値  $\{c_j(x)\}_{j=1}^{\lambda}$  をつかって, 次の様に表わせる.

$$\tilde{c}_0(x) = \sum_J \int_0^\infty e^{-c_J \mu/2} \frac{\lambda}{\pi} \frac{c_J \mu/2}{\sinh(c_J \mu/2)} d\mu, \quad c_J = \sum_{j \in J} c_j - \sum_{j \notin J} c_j,$$

$J$  についての和は  $J = (j_1, j_2, \dots, j_q)$   $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq \lambda$  の全てを取るものとする.

### §.3. Historical Remarks.

放物型方程式の境界値問題の基本解の構成については, Arima [1] 等の研究があるが,  $T_t(B)$  の漸近挙動に直接に応用できる結果のみに限ると, 方法としては大きく分けて二通りある. オーの方法は, Mackean & Singer [8] が使われた方法で,  $B = D$ ,  $N$  の場合には, 与えられた作用素  $P$  を境界で折りかえして延長して, 初期値問題の基本解を使うもの. このとき, 係数が smooth でなくなる欠点がある. オニの方法は Greiner [4] による,  $(P + \lambda)$  に対して, Dirichlet 問題を解いて, 境界上の擬微分作用素に問題を帰着させる方法である. これはラプラス変換及び Dirichlet 問題を經由するので, 初期値重に対して  $u(t, x)$  がどのような形で求められるのかわかりにくい. [4] では  $T_t(D)$ ,  $M \subset \mathbb{R}^2$  の場合について計算している.

次に, Singular な境界値問題についてみると, 解の存在定理については Itô [5] が  $q(x) = 1 - q(x)$  の時に基本解の

構成をしている。Kannai [7] は compatibility condition もとづきの解の存在定理を証明している。Taira [11] は operator theory による基本解の存在を示している。一方 Mizohata [9] は仮定 (\*) が (B) が  $H^\infty$ -well posed であるための必要十分条件であることを示している。又、 $T_t(S)$  については Taira [10] に  $\phi$ -項が  $|M|$  である事は示されている。

$T_t(\bar{\sigma}-N)$  については, Beals & Stanton [2] により

$$C_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (C_j + C'_j \log t) t^{j/2}$$

の展開を持つ事は示されていて、 $C_0$  の計算はされている。彼らの方法は、この節で述べた  $\phi$  の方法による。

#### §. 4. Sketch of construction of the fundamental solution.

作用素  $P$  の係数の regularity を保ち、さらに  $t$  によるラプラス変換を経由しない基本解の構成方法の概要を述べるのがこの節の目的となる。

結果は大ざっぱに述べると、 $E(t) = U(t) + V(t)$  として得られる。 $U(t)$  は初期値問題の基本解、これは擬微分作用素となる事は知られている [12]。  $V(t)$  は境界  $\Gamma$  上の擬微分作用素であり、normal 方向には、擬微分作用素又は、積分作用素である。

まず、放物型であるので、局所的に近似基本解を構成

すれば, あとは積分方程式に帰着できるので, 局所的に考える  
と十分である.  $\Omega$  を十分小さくとり,  $\Omega \cap M$  は  
 $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x') : x_1 > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ ,  $\Omega \cap \Gamma$  は  $\mathbb{R}^{n-1} = \{(0, x') : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$   
とみなせる.

Definition 1.  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$  に対し

$$\varphi(x_1, x') = \begin{cases} \varphi(x_1, x') & x_1 \geq 0, \\ 0 & x_1 < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x_1, x') = \begin{cases} 0 & x_1 \geq 0, \\ \varphi(-x_1, x') & x_1 < 0 \end{cases},$$

と定義する.

[オイ段] 初期値問題の基本解  $U(t)$ , 即ち

$$\begin{cases} LU(t) = 0 & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ U(0) = I & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

は  $t$  を助変数とする擬微分作用素であり, その表象  $u(t)$   
は  $t \geq 0$  で  $S_{1,0}^0$  に属し,  $t > 0$  では  $S^{-\infty}$  に属し, さらに次の展開  
を持つ (See [12]).

$$u(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} u_{-j}(t), \quad u_{-j}(t) \in S_{1,0}^{-j} \quad \text{かつ} \quad u_0(t) = \exp(-|x|^2 t),$$

$$u_{-j}(t) = f_{-j}(t) u_0(t), \quad f_{-j}(t) \text{ は } t, x \text{ に関する多項式である}$$

その次数を  $d$ ,  $\alpha$  とすると  $|\alpha| - 2d \leq -j$  である.

[\*2段]  $E(t)\tilde{\Phi} = U(t)\tilde{\Phi} + V(t)\tilde{\Phi}$  とし解を求めるため

には

$$\begin{cases} LV(t) = 0 & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}_+^n, \\ \mathcal{B}V(t)\tilde{\Phi} \Big|_{x_1=0} = -\mathcal{B}U(t)\tilde{\Phi} \Big|_{x_1=0} & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}_+^{n-1}, \\ V(0)\tilde{\Phi} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^{n-1} \end{cases}$$

を満たすといふ。例えば  $p = p_2 = \xi_1^2$  のとき,  $u(t) = \exp(-\xi_1^2 t)$ ,

(D) のとき  $v(t) = -u(t)$ , (N) のとき  $v(t) = u(t)$  とすればよい

が, 一般には  $V(t)$  は擬微分作用素<sup>2)</sup>はあり得ない。  $t > 0$  で

$u(t) \in \mathcal{S}^{-\infty}$  である事に注意して, 次の Proposition を使う。

Proposition 1.  $m(x, \xi) \in \mathcal{S}^{-\infty}$  ならば

$$m(x, D_1, D') f \Big|_{x_1=0} = m(x, -D_1, D') \tilde{f} \Big|_{x_1=0}$$

よって,  $\sigma(\mathcal{B}U(t)) \Big|_{x_1=0} = g(t, x', \xi_1, \xi')$  とすると,  $V(t)$

の表象  $v(t)$  は形式的には,

$$(*) \quad \begin{cases} L \circ v(t) = 0, \\ \sigma(\mathcal{B} \circ v(t)) \Big|_{x_1=0} = -g(t, x', -\xi_1, \xi') \end{cases}$$

かつ

$$V(t)\tilde{\Phi} \Big|_{t=0} = 0 \quad x_1 > 0$$

を満たせばよい.

[オ3段] 以下 (O) の場合について述べる. (R) については  $f(x', \xi')$  の代わりに  $f(x')$  とすればよい. (D), (N) の場合には,  $f \equiv 0$  として考えるとよい. さらに (S) の問題については, 後で注意を述べる.

座標系をうまくとって, 表象を

$$(4.1) \quad \begin{cases} \sigma(p_2)|_{\Gamma} = \alpha(x')\xi_1^2 + \beta(x', \xi') \\ \sigma(\beta) = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{f(x', \xi')}{\sqrt{\alpha(x')}} \end{cases}$$

と仮定してよい. さらに境界条件が放物型であるのから, 次を満たす正数  $C$  が存在する.

$$\operatorname{Re} f(x', \xi') > 0 \text{ ならば, } \operatorname{Re} \{ \beta(x', \xi') - f^2(x', \xi') \} > C|\xi'|.$$

以下, 簡単のために  $\alpha(x') \equiv 1$  とする.

(4) を解くために作用素を導入する.  $L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + D_{x_1}^2$ ,

$$B^0 = \frac{\partial}{\partial x_1} + f(x', \xi'), \quad w_0 = e^{-\xi_1^2 t}, \quad W_0 \text{ を } w_0 \text{ を表象とする擬}$$

微分作用素とすると, 明らかに

$$\begin{cases} L^0 W_0 = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ W_0 \tilde{f}|_{t=0} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

を満たす.

Definition 2.  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $j \geq 0$  に対し  $w_{j,0} = (i\xi_1)^j w_0$ ,  $w_{0,0} = w_0$ .

$W_{j,0}$  は表象を  $w_{j,0}$  に持った擬微分作用素とする.

$j \geq 1$  に対し

$$w_{j,0}(t, z) = -\frac{(2\sqrt{t})^{j-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(\sigma + \frac{z}{2\sqrt{t}})^2} \frac{(-\sigma)^{j-1}}{(j-1)!} d\sigma,$$

$m \geq 1$  のとき

$$w_{0,-m}(t, z; x', \xi') = -\frac{(2\sqrt{t})^{m-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(\sigma + \frac{z}{2\sqrt{t}})^2 + 2\sqrt{t}\sigma} \frac{(-\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} d\sigma,$$

$j \geq 1$ ,  $m \geq 1$  のとき

$$w_{j,-m}(t, z; x', \xi') = \frac{(2\sqrt{t})^{j+m-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{(-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} d\tau \int_0^\infty e^{-(\sigma + \frac{z}{2\sqrt{t}} + \tau)^2 + 2\sqrt{t}\sigma} \frac{(-\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} d\sigma$$

とする.  $m \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} (W_{0,-m} \tilde{f})(x, x', \xi', y') &= \int_{-\infty}^\infty w_{0,-m}(t, x_1 - y_1, x', \xi') \tilde{f}(y_1, y') dy_1 \\ &= \int_0^\infty w_{0,-m}(t, x_1 + y_1, x', \xi') f(y_1, y') dy_1 \end{aligned}$$

が定義される積分作用素とする.  $W_{-j,0}$ ,  $W_{-j,-m}$  についても同様に定義する. このとき,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $m = 0, -1, -2, \dots$  に対し,

Proposition 2. Definition 2 による  $W_{j,m}$  は

$$\begin{cases} L^0 W_{j,m} = 0, & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}_+^n \\ \partial_{x_1} W_{j,m} = W_{j+1,m}, & B^0 W_{j,m} = W_{j,m+1} \\ W_{j,m} \tilde{f} \Big|_{t=0} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \end{cases}$$

も満たす.

Definition 3.  $\mathcal{H}_\Delta$  を次の元の有限個の線形結合全体とする.

$$\{ t^d x_1^\lambda q(x', \xi') w_{j,k} e^{-\beta t} ; d, \lambda \geq 0, \text{ integers, } q \in S_{1,0}^r(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\text{ but } j+k+r-\lambda-2d \leq \Delta \}$$

$$w = \psi w_{j,k} \in \mathcal{H}_\Delta \text{ に対し}$$

$$(W \tilde{\varphi})(x_1, x') = (2\pi)^{-(n-1)} \iint_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x'-y') \cdot \xi'} \psi(t, x_1, x', \xi')$$

$$\times (W_{j,k} \tilde{\varphi})(t, x_1; x', \xi', y') dy' d\xi'$$

と定義する.

Remark. (i)  $u_0(t) \Big|_{x_1=0} = w_{0,0} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_0,$

(ii)  $u_{-\Delta}$  を  $x_1=0$  上 Taylor 展開すると,  $u(t) \sim \sum_{\Delta=0}^{\infty} \tilde{u}_{-\Delta}(t)$

$\tilde{u}_{-\Delta} \in \mathcal{H}_{-\Delta}$  が得られる.

Proposition 3.  $w \in \mathcal{H}_\Delta$  ならば  $\partial_{\xi'}^\alpha \partial_x^\beta w \in \mathcal{H}_{\Delta-|\alpha|}$ .

Proposition 4.  $\forall h \in \mathcal{H}_\Delta, \forall g \in \mathcal{H}_{\Delta-1}, \forall N \exists w \in \mathcal{H}_{\Delta-2}$ .

such that 
$$\begin{cases} LW \equiv H \pmod{\mathcal{H}_{\Delta-N}}, \\ BW|_{x_1=0} \equiv G|_{x_1=0} \pmod{\mathcal{H}_{\Delta-N-1}}. \end{cases}$$

明らかに

Proposition 5.  $w \in \mathcal{H}_\Delta$  ならば

$$\lim_{t \rightarrow +0} W_t^\gamma = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}_+^n.$$

Proposition 4 の証明の Sketch.  $(x', \xi')$  を助変数として,  $x_1, t$  を変数とする作用素  $L^0, B^0$  について考える. その積を  $*$  で表わす.

(I)  $h=0, g = \frac{t^d}{d!} g_{j,k} w_{j,k} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_{\Delta-1}$  とすると  $w_1 = \frac{t^d}{d!} g_{j,k} w_{j,k-1} e^{-\beta t}$  とおくと,  $w_1 \in \mathcal{H}_{\Delta-2}$  かつ

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * w_1 = \begin{cases} \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} g_{j,k-1} w_{j,k-1} e^{-\beta t} & d \geq 1 \\ 0 & d = 0 \end{cases} \\ B^0 * w_1 = G \end{cases}$$

であるから, (i)  $d=0$  ならば解が得られた. (ii)  $d \geq 1$  ならば  $g=0$  の問題に帰着できた.

(II)  $h = \frac{x_1^l}{l!} g w_{j,k} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_\lambda$ ,  $g=0$  とすると,  $w_1 = -\frac{x_1^{l+1}}{2(l+1)!} g w_{j-1,k} e^{-\beta t}$  とおくと,  $w_1 \in \mathcal{H}_{\lambda-2}$  かつ

(i)  $\lambda = 0$  ならば

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * W_1 = H, \\ \beta^0 * W_1 \Big|_{x_1=0} = -\frac{1}{2} g w_{j-1,k} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_{\lambda-1}. \end{cases}$$

より  $W = W_1 + W_2$  とし,  $W_2$  を求める事は (I) に帰着できる.

(ii)  $\lambda \geq 1$  ならば

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * W_1 = -\frac{1}{2} \frac{x_1^{l-1}}{(l-1)!} g w_{j-1,k} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_\lambda, \\ \beta^0 * W_1 \Big|_{x_1=0} = 0, \end{cases}$$

とな,  $\lambda$  に関する帰納法が使える.

(III)  $h = \frac{t^d}{d!} \frac{x_1^l}{l!} g w_{j,k} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_\lambda$ ,  $g=0$  ( $d \geq 1$ ) のとき, (I)(II) により得られた  $\tilde{h}$  に対する解を  $w_1$  とする. 但し  $h = \frac{t^d}{d!} \tilde{h}$  とする.

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * W_1 = \tilde{H}, \\ \beta^0 * W_1 \Big|_{x_1=0} = 0. \end{cases}$$

このとき  $\tilde{w}_1 = \frac{t^d}{d!} w_1 \in \mathcal{H}_{\lambda-2}$  は

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * \tilde{W}_1 = H + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} W_1, \\ \beta^0 * \tilde{W}_1 \Big|_{x_1=0} = 0 \end{cases}$$

を満たすので,  $d$  に関する帰納法が使える.

(IV) (I) ~ (III) より

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * W = H \\ \beta^0 * W|_{x_1=0} = G \end{cases}$$

から  $x'$  についての擬微分作用素として考えると

$$\begin{cases} L \cdot W \equiv H \pmod{\mathcal{H}_{\Delta-1}} \\ \beta W|_{x_1=0} \equiv G \pmod{\mathcal{H}_{\Delta-2}} \end{cases}$$

この操作をくり返すと Proposition 4 が得られる。

[オ4段]  $\mathcal{H}_\Delta$  の作用素に対して、次の  $\Rightarrow$  の Proposition が得られる。

Proposition 6.  $W \in \mathcal{H}_\Delta$  に対して、

$$(W\varphi)(t, x_1, x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \tilde{w}(t, x_1, x+y_1, x', \xi) e^{i(x'-y')\xi'} \varphi(y_1, y') \\ \times dy_1 dy' d\xi' \text{ とすると}$$

正数  $C, \delta$  があつて

$$|\tilde{w}(t, x_1, z; x', \xi)| \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\Delta+1} \exp\left(-\frac{\delta z^2}{t} - \delta |\xi'|^2 t\right)$$

をみたす。

Proposition 7.  $W \in \mathcal{H}_\Delta$  とすると  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{w}(t, x_1, 2x_1, x', \xi') d\xi' dx_1 \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{n-1+s}$$

が成り立つ。

$$g = \sigma(BU(t)) \Big|_{x_1=0} \text{ に対し, } -g(t, x', -\xi_1, \xi') \equiv (i\xi_1 - f)w_{0,0}e^{-\beta t}$$

(mod  $\mathcal{H}_0$ ) より (\*) の解  $u(t) = v_0(t) + v_{-1}(t) + \dots$  , が帰納的に求められる.  $v_0(t) = (w_{0,0} - 2f w_{0,-1})e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_0$ ,  $v_{-j}(t) \in \mathcal{H}_{-j}$  がある.

次に Singular な問題については,  $B^0 = a(x') \frac{\partial}{\partial x_1} + f(x')$  があるから,  $m \geq 1$  について,

$$w_{0,-m}(t, z; x', \xi') = - \frac{(2\sqrt{t})^{m-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(a\sigma + \frac{z}{2\sqrt{t}})^2 + 2f\sqrt{t}\sigma} \frac{(-\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} d\sigma$$

とすると,  $a(x'), f(x')$  に対する仮定 (\*) (i), (ii) より上記の積分は well-defined となる. (0)  $B u \in (R)$  の場合と同様の手順で基本解の構成ができる. 最後に  $\bar{\partial}$ -Neumann problem に代表される degenerate な境界値問題の取り扱いを論じる.

### §. 5. degenerate boundary value problem

ここで degenerate とは放物型境界値問題の意味で退化. 即ち, 局所座標系をとると (4.1) のもとで次を満たす  $(x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$  が存在することという.

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \bar{f}(x^0, \xi^0) > 0, \\ \operatorname{Re} \{ \beta(x^0, \xi^0) - \bar{f}^2(x^0, \xi^0) \} = 0. \end{cases}$$

この場合には  $e^{-\beta t} \omega_{0,-1}$  が  $(x^0, \xi^0)$  については  $\xi'$  について良い評価は望めない. §4 の [オ1段], [オ2段] はそのまゝであるが, [オ3段] 以降は修正を必要とする.

$\bar{\partial}$ -Neumann problem は局所座標系を適当にとると, 次の形になる.  $q_2 = p_2|_{x_1=0}$ ,  $q_1 = p_1|_{x_1=0} + \partial_{x_1} p_2|_{x_1=0} x_1$  とすると

$$q_2(x', \xi) = \left\{ \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \bar{f}^2) + \sum_{j=1}^{\ell} |z_j|^2 \right\} I_N,$$

$$q_1(x', \xi) = \mathcal{L} \bar{f} - B \bar{f} + \gamma \bar{f} (\bar{f} x_1 - \frac{1}{2}) + A (i \xi_1 + \bar{f}),$$

$$\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{f} - B$$

$x = x'$ ,  $\bar{f} = \bar{f}(x', \xi)$ ,  $z_j = z_j(x', \xi)$  は  $\xi'$  に関して一次の多項式,  $z_j, \bar{z}_j$   $j=1, \dots, \ell$ ,  $B, \gamma, \bar{f}$  は一次独立な  $T^*(\mathbb{R}^{n-1})$  を張る. ( $\ell = \frac{n}{2} - 1$ )  $\mathcal{L}$  は Levi-form.  $A = A(x')$ ,  $B = B(x')$  は  $N \times N$  行列,  $I_N$  は  $N \times N$  単位行列,  $\gamma = \gamma(x')$  は関数である. ( $N = \binom{\ell}{q}$ )

$$\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{f} \text{ であるから, } \beta = \frac{1}{2} \bar{f}^2 + \sum_{j=1}^{\ell} |z_j|^2 \text{ であるから,}$$

$$\Sigma_+ = \{ (x', \xi') \in T^*(\mathbb{R}^{n-1}) : \xi' \neq 0, \bar{f}(x', \xi') > 0, z_j(x', \xi') = 0, \forall j \} \neq \emptyset$$

である. 即ち, degenerate boundary problem である.

Remark. system のある成分について上記の様にたゞ、  
他の成分については Dirichlet problem である。

$$(5.1) \quad \mathcal{L}(x', \xi') = \sum_{j=1}^p |z_j(x', \xi')|^2 I_N + r_1(x', \xi')$$

とおくと  $\mathcal{L}(x', \xi')$  の主部は  $\sum$  で消えていき、次が残りたつ。

Theorem 4 (See [6]). (5.1) で定義した  $\mathcal{L}(x', \xi')$  が

$$(5.2) \quad \min_{1 \leq j \leq N} \{ \operatorname{Re} \mu_j(x', \xi') \} + \frac{1}{2} t_2^+ m \geq C |\xi'| \quad \text{on } \left\{ z_j(x', \xi') = 0 \right\}_{\forall j},$$

を満足すれば、

$$\begin{cases} \left[ \frac{d}{dt} + \mathcal{L}(x', D') \right] u = 0 & \text{in } t > 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \\ u|_{t=0} = \bar{\Phi} & \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

の基本解  $K(t)$  が擬微分作用素として構成でき、その表象  
 $k(t) \in S_{1/2, 1/2}^0$  は次の展開をもつ。

$$k(t) \sim k_0(t) + k_1(t) + \dots$$

$$k_0(t) = e^\varphi \quad \text{であって} \quad k_{-j}(t) = f_{-j}(t) e^\varphi \quad \text{とするとき}$$

$$\exists \varrho_j \text{ s.t. } |f_{-j}(t)| \leq C t^{j/2} (-\varphi)^{\varrho_j},$$

但し  $\varphi$  は次の式により定義されるもの。

$$\varphi = \left\{ -\frac{t}{2} \left\langle \begin{bmatrix} Z \\ \bar{Z} \end{bmatrix}, f_0(mt/2) \begin{bmatrix} Z \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \right\rangle - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\log [\cosh (mt/2)]) \right\} I_N - r_1 t,$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, f_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \tanh \lambda, m = i X^* J X, X = [\nabla z_1 \dots \nabla z_n, \nabla \bar{z}_1 \dots \nabla \bar{z}_n]$$

$$\nabla z_j = \begin{bmatrix} \nabla_x z_j \\ \nabla_y z_j \end{bmatrix}, \operatorname{tr}^+ m \text{ は } m \text{ の正の固有値の和, } \mu_j(x', y') \text{ は } r_1(x', y') \text{ の}$$

固有値とする.

Remark. (5.2) より 正数  $\varepsilon$  があつて

$$\operatorname{Re} \{ \varphi \text{ の固有値} \} \leq C \left\{ -\sum_{j=1}^n |z_j|^2 t - |\tilde{t}| t \right\}, \text{ 従つて } k(t) \in S^{-\infty} (t > 0).$$

Lemma. 特に  $r_1 = 2\tilde{t}$  とすると

$$\tilde{t} > 0 \text{ のとき (5.2) を満たす} \iff Z(q) \text{ をみたす.}$$

従つて  $Z(q)$  のもとで  $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{P}$  が構成できる;

$\bar{\partial}$ -Neumann problem の場合には  $e^{-\beta t}$  の代りに Theorem 4 によつて構成された基本解の  $\mathcal{O}(1)$ -近似  $e^{\varphi}$  を使う.

$\tilde{w}_{j,k} = w_{j,k} e^{-\frac{1}{2}\tilde{t}^2 t}$  とする.  $\mathcal{H}_0$  の代りに  $k=0, -1$  に対し.

Definition 3'  $q_{\alpha, r, k}$  を次の元の有限個の線形結合全体とする.

$$\left\{ t^d x_1^{l_1} y_1^{l_2} g(x') \cdot \frac{\tilde{z}^{\alpha}}{t} \bar{z}^{\beta} g(mt) \tilde{w}_{j,k} \in \mathcal{P}; d, l_1, l_2 \geq 0 \text{ integers,} \right. \\ \left. g \in B^\infty, |\partial_x^\alpha g(x)| \leq C(1+|x|)^{k+|\alpha|}, \text{ 且 } |\alpha|+|\bar{\alpha}|+|\beta|+j-l_1-l_2-2d \leq \delta, \right. \\ \left. |\alpha|+j-l_1-l_2 \leq r \right\}$$

Proposition 3'  $w \in g_{\delta, r; -1} \text{ なら } \tilde{w}$

$$\partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_x^{\beta} w \in \{ g_{\delta-|\alpha|, r+|\beta|; -1} + g_{\delta-|\alpha|-1, r+|\beta|-1; 0} \}$$

この  $g_{\delta, r; k}$  の元に関する Proposition 5 は明らかに成立し, Proposition 4 と同様に帰納的に近似解が求められる事がわかる.  $v(t)$  が  $g_{\delta, r; k}$  の和で近似できる. [第 4 段] の Proposition 6, 7 に対応して  $r$  の Proposition を得る.

Proposition 6'  $w \in g_{\delta, r; k}$  なら  $\tilde{w}$  の kernel  $\tilde{w}$  は

$$|\tilde{w}(t, x_1, y_1, z; x', \xi')| \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{1+\delta+k} \exp \left[ -\frac{\delta z^2}{t} - \delta |\xi'|^2 t \right]$$

$$\text{if } k=0, \text{ 又は } k=-1, t \leq 0,$$

$$|\tilde{w}(t, x_1, y_1, z; x', \xi')| \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\delta+r_+} \exp \left[ -\frac{\delta z^2}{t} - \delta \sum_{j=1}^d |z_j|^2 - \delta t \right]$$

$$\text{if } k=-1, t > 0$$

を満たす. 但し  $r_+ = \max(r, 0)$ .

Proposition 7'  $w \in g_{\delta, r; k}$  とすると,  $\varepsilon > 0$  に対して

(i)  $k=0$  のとき

$$\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{w}(t, x_1, x_1, 2x_1; x', \xi') d\xi' dx_1 \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1+\delta}$$

(ii)  $k=-1$  のとき

$$\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{w}(t, x_1, x_1, 2x_1; x', \xi') d\xi' dx_1 \leq \begin{cases} C \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-2+\delta+r} & (r>0) \\ C(-\log t) \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-2+\delta} & (r=0) \\ C \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-2+\delta} & (r<0) \end{cases}$$

がなりたつ。

さらに Proposition 7' の (ii) の場合には, 左辺の  $t$  についての展開公式も得られて,  $\log t$  の項の出現するのわかる。

この場合も  $v(t)$  の主要項は  $v_0 = (\tilde{w}_{0,0} - 2\tilde{t}\tilde{w}_{0,-1})e^{\varphi}$  であり, Proposition 7' より  $-2\tilde{t}\tilde{w}_{0,-1}e^{\varphi} \in g_{1,1;-1}$  の部分からの寄与が  $t$  について特異性が一番高くなる。

### References

- [1] R. Arima, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964).
- [2] R. Beals & N.K. Stanton, Comm in Partial Differential Eqs. 12 (1987).
- [3] G.B. Folland & J.J. Kohn, Ann. of Math. Studies 75 (1972).
- [4] P.C. Greiner, Arch. Rational Mech. Anal. 41 (1971).

- [5] S. Itô, Japan J. Math. 27 (1957).
- [6] C. Iwasaki, Osaka J. Math. 21 (1984).
- [7] Y. Kannai, Osaka J. Math. 25 (1988).
- [8] H. P. Maclean & I. M. Singer, J. Differential Geometry 1 (1967).
- [9] S. Mizohata, Equations Aux Dérivées Partielles (1983).
- [10] K. Taira, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23 (1976).
- [11] K. Taira, to appear.
- [12] C. Tsutsumi, Proc. Japan Acad. 50 (1974).