数理解析研究所講究録
第1567巻 2007年 86-91

チャネル流における秩序構造と対称性

*関西大学　システム理工学部　板野智昭
Faculty of Engineering Science, Kansai University
**京都大学大学院　理学研究科　藤定義
Department of Physics and Astronomy, Graduate School of Science, Kyoto University
***ウィスコンシン大学　Fabian Waleffe
Department of Mathematics & Engineering Physics, University of Wisconsin
****京都大学大学院　理学研究科　佐藤海
Department of Physics and Astronomy, Graduate School of Science, Kyoto University

圧力勾配によって駆動される2平板間流れ（チャネル流）の定常進行波解を数値的に求めた．求解には仮想的な外力を導入することによる解の連続的な接続法とニュートン法による数値計算を用いた．手法に,Waleffe(2003)[Phys. Fluids. 15(6) 1517] とは異なる対称性を適用することで新たな解を求めることに成功した．

はじめに

科学的に未知の現象や複雑な問題に対し,それを要素に分解し,要素の運動法則を数学的に記述した後,要素を重ね合わせて現象を再構築する～たとえば古典原子論から現代物理の素粒子論に至るまで例に事欠かないように,この手法は,科学者が未知の現象を理解する上でここ数百年使いつづけてきたパラダイムである．古くさいが,これほど科学者にとって分かりやすく,それ故に陥りやすい思想はない．ただし要素の重ね合わせが成り立つのならばであるが…．

そういう意味で,チャネル流の数値計算と言えば,高度な計算機を用いて大きなドメイン内での高いレイノルズ数の乱流データから限りなく現実に近い統計や構造を取り出すことに多くの研究者が執心していた60年代から70年代にあって,Jimenez & Moin によるチャネル乱流の研究[1]は異彩を放っている．彼らはミニマルユニットとよばれる小さな周期ドメインを用い,低レイノルズ数において乱流が維持できる最小のドメインサイズの計測を行った．その研究の中で彼らは乱流を維

*〒564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35
**〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
***
****〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

持できるドメインサイズの最小値が壁近傍の秩序構造程度のスケール程度であることを示した. チャネル乱流のデータの海を前に, 乱流は乱流そのものとして, あるいは乱流強度や構造関数にはじまる統計データをとおして, 多くの研究者が" 流れを理解しよう" としていた数十年前に, これはある意味で「流れの原子論」とも言えないだろうか.

流体現象では非線型性が重要であることは百も承知の上で, 我々が現在行っている Jimenez らの流れの原子論のより大きなレイノルズ数への拡張について紹介する. 具体的には, Waleffe(2003)[2, 3] に倣ってミニマルユニット内における定常進行波解を, 大きなレイノルズ数で, あるいは異なる対称性で求める. 流れに重ね合わせは成り立たないので結果を鵜呑みにしてはならないが, 実験的な取り組みとして一見の価値はあるかもしれない.

以下ではまず対象とする問題の方程式について述べる. 今回の研究で特に新しい点は, 異なる二つの対称性に対し解を得た点である. 一つは既に Waleffe が過去の研究で用いた対称性だが, 二つ目のは今回全く新しく導入した対称性である. 当然ながらいずれの対称性も, 支配方程式と矛盾はしない. 続いて得られた解とその分岐図を示した後, 今後の研究の方向性について述べる.

数値計算法

支配方程式

無限に広い平行平板間 $(-1 < y < 1)$ を満たす非圧縮性のニュートン流体を考える. 適当な無次元化により次のような支配方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 \ , \\ \partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \frac{1}{\mathrm{Re}_P}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \ . \end{aligned}$$

壁面で粘着条件, 主流方向 (x) およびスパン方向 (z) に流れは周期的であることを仮定する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x+L_x,y,z) &= \boldsymbol{u}(x,y,z) \ , \\ \boldsymbol{u}(x,y,z+L_z) &= \boldsymbol{u}(x,y,z) \ , \\ \boldsymbol{u}(x,-1,z) &= \boldsymbol{u}(x,+1,z) = \boldsymbol{0} \ . \end{aligned}$$

ここで (L_x, L_z) は主流方向およびスパン方向の周期長さとする. また支配方程式の外力項 $\boldsymbol{F}$ は y, z と Re_P, L_z およびパラメター f_r の関数とする.

$$\boldsymbol{F}(y,z;\mathrm{Re}_P,L_z,f_r) = -\frac{2}{\mathrm{Re}_P}\boldsymbol{e}_x + f_r y\cos(\gamma z)\boldsymbol{e}_y - \frac{f_r}{\gamma}\sin(\gamma z)\boldsymbol{e}_z \ ,$$

ただし, $\gamma = 2\pi/L_z$. f_r は, 以降で, Waleffe に倣ってホモトピーを用いて解を接続する際に用いる. 通常我々がチャネル流の解と言う時は, $f_r = 0$ に対する支配方程式を満たす解を意味する.

以下, 我々は支配方程式を満たす定常進行波解を求める. 主流方向の位相速度を c_x とすると, 定義より

$$\partial_t \boldsymbol{u}(x,y,z,t) = -c_x \partial_x \boldsymbol{u}(x,y,z,t).$$

が成り立つ.

更に以下で述べる解の対称性を考慮して, 与えられた境界条件の下に支配方程式を解く. 解くべき場は主流方向とスパン方向にはフーリエ展開, 壁に垂直な方向にはチェビシェフ多項式と $(1-y)^2$ もしくは $(1-y)^4$ の積からなる多項式を用いて表現される. 点会計を支配方程式に代入し, ガラーキン法を用いると, 場の展開係数と c_x を未知数とした二次の非線形代数方程式が得られる. これをニュートン=ラプソン法を用いて数値的に解く.

対称性と結果

解に対称性を課すことで計算負荷を下げるとともに, 解の収束性を高めることができる.

1. upside-down reflection

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_x \\ -u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix}(x,-y,z)\ .$$

2. streamwise translation and spanwise reflection

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -u_z \\ p \end{pmatrix}(x+\frac{L_x}{2},y,-z)\ .$$

3. spanwise translation and upside-down reflection

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_x \\ -u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix}(x,-y,z+\frac{L_z}{2})\ .$$

対称性 (1) と (2) の組を用いて, 適当な初期条件をもとにニュートン法を実施すると, 解が $f_r = 0$ において得られる. 図は解を 3 方向から可視化したものである. 対称性から分かるように, これとは反対側の壁面付近の領域 $(0 < y < 1)$ においては $y = 0$ 面を鏡面として同じ構造が射影されたようになるだけであり, 一部構造を見やすくするため壁面付近の領域 $(-1 < y < 0)$ だけを可視化している.

解のパラメータは $(L_x, L_z) = (2\pi, 0.51\pi)$,$Re_P = 1338$ である. 閾値を 0.40 として速度の主流成分 u の等値面を灰色で表示し, 他方, 閾値を ± 0.20 として渦度の主流方向成分 ω_x の等値面を赤色と青色で表示した. 主流方向の解の位相速度は $c_x = 0.53$ であった. 等値面は流れ場の一面をとらえているに過ぎないが, レイノルズ数の増加にともないストリーク構造 (灰色等値面の凸部分) の波打ちが激しくなる傾向がみてとれた. この対称性の組は Waleffe が Waleffe(2003) の中で用いたものと同じで, 流れの形状などからして同一の分岐だと考えられる.

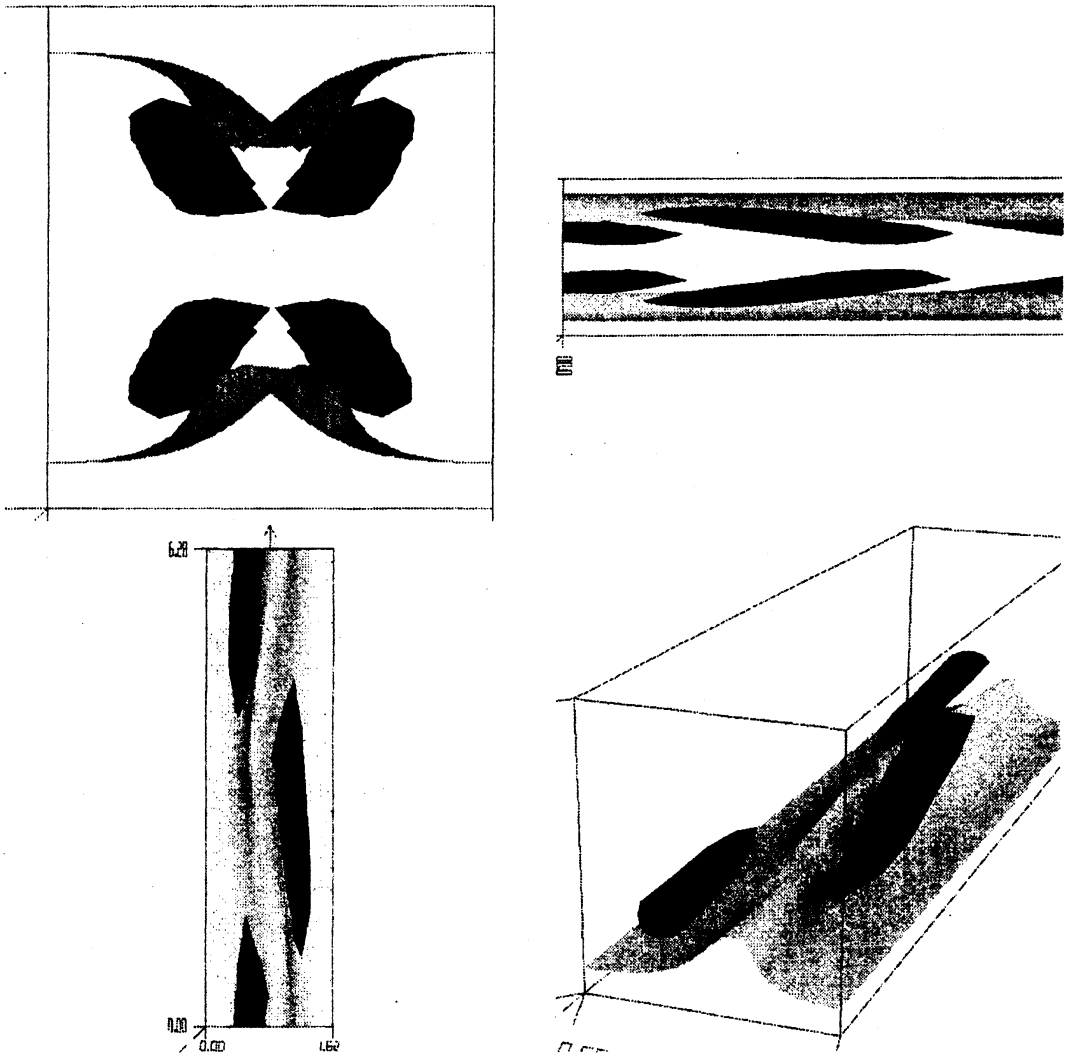

図 1 灰色:速度の主流成分 u の等値面 ($u = 0.4$). 赤/青色:渦度の主流方向成分の等値面 ($\omega_x = \pm 0.2$). 左上:y-z 面での射影, 右上:x-y 面での射影, 左下:x-y 面での射影, 右下:鳥瞰図.

今回新たに対称性 (2) と (3) の組を用いても, 適当な初期条件を与えることで $f_r = 0$ における解を得ることができた. 次にこの解の可視化結果を示す. ここで可視化する解のパラメータは $(L_x, L_z) = (\pi, 0.30\pi)$,$Re_P = 4430$ である. 先に示した解に比べて Re_P が大きいが, 現在まで探索を続けてきた限り, この解は $Re_P = 3500$ 以上で存在するためである. また L_x,L_z ともに先に示した解のそれらのおよそ半分

に相当する点も注意したい．閾値を 0.40 として速度の主流成分 u の等値面を灰色で表示し，他方，閾値を ± 0.20 として渦度の主流方向成分 ω_x の等値面を赤色と青色で表示した．主流方向の解の位相速度は $c_x = 0.30$ であった．

図は先と同様にこの解を 3 方向から可視化したものである．対称性から分かるように，領域 $(0 < y < 1)$ と領域 $(-1 < y < 0)$ ではストリークの位置はスパン方向に半波長ずれた場所に位置する．$y = 0$ 面を鏡面として同じ構造が射影されたようになるだけである．したがって一部の図では位置関係を見やすくするために解を壁面付近の領域 $(0 < y < 1)$ では可視化していない．等値面がいびつになっているが，これは解を表現する上でモード数が足りていない可能性と関係しているかもしれない．今後モード数を増やして再計算を行う必要があるだろう．

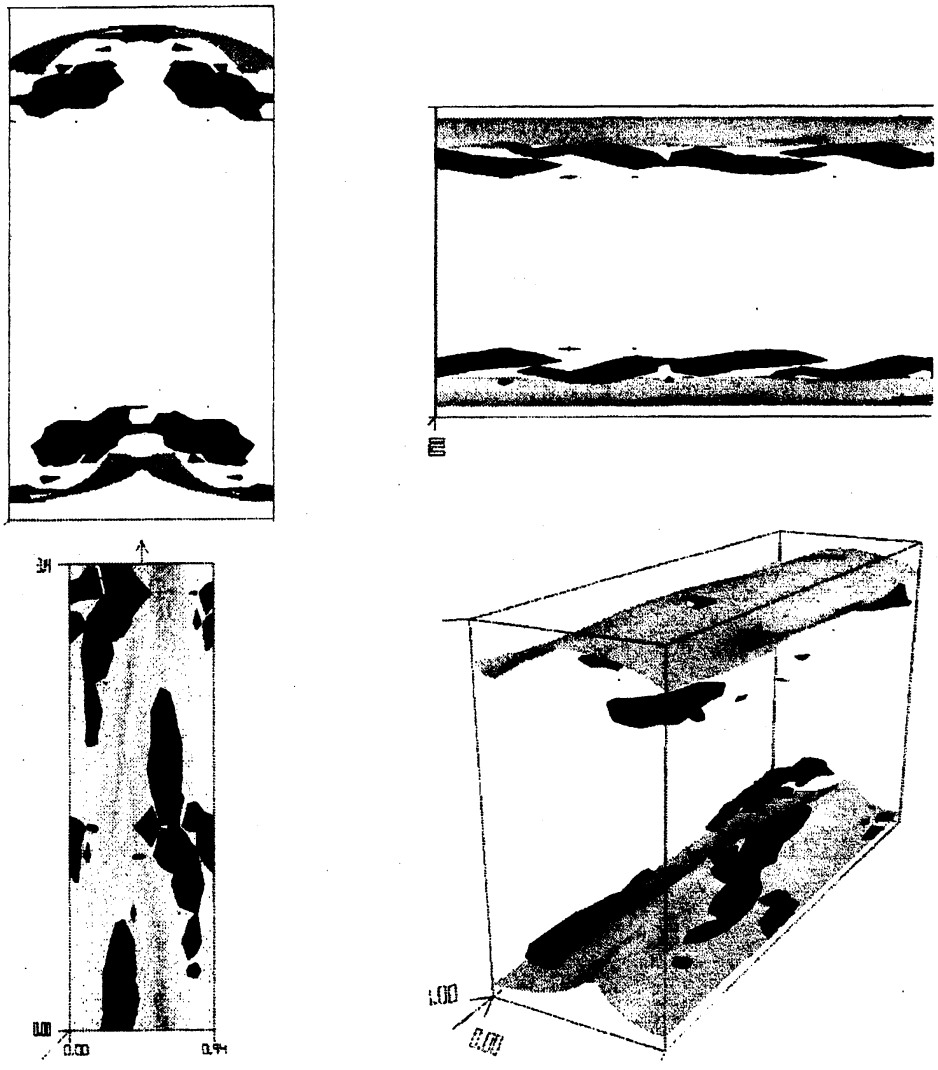

図 2　灰色:速度の主流成分 u の等値面 $(u = 0.2)$．赤/青色:渦度の主流方向成分の等値面 $(\omega_x = \pm 0.4)$．左上:y-z 面での射影，右上:x-y 面での射影，左下:x-y 面での射影，右下:鳥瞰図．

まとめ

ナヴィエストークス方程式に従う非圧縮性流体のチャネル流の解として, 対称性の異なる定常進行波解を数値的に求めた. 二つの対称性のうち, 一つは Waleffe(2003) で用いられた対称性だが, もう一つの対称性は今回の研究で新たに提案された. いずれの解もチャネル乱流中に観察される秩序構造に酷似した流れのパターンを持っていた. 特に後者の解は前者の構造に比べ壁近傍に縦渦が強い領域が集中しており, 乱流中の壁近傍のストリーク構造の模型となる可能性がある.

引 用 文 献

1) Jiménez, J. & Moin, P.: The minimal flow unit in near-wall turbulence, J. Fluid Mech. **225** (1991) 213–240.
2) Waleffe, F.: Exact Coherent Structures in Channel Flow , J. Fluid Mech. **435** (2001) 93–102.
3) Waleffe, F.: Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows , Phys. Fluids. **15(6)** (2003) 1517–1534.