

HILBERT 空間における BASIS の安定性について

東海大学開発工学部 中村 昭宏 (Akihiro Nakamura)
Department of Mathematics
Tokai University

1. INTRODUCTION

Banach 空間 X における点列 $\{x_n\}$ が X の *bounded basis* であるとは、以下の条件を満たすときをいう:

- (i) $\forall x \in X$ について, $x = \sum_n \alpha_n x_n$ と一意にノルム収束で表される.
- (ii) $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$.

収束が和の順序に関係なく収束するときは, *unconditional basis* (X がヒルベルト空間のときは *Riesz basis*), 和が条件収束するときは, *conditional basis* であるという.

本報告では, ヒルベルト空間として, 2 乗可積分空間 $L^2[-\pi, \pi]$ を, $\{x_n\}$ として, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ を採り上げて, Riesz basis と conditional basis のそれぞれの安定性の問題を扱う.

Riesz basis の安定性について, 次の Kadec's 1/4-theorem はよく知られている (see [5, Theorem 1] or [14, ch.1, §9, Theorem 14]) :

Theorem A (Kadec's 1/4-Theorem).

If $\{\mu_n\}$ is a sequence of real numbers for which

$$|\mu_n - n| \leq L < \frac{1}{4}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi, \pi]$.

ここで, 以下で与えられる数列 $\{\lambda_{n,1/2}\}$,

$$\lambda_{n,1/2} = \begin{cases} n - \frac{1}{2}, & n > 0, \\ n + \frac{1}{2}, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える. このとき, 関数系 $\{e^{i\lambda_{n,1/2}t}\}_{n \neq 0}$ は isometric isomorphism,

$$\phi(t) \longmapsto e^{\frac{it}{2}} \phi(t)$$

によって, orthonormal basis $\{e^{int}\}$ を平行移動して得られた basis である. この basis $\{e^{i\lambda_{n,1/2}t}\}_{n \neq 0}$ を用いると, Kadec's 1/4-theorem は以下のように書き換えられる:

Theorem B (Kadec's 1/4-Theorem).

If $\{\mu_n\}_{n \neq 0}$ is a sequence of real numbers for which

$$|\mu_n - \lambda_{n,1/2}| \leq L < \frac{1}{4}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}_{n \neq 0}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi, \pi]$.

次に, 数列 $\{\lambda_{n,\alpha}\}$ を以下のように定義する:

$$\lambda_{n,\alpha} = \begin{cases} n - \alpha, & n > 0, \\ n + \alpha, & n < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

以下, $\{e^{int}\}$ を除いて, “ $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ ” と書くときは $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}_{n \neq 0}$ の意味であるとする. もし, $1/4 < \alpha < 3/4$ ならば Theorem B から, system $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ は $L^2[-\pi, \pi]$ の Riesz basis となることがわかる.

Balan [2] は Fourier frames に関して, 次の安定性の結果を得た.

Theorem C (Balan [2], Theorem 1).

Suppose $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a frame sequence of real numbers for $L^2[-\gamma, \gamma]$ with bounds A, B . Set:

$$L(\gamma) = \frac{\pi}{4\gamma} - \frac{1}{\gamma} \arcsin \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{A}{B}} \right) \right\}.$$

Consider the sequence $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ of complex numbers $\rho_n = \mu_n + i\sigma_n$ such that $\sup_n |\mu_n - \lambda_n| = \delta < L(\gamma)$ and $\sup_n |\sigma_n| = M < \infty$. Then, $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ is a frame sequence for $L^2[-\gamma, \gamma]$.

この定理の証明から, もし, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が Riesz basis ならば, $\{e^{i\rho_n t}\}$ も Riesz basis となることがわかる. この結果は任意の Riesz basis からの安定性の結果を与えるという意味で, Kadec's 1/4-theorem の一般化であると考えられる.

本報告では, まず, (1.2) で与えられる $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ について, Theorem C での bounds A, B を求める. この結果と Theorem C から, $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ についての安定性の結果を求め, さらにそのときの定数が best possible であるかどうかを調べる.

ところで, ヒルベルト空間において, Riesz basis のクラスは非常に大きく, そこでの conditional basis の存在が問題となる. このノートでは, 次に $L^2[-\pi, \pi]$ での conditional basis の安定性の結果を述べる. 関連する結果は [8] で与えられているが, 条件が強いので, もっと弱い条件の下で考察する. ここでは, $\{x_n\}$ として, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ に, ある重み関数 $w(t)$ を乗じた $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}$ を考える. 次の結果

は Babenko によって与えられたヒルベルト空間における最初の conditional basis の例である.

Theorem D ([1, p.160]: see [12, p.428, Example 14.4]).

Let $0 < \beta < 1/2$. Then $\{|t|^{-\beta}e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and $\{|t|^{\beta}e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ are bounded conditional bases for $L^2[-\pi, \pi]$.

この結果は, Hunt, Muckenhoupt, Wheeden [4, Theorem 8] および Kazarian [7], Olevskii [10] によって, 以下のように拡張された:

Theorem E (see [7, p.241]).

2π 周期をもつ $w(t) \geq 0$ について, $\{w(t)e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (または $\{w(t)^{-1}e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$) が $L^2[-\pi, \pi]$ の conditional basis となる必要十分条件は

- (1) $w(t), w(t)^{-1}$ の1つは非有界,
- (2) $w^2(t)$ は (A_2) -condition を満たす.

Theorem D, E は, 関数が 2π 周期であることを仮定しているが, ここでは周期性を仮定しない結果を求める.

2. RIESZ BASIS の安定性

複素数列 $\{\lambda_n\}$ に対して, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が Riesz basis となるときは, 以下の “approximate Parseval’s identity” が成り立つことが知られている (see Young [14, Ch.4, §2]):

There are positive constants A and B depending only on $\{\lambda_n\}$, and not on $f(t)$, such that

$$A \sum |c_n|^2 \leq \|f\|^2 \leq B \sum |c_n|^2 \text{ for } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}.$$

上記の定数 A and B は Riesz basis の bounds と呼ばれる. これらは Theorem C における “frame bounds” に等しいことが知られている. 我々は, まず, (1.2) において与えられた数列 $\lambda_{n,\alpha}$ を用いた, Riesz basis $\{e^{i\lambda_{n,\alpha} t}\}$ について, その bounds A と B を求める. 我々は以下の結果を得る.

Theorem 2.1. Let $\{e^{i\lambda_{n,\alpha} t}\}$ be a Riesz basis where the $\lambda_{n,\alpha}$ are given by (1.2) for $1/4 < \alpha < 3/4$. Then the next inequalities

$$(1 - |\sin(2\alpha\pi)|) \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \neq 0} c_n e^{i\lambda_{n,\alpha} t} \right\|^2 \leq (1 + |\sin(2\alpha\pi)|) \sum_{n \neq 0} |c_n|^2$$

hold for every finite sequence of complex numbers $\{c_n\}$.

この結果と Theorem C から, ただちに以下の結果が得られる.

Corollary 2.1. *Let $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ be a Riesz basis where the $\lambda_{n,\alpha}$ are given by (1.2) for $1/4 < \alpha < 3/4$. If $\{\mu_n\}$ is a sequence of real numbers for which*

$$|\mu_n - \lambda_{n,\alpha}| \leq L < \frac{1}{4} - A(\alpha), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.1)$$

where

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{1 - |\sin(2\alpha\pi)|}{1 + |\sin(2\alpha\pi)|}} \right) \right\},$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi, \pi]$.

Redheffer and Young は Kadec's $1/4$ -Theorem において, constant " $1/4$ " はある意味で best possible constant であることを示した [11, Theorem 4 and Corollary]. そして上記の結果においても, constant " $1/4 - A(\alpha)$ " は, 同じ意味で best possible constant であることが予想される. しかし, 我々は否定的な結論を得る. すなわち, constant " $1/4 - A(\alpha)$ " が best possible constant となるのは, $\alpha = 1/2$ のときに限ることを示す. 我々は次の2つの補題を必要とする.

Lemma 2.1. *If $1/4 < \alpha < 1/2$, then*

$$\frac{1}{2} < \alpha + A(\alpha) < \frac{3}{4}.$$

Lemma 2.2. *If $1/2 < \alpha < 3/4$, then*

$$\frac{1}{4} < \alpha - A(\alpha) < \frac{1}{2}.$$

これら2つの補題を用いて, Corollary 2.1 を強めた以下の結果が得られる:

Theorem 2.2. *Let $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ be a Riesz basis where the $\lambda_{n,\alpha}$ are given by (1.2) for $1/4 < \alpha < 3/4$, $\alpha \neq 1/2$. And let $\{\delta_n\}$ be a sequence of nonnegative numbers for which $\sup_n \delta_n < \alpha + A(\alpha) - 1/2$ for $1/4 < \alpha < 1/2$ and $\sup_n \delta_n < 1/2 - \{\alpha - A(\alpha)\}$ for $1/2 < \alpha < 3/4$. If $\{\mu_n\}$ is a sequence of real numbers for which*

$$|\mu_n - \lambda_{n,\alpha}| \leq \frac{1}{4} - A(\alpha) + \delta_n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi, \pi]$.

定理より, (2.1) における constant " $1/4 - A(\alpha)$ " は, $\alpha \neq 1/2$ のときは, best possible constant ではないことがわかる.

Remark 2.1. ここで考える “best possible constant” とは, Redheffer and Young が [11, Theorem 4 and Corollary] において, Kadec’s 1/4-theorem における constant “1/4” について示した意味である. すなわち, Theorem B において

$$|\mu_n - \lambda_{n,1/2}| \leq \frac{1}{4}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

または

$$|\mu_n - \lambda_{n,1/2}| < \frac{1}{4}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

とすると, $\{e^{i\mu_n t}\}$ は Riesz basis になるとは限らない. これに対して, Theorem 2.2 は, $\alpha \neq 1/2$ のときは, “ $\leq \frac{1}{4} - A(\alpha) + \delta_n$ ” としても $\{e^{i\mu_n t}\}$ が Riesz basis となることを述べている.

Remark 2.2. Katsnelson は [6] において, sine-type entire function の零点集合を用いて, Kadec’s 1/4-theorem を一般化した. 一方, Redheffer and Young は [6, Theorem 7] において, Theorem 2.2 の $\{\lambda_{n,\alpha}\}$ は $1/4 < \alpha < 1/2$ については, sine-type entire function の零点集合ではないことを示した. 著者は $1/2 < \alpha < 3/4$ に関して, $\{\lambda_{n,\alpha}\}$ が sine-type entire function の零点集合であるかどうかはわからない.

3. CONDITIONAL BASIS の安定性

ここでは, $w(t)$ および $L^2[-\pi, \pi]$ の関数に 2π 周期性を仮定せず, 区間 $[-\pi, \pi]$ の外ではほとんど至る所 0 であることを仮定する.

Lemma A (see [3, p105, (1.6)]).

$f \in L^2[-\pi, \pi]$ について,

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon < |t-s| < \pi} \frac{f(s)}{2 \tan\left(\frac{t-s}{2}\right)} ds,$$

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon < |t-s| < \pi} \frac{f(s)}{x-s} ds$$

とするとき,

$$|\tilde{f}(t)| \leq |Hf(t)| + \frac{2}{\pi} \|f\|_1$$

が成り立つ.

Lemma 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が以下の条件を満たすとする. 以下, δ は正の定数, C は δ にのみ関係する正の定数とする.

- (1) $w(t) \geq \delta > 0, -\pi \leq t \leq \pi$.
- (2) $w^2(t)$ は (A_2) -condition を満たす.

このとき, $f \in L^2[-\pi, \pi]$ について,

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^2 w^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 w^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

Lemma 3.1 において, 条件 (2) と上の不等式が同値であることは, [4, Theorem 1] において, $w(t)$ および $L^2[-\pi, \pi]$ の関数の 2π 周期性を仮定して得られている. 2 つの lemmas から以下の結果を得る.

Proposition 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が以下の条件を満たすとする. 以下, δ は正の定数とする.

- (1) $w(t) \geq \delta > 0, -\pi \leq t \leq \pi$.
- (2) $w(t)$ は $-\pi \leq t \leq \pi$ 上で非有界.
- (3) $w^2(t)$ は (A_2) -condition を満たす.

このとき, $\{w(t)e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $L^2[-\pi, \pi]$ の *bounded conditional basis* となる.

この結果を用いて, [13, Theorem 1] の証明の議論を用いると, 以下の結果を得る.

Theorem 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が以下の条件を満たすとする. 以下, M, L, δ は正の定数とする.

- (1) $w(t) \geq \delta > 0, -\pi \leq t \leq \pi$.
- (2) $w(t)$ は $-\pi \leq t \leq \pi$ 上で非有界かつ $|t|w(t) \leq M, -\pi \leq t \leq \pi$.
- (3) $w^2(t)$ は (A_2) -condition を満たす.

このとき,

$$0 < L < \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{\pi\delta}{M} + 1 \right)$$

なる L に対して, $\forall n$ について

$$|n - \lambda_n| \leq L$$

ならば $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $L^2[-\pi, \pi]$ の *bounded conditional basis* となる.

Remark 3.1. harmonic な場合と異なり, biorthogonal な関係とは限らないので, $\{w(t)^{-1}e^{i\lambda_n t}\}$ が conditional basis であるとはいえない.

Remark 3.2. 重みを付けない複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ で, $L^2[-\pi, \pi]$ の conditional basis となるものがあるかどうか (nonharmonic fourier analysis のよく知られた問題) は, 著者の知る限りでは未解決な問題である. 最近, この問題のほんの部分的な結果が [9] で求められている. この問題に関連して, 以下の問題を挙げる.

Problem 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が Theorem 3.1 の条件(1), (3) を満たすとするとき, もし, $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}$ が $L^2[-\pi, \pi]$ の conditional basis ならば $w(t)$ は $-\pi \leq t \leq \pi$ で非有界となるか?

もし, これが肯定的ならば, L を正の定数とするとき, $|\lambda_n - n| \leq L$ を満たす $\{\lambda_n\}$ について, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が basis ならば全て unconditional, すなわち, Riesz basis となることがわかる.

REFERENCES

- [1] K.I. Babenko, *On conjugate functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **62** (1948), 157-160.
- [2] R. Balan, *Stability theorems for Fourier frames and wavelet Riesz bases*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 499-504.
- [3] J.B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.
- [4] R. Hunt, B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227-251.
- [5] M.I. Kadec, *The exact value of the Paley-Wiener constant*, Sov. Math. Dokl. **5** (1964), 559-561.
- [6] V.É. Katsnelson, *Exponential bases in L^2* , Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 31-38.
- [7] K.S. Kazarian, *On bases and unconditional bases in the spaces $L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$* , Studia. Math. **71** (1982), 227-249.
- [8] A. Nakamura, *Conditional Bases in $L^2[-\pi, \pi]$* , Proc. Fac. Sci., Tokai Univ. **25** (1990), 9-12.
- [9] A. Nakamura, *Basis properties and complements of complex exponential systems*, Hokkaido Math. J. **36** (2007), 195-208.
- [10] A.M. Olevskii, *On operators generating conditional bases in a Hilbert space*, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR (translated from Mat. Zametki, **12**, 1972, 73-84).
- [11] R.M. Redheffer and R.M. Young, *Completeness and Basis Properties of Complex Exponentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 93-111.
- [12] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1970.
- [13] R.M. Young, *On the Stability of Exponential Bases in $L^2[-\pi, \pi]$* , Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 117 - 122.
- [14] R.M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, revised first edition, Academic Press 2001.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKAI UNIVERSITY, 316 NISHINO, NUMAZU, SHIZUOKA, 410-0395, JAPAN

E-mail address: a-nakamu@wing.ncc.u-tokai.ac.jp