

T_λ 近傍における超流動ヘリウム Film

京大・理 大 見 哲 巨
名大・理 碓 井 恒 丸

(6月30日受理)

1. Introduction

先の論文¹⁾において, Pitaevskii²⁾ の凝縮体の波動関数に対する現象論的方程式を改良することにより, T_λ の下から近づいた時の第1音波の減衰異常を矛盾なく説明することができた。

我々の理論の Pitaevskii との違いの主な点は次のようなものであった。
まず, 流れの密度とエネルギー密度は

$$j = \frac{m^2}{m^*} \left(\frac{-i}{2} \right) (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$+ m \left(n - \frac{m}{m^*} |\psi|^2 \right) \vec{V}_n$$

$$E = E_0 + \frac{1}{2m^*} | -i \nabla \psi |^2 + \frac{1}{2} m \left(n - \frac{m}{m^*} |\psi|^2 \right) \vec{V}_n^2$$

で与えられる。ここで m^* と E_0 は粒子密度 n , エントロピー密度 $S = n\sigma$ 及び $|\psi|^2$ の関数である。また超流体の密度は $n_s = \frac{m}{m^*} |\psi|^2$ である。

次に, ψ に対する方程式は

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + \mu + iB \right) \psi$$

ここで, μ, B はエルミットにとる。

次に, B を “inductive” な部分 B_i と “resistive” な部分 B_r に分ける。
 B_r は平衡状態への relaxation を受け持つ項であり, B_i は relaxation が存在しない状態においての保存量が $|\psi|^2$ でなく, 凝縮体が depletion との相互作用することにより renormalize された $n_s = \frac{m}{m^*} |\psi|^2$ になる

大見哲巨・碓井恆丸

ことから出てくる項である。

μ , B_i , B_r は具体的に,

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\partial E_0}{\partial n} + \frac{m^*}{m} \frac{\partial E_0}{\partial |\psi|^2} + \frac{1}{4m} \nabla \left(\frac{m^*}{m} \nabla \frac{m}{m^*} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4m} A \cdot \nabla \left(\frac{m}{m^*} \nabla |\psi|^2 \right) + A \cdot \frac{|\psi|^2}{n} \cdot \frac{\partial E_0}{\partial |\psi|^2} \\ A &= \frac{\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{m}{m^*} + \left(x_0 - \frac{m^*}{m} \right) \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{m}{m^*}}{\frac{m}{m^*} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{m}{m^*}} \\ x_0 &= \frac{|\psi|^2}{n} \\ B_i &= -\frac{1}{4m} \left\{ \frac{m^*}{m} \left(\nabla \frac{m}{m^*} \right) (-i \nabla - m \vec{V}_n) + h \cdot C \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2nm} A \cdot \nabla \left\{ \frac{m}{2m^*} [\psi^* (-i \nabla - m \vec{V}_n) \psi + C \cdot C] \right\}. \\ B_r &= -A \left\{ (-i \nabla - m \vec{V}_n) \frac{1}{2m^*} (-i \nabla - m \vec{V}_n) + \frac{\partial E_0}{\partial |\psi|^2} \right. \\ &\quad \left. + |(-i \nabla - m \vec{V}_n) \psi|^2 \cdot \frac{\partial}{\partial |\psi|^2} \cdot \frac{1}{2m^*} \right\}\end{aligned}$$

である。

また、全運動量テンサーは

$$\begin{aligned}\Pi &= m \left(n - \frac{m}{m^*} |\psi|^2 \right) \vec{V}_n \vec{V}_n + \frac{1}{4m^*} (\nabla \psi^* \nabla \psi - \\ &\quad - \psi^* \nabla \nabla \psi + C \cdot C) - \frac{1}{4m} \nabla |\psi|^2 \nabla \frac{m}{m^*} \\ &\quad - E_0 + \frac{\partial E_0}{\partial n} n + \frac{\partial E_0}{\partial S} S + \frac{\partial E_0}{\partial |\psi|^2} |\psi|^2\end{aligned}$$

で与えられる。

これらの現象論的方程式の導出と、それによって第1音波、第2音波の減衰

異常を正しく説明するために、主に以下の仮定がなされた。

1. 局所平衡が成立している。
2. 非可逆現象は凝縮体の relaxation を通してのみ起こり, dissipation がない時には, $|\psi|^2$ でなく n_s が保存する。また, この renormalization を受け持つ B_i は, $(-i \nabla - m \vec{V} n)$ という組合せでしか微分演算子を含まない。
3. Landau の 2 次相転移の考え方を素直に受け継いで,

$$E_0 = E_0^0(n, \sigma) + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$$

の展開において, 展開係数は $\alpha \propto \epsilon^1$, $\beta \propto \epsilon^0$ ととる。

$$\epsilon = \frac{T_\lambda - T}{T_\lambda},$$

4. damping constant $\lambda \propto \epsilon^0$ である。

この仮定により, m^* は σ と $\frac{|\psi|^2}{n}$ だけの関数となる。この時, 前の論文¹⁾では, m^* の $\frac{|\psi|^2}{n}$ 依存を落している。しかし, m^* の異常を出そうと思うと $|\psi|^2$ 依存からしか出せないことがわかる。

3, 4 より, $m^* \propto \epsilon^{\frac{1}{3}}$, したがって, $m^* \propto (|\psi|^2)^{\frac{1}{3}}$ でなければならない。

また, 1 の仮定から, 空間変化は mean free path の order まで, したがって, healing distance の order の空間変化には方程式が適用できるとなっているが, 妥当であるかどうか。

以上, 上の仮定の有効性, 方程式の適用限界を検討する為にも, film の場合の解を考えてみた。また, 我々の解と, Ginzburg, Pitaevskii³⁾ の場合とを比較してみたい。

§ 2. Film の解

平衡, nondissipative, 流れ 0 の場合, 現象論の方程式で, $|\psi|^2 \propto \epsilon$ healing distance $\ell \propto \epsilon^{-2/3}$ を考慮して, ϵ について最低次の近似をする。

Ψ に対する方程式で, B_i の項は高次になり,

$$\left\{ -\nabla \frac{1}{2m^*} \nabla + \left(\frac{\partial}{\partial (\Psi)^2} \frac{1}{2m^*} \right) (\nabla \Psi)^2 + \frac{\partial E_0}{\partial (\Psi)^2} \right\} \Psi = 0. \quad \Psi : \text{real} \quad (1)$$

$$\mu_{eq}(n, \sigma) - \frac{\beta}{m} \left(\frac{\partial n_0}{\partial n} \right)_s \{ \Psi^2 - \Psi_{eq}^2(n, \sigma) \} = \text{const.} \quad (2)$$

また, 運動量テンサ- $\Pi = \text{const}$ も最低次の近似で,

$$P_{eq}(n, \sigma) - n\beta \left(\frac{\partial n_0}{\partial n} \right)_\sigma \{ \Psi^2 - \Psi_{eq}^2(n, \sigma) \} = \text{const.} \quad (3)$$

但し, $\Psi_{eq}(n, \sigma)$ は与えられた n, σ での bulk の場合の平衡値であり, $\mu_{eq}(n, \sigma)$, $P_{eq}(n, \sigma)$ はその時の化学ポテンシャル及び圧力である。2), 3) 式は, それぞれ化学ポテンシャル, 圧力が空間的に一定であることを表わしている。

また, この二つの式から, 温度が空間的に一定という結果を導くことができる。

n, σ の空間変化を考える。境界での n, σ の変化を $\text{\AA}$ の order で変化する normal fluid でも考えられる部分と, Ψ が存在することによる healing distance の order で変化する部分に分けて考える。 T_λ に充分近づけば, 後者 (healing distance) は長くなり, 前者は表面だけの変化と考えることができる。この時, その表面で Ψ に対する境界条件をどのようにとるかが問題になる。境界を自由表面にとった場合には, 表面で n に大きな変化があり, その時 Ψ がどのような変化をするかは解らない。壁に接している境界*) を考えると, この場合には n にそれほど大きな変化がなく, Ψ はゼロから始まると考えて良さそうである。

*) 壁からの van der Waals 力の Ψ に対する影響は, 現象論方程式では, n, σ の変化を通してあらわれる。圧力が変化することによる T_λ の変化及び

n の変化は T_λ に充分近づけば healing distance に比較すれば壁の近くでのみ問題となり無視できる。

n, σ の ψ による変化を, 与えられた p, T での bulk の平衡値 n_e, σ_e を基準にとり,

$$n = n_e + \Delta n$$

$$\sigma = \sigma_e + \Delta \sigma$$

のように表わす。

(2), (3) を $\Delta n, \Delta \sigma$ について解いて, これを(1)式に代入する。

結果は Ginzburg Pitaevskii³⁾ の場合同様, 下の式で与えられる Gibbs Free energy に対する変分問題と同じになる。

$$G = G_0(P, T) - \beta \psi_{eq}^2(P, T) \psi^2 + \frac{1}{2} \beta \psi^4 + \frac{1}{2m^*} (\nabla \psi)^2 \quad (4)$$

空間変化は一次元的に起こる場合を考え, その方向の座標を x とする。

次に, dimensionless の量を

$$\varphi = \frac{\psi}{\psi_{eq}}, \quad \ell^2 = \frac{\beta \psi_e^{\frac{8}{3}}}{r}, \quad \xi = \frac{x}{\ell}$$

を導入する。

ここで, r は,

$$\frac{1}{2m^*} = r \frac{1}{\psi_e^{\frac{2}{3}}}$$

で定義する。

以上より, 無次元の order parameter φ に対する方程式は,

$$\left\{ -\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\varphi^{\frac{2}{3}}} \frac{d}{d\xi} - \frac{1}{3\varphi^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{d}{d\xi} \varphi \right)^2 - 1 + \varphi^2 \right\} \varphi = 0 \quad (5)$$

これは, $\varphi^{\frac{1}{3}} d\xi = dt$ に変数変換することにより簡単に解くことができる。

第1積分は,

$$2 \frac{1}{\varphi^{2/3}} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + 2\varphi^2 - \varphi^4 = C \quad (6)$$

Cは積分定数。

半無限の場合には境界条件は,

$$\xi = 0, \quad \varphi = 0; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 1$$

となる。したがって, $C = 1$ である。

全領域での φ のふるまいは, 数値的にしか解けないが $\xi \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \infty$ での漸近形は求めることができ,

$$\xi \rightarrow 0 \quad \varphi = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}} \right)^{2/3} \xi^{3/2}$$

$$\xi \rightarrow \infty \quad \varphi = 1 - \text{const} \times e^{-\xi}$$

となる。

次に, filmの場合の解を求める。

filmの厚さを d として, 境界条件を

$$\xi = 0, \quad \varphi = 0; \quad \xi = \frac{d}{2\ell}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0$$

のようにとる。

6) 式より, $\xi = \frac{d}{2\ell}$ の時の φ を φ_0 とすると,

$$\varphi_0 = \sqrt{1 - \sqrt{1 - C}}$$

となる。したがって, 積分定数 C を決める式は,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{3\ell} = \int_0^{\varphi_0^{2/3}} \frac{du}{\sqrt{u^6 - 2u^3 + C}} \quad (7)$$

7) 式を C の関数とみてグラフに表わすとFig. 1 のようになる。 $C \rightarrow 1$ では半無限の場合に近づき, $d \rightarrow \infty$, $C \rightarrow 0$ では d が $(C)^{-1/6}$ で発散する。

したがって, Ginzburg, Pitaevskii の場合と異なって, 厚さ d を与えた時 φ に対する二つの解が存在することがわかる。

T_λ 近傍における超流動ヘリウム
この二つの解のうちどちらが安定
に存在するかは Free Energy
を比較してみなければならない。

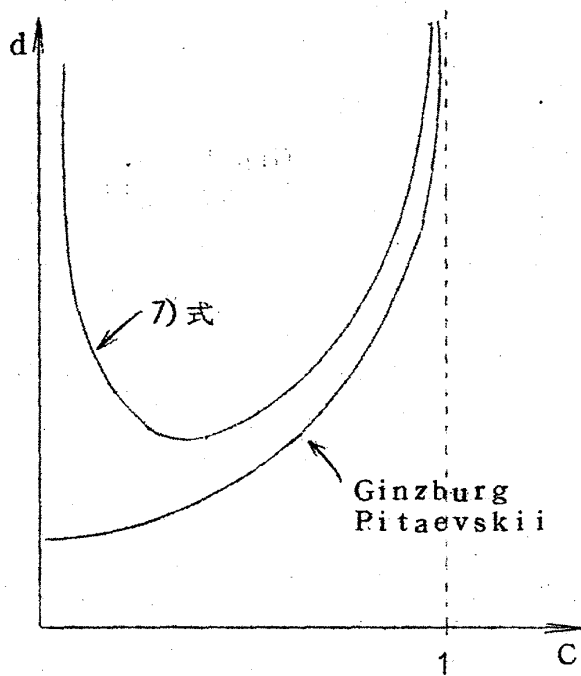


Fig. 1

§ 3. Free Energy の比較

4) 式より, 超流動 Film の Free Energy は常流動 Film と比較して, 単位面積あたり,

$$\Delta G = 2\ell\beta\psi_{eq}^4 \int_0^{\frac{d}{2\ell}} \left\{ \varphi^2 - \frac{1}{2} \varphi^4 - \frac{1}{\varphi^{2/3}} \left(\frac{d}{d\xi} \varphi \right)^2 \right\} d\xi$$

だけ低くなる。

6) 式を用い, また積分変数 ξ から φ に変換すると,

$$\begin{aligned} \Delta G = 2\ell\beta\psi_{eq}^4 \left\{ -\frac{3}{2} \int_0^{\varphi_0^{\frac{2}{3}}} du \sqrt{u^6 - 2u^3 + C} \right. \\ \left. + \frac{3}{4} C \int_0^{\varphi_0^{\frac{2}{3}}} \frac{du}{\sqrt{u^6 - 2u^3 + C}} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

これから, $C=0$ の点を除けば, $\Delta G_{\text{minimum}}$ の点は, 7) 式 d の minimum と一致することがわかる。

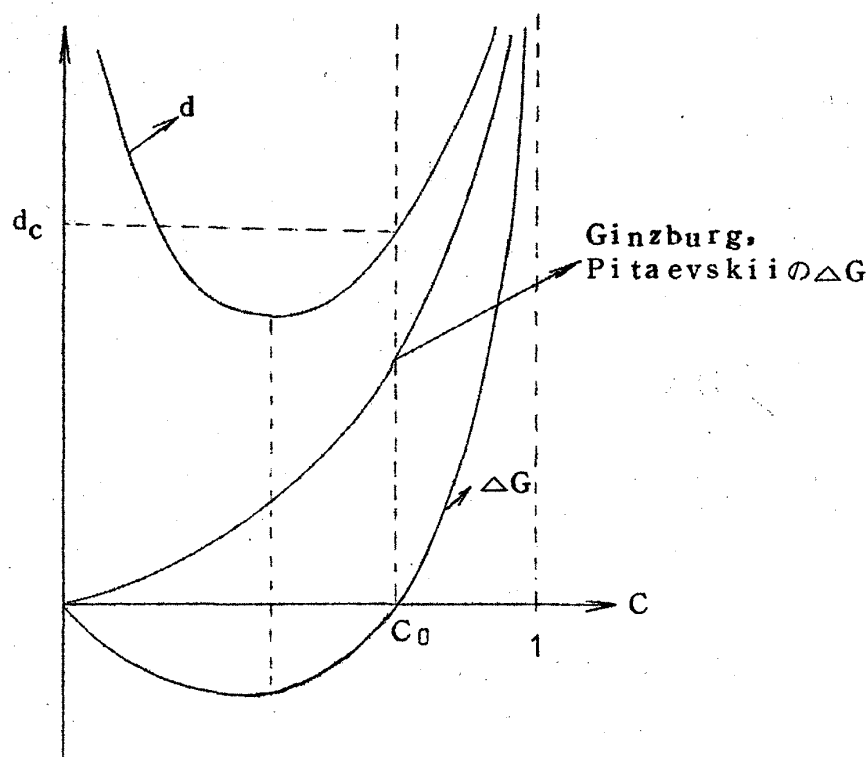


Fig. 2

Fig. 2に d と ΔG を C の関数と考えた時のグラフを示した。

ΔG は、 C_0 以下では負になっている。したがって、この点で与えられる d を d_c とすると、この点で相転移を起こしてこれより薄い Film は存在しないことがわかる。

また、Ginzburg, Pitaevskii の場合の ΔG は、 $C=0$ で $\Delta G=0$ となっている為、この相転移は二次であったが、我々の場合は、有限からとぶ一次の相転移である。

d_c 及び $d = d_c$ の時の ρ_s の平均値を数値計算した結果を次に示す。

$$d_c = 6.29 \ell$$

$$\frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{s0}} = 0.395 \quad (9)$$

ρ_{s0} は ρ_s の bulk の値である。

相転移が一次になるという現象は、現在 Third Sound の実験⁴⁾ において見つかっている。但しこの場合、温度が T_λ から離れていること、又、境界条件の一方が自由表面であることなどから我々の結果が適用できるかどうか疑問

である。しかし、 Ψ が小さいところ、したがって壁に近いところでは、 T_λ から離れた温度においても我々の理論が適用できる。また、壁から離れて Ψ が大きくなれば、 Ψ のふるまいは修正されるであろうが、相転移の時 $\phi_0^2 = 0.66$ であることから、その修正はそれほど大きくないと思われる。

Third Soundの実験から得られる onset の時の $\bar{\rho}_s / \bar{\rho}_{s0}$ は 0.37 と我々の結果と非常によく一致している。

最近⁵⁾、Ginzburg - Pitaevskii の理論を用いて、熱力学的安定性の条件 $(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2})_{n, T}$ (両側を壁で挟めばこの条件は不要) を超流動部分だけで満足させるには、 $\bar{\rho}_s / \rho_{s0} \geq 0.36$ でなければならないという計算がある。しかし、正確には、 $(\frac{\partial^2 F}{\partial d^2})_{n, T}$ への常流動部分からの寄与を考慮しなければならない。これを正しく取り扱うのは難しいが、Van der Waals ポテンシャルからくる d に依存する Free Energy を estimate すると超流動部分の Free Energy に比較して非常に大きい。上の熱力学的な安定条件は、むしろ常流動部分で保障されていると思われる。

Reference

- 1) T. Usui, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), 1603.
- 2) L. P. Pitaevskii, Soviet Phys. - JETP 8 (1959), 282.
- 3) V. L. Ginzburg and L. P. Pitaevskii, Soviet Phys. - JETP. 7 (1958), 858.
- 4) R. S. Kagiwada, J. C. Fraser, I. Rudnick and D. Bergmann, Phys. Rev. Letters 22, (1969), 338.
- 5) G. Dušek and H. Stenschke, J. Low Temp. Phys. 3 (1970) 249.