

Decomposable な algebraic 3-knot の存在

東大理 佐伯 修 (Osamu Saeki)

§ 1. Introduction.

f を $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点 $\vec{0}$ の近傍で定義された正則関数で、次の性質 (*1) ~ (*3) を満たすものとする。

(*1) $f(\vec{0}) = 0$

(*2) f は $\vec{0}$ を isolated critical point に持つ

(*3) $n = 1$ の時は、 f は $\vec{0}$ で locally irreducible

この時、 $K_f = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ は S_ε^{2n+1} の smooth closed connected $(2n-1)$ -dimensional submanifold になる ([9])。ここで、 $S_\varepsilon^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \|z\| = \varepsilon\}$ であり、 $\varepsilon > 0$ は十分小さいものとする。この時、 K_f の S_ε^{2n+1} 内での isotopy class を f に付随した algebraic knot という。特に K_f の次元を明記したい時には、algebraic $(2n-1)$ -knot と呼ぶ。

(K_f は一般には sphere とはならないことに注意する。)

一般に、 S^{2n+1} 内の smooth closed connected $(2n-1)$ -dimensional submanifold の isotopy class を $(2n-1)$ -knot と呼ぶ。knot が decomposable (分解可能) とは、2つの non-trivial knots の connected sum (連結和) に isotopic の時をいう。ここで trivial knot とは、 S^{2n+1} に standard に埋め込まれた S^{2n-1} の isotopy class のこととする。また、decomposable でない knot のことを prime という。

S^3 内の knot の場合 (すなわち $n=1$ の時) は、algebraic knot はある種の iterated torus knot となり ([1] 参照)、常に prime であることが古くから知られている。そこで次のような問題が考えられる。

問題 ([3], [4]) algebraic knot は prime か?

この問題に対する答えは、 $n \geq 3$ の時は No であることがわかっている。実際次が成り立つ。

定理 1 ([8]) g を $\mathbb{C}^2$ の $\bar{\partial}$ の近傍で定義された正則関数で、(x1) ~ (x3) を満たし、かつ $g=0$ の Puiseux 展開は特性対を 2 つ以上持つものとする。さらに g を $\mathbb{C}^{n-1}$ の $\bar{\partial}$ の近傍で

定義された、(※1), (※2) を満たす正則関数とする。この時、 $n \geq 3$ ならば、 $f(z_1, \dots, z_{n+1}) = g(z_1, z_2) + h(z_3, \dots, z_{n+1})$ によって定義される正則関数 f に付随した algebraic $(2n-1)$ -knot は decomposable である。

(Puisseux 展開については、たとえば [1] 参照)

例 1 $g_0(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$ とする。
 $g_0 = 0$ を Puisseux 展開すると、 $y = x^{3/2} + x^{7/4}$ であり、
 その特性対の数は 2 となる。よって g_0 は上の定理の仮定を
 満たし、実際に decomposable な algebraic $(2n-1)$ -knot
 ($n \geq 3$) が存在することがわかる。

今回の我々の結果は、 $n=2$ の時にも同様のことが成り立つことを主張するものである。

定理 2 g を定理 1 の仮定を満たす正則関数とし、
 $f(x, y, z) = g(x, y) + z^r$ (r は 2 以上の整数) で正則関数 f を定義する。この時もし f に付随した algebraic 3-knot (S^5, K_f) において K_f が $\mathbb{Z}$ -homology 3-sphere ならば、
 (S^5, K_f) は decomposable である。

例 2 例 1 における g_0 を考えると、 $\text{g.c.d.}(r, 156) = 1$ ならば K_f が homology 3-sphere となることがわかる。したがって、実際に decomposable な algebraic 3-knot が存在することがわかる。

(注) ① $n=2$ の時は、Neumann [10] により、3-manifold K_f は irreducible なことが知られている。

② 定理 2 で、 K_f が homology 3-sphere という仮定は、技術的な仮定であって、必要な条件かどうかはわからない。

定理 2 の証明は、本質的には $n \geq 3$ の場合の定理の証明と同様の手法で行なわれる。一般に algebraic knot は [9] により simple fibered knot ([2], [11]) と呼ばれるものになるが、 $n \geq 3$ の時はそれらは Seifert matrix (定義は §2 参照) で完全に分類される ([2], [6])。そしてその分類を使うことにより decomposable な algebraic knot の存在が示せる。ところが $n=2$ の時はこの分類は成立しない ([11])。しかし、必ずしも fibered とは限らない simple 3-knots を考えると、埋め込まれた 3次元多様体が homology 3-sphere の時は、Seifert matrix による分類が可能になる。§2 ではその分類を述べ、§3 でそれを使って定理 2 を証明する。

§2. Simple な homology 3-sphere knot の分類

Σ を $(\mathbb{Z})$ -homology 3-sphere とする。3-knot (S^5, K) で、 $K \cong \Sigma$ なるもののことを Σ -knot と呼ぶことにする。 Σ -knot K が simple とは、 $\pi_1(S^5 - K) \cong \mathbb{Z}$ の時をいう。

F を S^5 の oriented 4-submanifold で、 $\partial F = K$ なるものとする。この時 bilinear map $\Gamma: H_2(F; \mathbb{Z}) \times H_2(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\Gamma(\alpha, \beta) = \text{lk}(\alpha, i_*\beta)$ で定義する。ここで lk は S^5 における linking number を表わし、 $i: F \rightarrow S^5 - F$ は positive normal 方向への平行移動である。この Γ のことを Seifert form と呼び、 Γ を matrix で表わしたものを Seifert matrix と呼ぶ。

次に、 L, L' を integral square matrices とする。ある unimodular matrix P があって $L' = PL'P$ となる時、 L と L' は congruent であるという。また、 $L_1 = \left(\begin{array}{c|cc} L & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$, $L_2 = \left(\begin{array}{c|cc} L & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

なる形の matrix を L の enlargement といい、逆に L は L_1, L_2 の reduction という。そして、congruence, enlargement, reduction によって生成される、integral square matrices の間の同値関係を S-equivalence と呼ぶ。

以上のような定義のもとで、simple Σ -knot は次のように分類できる。

定理 3 ([12]) 任意の homology 3-sphere Σ に対し、各 Σ -knot に Seifert matrix を対応させる写像

$$\Phi_{\Sigma}: \left\{ \begin{array}{l} \text{simple} \\ \Sigma\text{-knots} \\ \text{in } S^5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{integral square matrix } L \text{ s.t.} \\ \det(L + {}^tL) = 1 \\ \text{sign}(L + {}^tL) \equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16} \\ \text{の } S\text{-equivalence classes} \end{array} \right\}$$

は well-defined で bijective。ここで $\mu(\Sigma) (\in \{0, 1\})$ は Σ の Rohlin invariant を表わす。

(Rohlin invariant については [5] 参照)

定理 3 は、4次元多様体のいくつかの補題 ([11, §4]) を使って Levine [7] の議論を適用すれば証明できる。くわしくは [13] 参照。

§3. Algebraic 3-knot の decomposability の判定

この節では algebraic 3-knot (S^5, K_f) で、 K_f が homology 3-sphere のもののみを考える。[9] より (S^5, K_f) は simple になる。しかも algebraic knot は fibered だから、Seifert matrix は unimodular になる。以後 algebraic knot の

Seifert matrix としては、この unimodular な matrix のみを考える。

定理 3 を使えば、次の命題が容易に証明できる。

命題 4 ([12]) (S^5, K_f) を algebraic 3-knot で、 K_f が homology 3-sphere であるものとする。また、その unimodular な Seifert matrix を L とする。この時、次が成り立つ。

(1) $\mu(K_f) = 0 \Rightarrow (S^5, K_f)$ は decomposable

(2) $\mu(K_f) \neq 0$ の時

(S^5, K_f) は decomposable

$\Leftrightarrow L$ は $L_1 \oplus L_2$ の形の unimodular matrix に congruent

[定理 2 の証明]

g に付随した algebraic knot を (S^3, K_g) とする。 g は Puiseux 特性対を 2 つ以上持つので、(torus knot ではなく) 本当の cable knot になる (たとえば [1] 参照)。したがって (S^3, K_g) の Seifert matrix L_g は、 $L_g = L'_g \oplus L''_g$ のように直和の形となる ([8], [15])。一方、 $f(x, y, z) = g(x, y) + z^r$ だったから、 (S^5, K_f) の Seifert matrix を L とおくと、[14] より

$$L = L_g \otimes A$$

$$= (L'_g \otimes A) \oplus (\tilde{L}'_g \otimes A)$$

(A は ある $(r-1) \times (r-1)$ - matrix)

となる。したがって、命題 4 より、 $(\mathcal{S}^5, K_f)$ は decomposable となる。 //

References

- [1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, Invent. Math. 20 (1973), 147-169.
- [2] A. Durfee, Fibered knots and algebraic singularities, Topology 13 (1974), 47-59.
- [3] ———, Knot invariants of singularities, Algebraic Geometry (Arcata, 1974, Proc. Sympos. Pure Math., 29, AMS, Providence, R. I.) 1975, 441-448.
- [4] ———, The low dimensional topology of singularities, Singularities (Arcata, 1983, Proc. Sympos. Pure Math., 40 - Part 1, AMS, Providence, R. I.) 1983, 321-326.

- [5] F. Hirzebruch, W.D. Neumann and S.S. Koh, Differentiable manifolds and quadratic forms, Marcel Dekker, New York, 1971.
- [6] M. Kato, A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 454-463.
- [7] J. Levine, An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 185-198.
- [8] F. Michel and C. Weber, Nœuds algébriques décomposables, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 294 (1982), 493-496.
- [9] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies no. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.
- [10] W.D. Neumann, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 299-344.

- [11] O. Saeki, On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots, to appear in Comment. Math. Helv. .
- [12] ———, Knotted homology 3-spheres in S^5 , to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [13] ———, Decomposable な algebraic 3-knot の存在, 数理研講究録「低次元トポロジーの幾何と代数」, 1986.
- [14] K. Sakamoto, The Seifert matrices of Milnor fiberings defined by holomorphic functions, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 714-721.
- [15] Y. Shinohara, On the signature of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 273-285.