

The Gorensteinness of the symbolic Rees algebras for space monomial curves $p(6, -, -)$

北里大学教養部 下田保博 (Yasuhiro Shimoda)

序

$A=k[[X,Y,Z]]$ で、 n_1, n_2, n_3 をG.C.M. $(n_1, n_2, n_3)=1$ なるものとする。 $f:A \rightarrow k[[t]]$ を $f(X)=t^{n_1}, f(Y)=t^{n_2}, f(Z)=t^{n_3}$ で定め、 $\ker f = p(n_1, n_2, n_3) = p$ とおく。さらに

$R=R_S(p)=\sum_{n \geq 0} p^{(n)} T^n \subset A[T]$ を p に関するsymbolic Rees algebraとしておく。

ここで、次のような R の環論的な性質を調べてみることにする。

1. いつ R は Noether環になるか。

2. R がNoether環ならば、Macaulay環になるか。

この問題に関して、つぎのような結果が知られている。

まず、 R は一般的には Noether環にはならないことが後藤、西田、渡辺氏によって示された。実際に、 $p=p(7m-3, 5mn-m-n, 8n-3)$, ただし、 $n > 4, 2m > n+1$ とおくと、 $\text{chk}=0$ で、 R はNoether環ではない。(c.f. [4])

次に、C. Hunekeにより与えられたNoether環になるための判定条件を用いると、 $n_1=3, 4$ では、 R がNoether環になることがわかる。ここで、判定条件とは、次のものである。

定理A(C. Huneke, [6])

自然数 k, m と $f \in p^{(k)}, g \in p^{(m)}$ なる元がとれて、ある元 x について、等式 $\text{length}(A/(x, f, g)) = k \cdot m \cdot \text{length}(A/(x, p))$ を満たすとき、 R はNoether環になる。

またCutkoskyは、その論文[1]のなかで、 $n_1=6$ ならば、 R はNoether環になることをHunekeの判定条件を具体的に用いずに、示した。

次に、 R がMacaulay環になるかどうかという問題に関しては、次の判定

条件が与えられている。

定理B(後藤、西田、下田[2])

Hunekeの判定条件で与えられた f, g にたいして、 $1 \leq n \leq k+m-2$ をみたす n について、 $A/(f, g) + p^{(n)}$ がMacaulay環ならば、 R はMacaulay環になる。(実際には、Gorenstein環になる。)

この結果を用いると、 $n_1=3, 4$ では、 R はGorenstein環になることが示せる。

さて、ここで次のことを注意しておく。

注意1 上記の諸結果をしめすのに素イデアル p は 2×3 行列の2次の小行列

式で生成されている。例えば、 $n_1=3, 4$ では、対応する行列は、

$$\begin{pmatrix} X^u & Y & Z \\ Y & Z & X^{u'} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X^u & Y^2 & Z \\ Y & Z & X^{u'} \end{pmatrix}$$

であり、一般にはつぎのような行列 M の2次の小行列式で生成されている。

$$M = \begin{pmatrix} X^u & Y^{v'} & Z^{w'} \\ Y^v & Z^w & X^{u'} \end{pmatrix}$$

このとき、次のことも成り立つことがわかっている。

定理C ([2])

$u \leq u', v' = mv, w' \leq mw$ をみたす自然数をとると、 R は、Noether Gorenstein環になる。

この報告集では、 $n_1=6$ の場合に、 R がGorenstein環になるかどうかの議論を進めていきたいと思う。

2 主結果

$p=p(6, -, -)$ は次のような行列 M の2次の小行列式で生成される。実際

p がComplete intersection idealでなければ、注意1より $6=v'w'+v(w+w')$ をみたすので、

Case 1. The case of $v=2$.

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^2 & Z \\ Y^2 & Z & X^{u'} \end{pmatrix}$$

Case 2. The case of $v=1$ and $v'=4$.

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^4 & Z \\ Y & Z & X^{u'} \end{pmatrix}$$

Case 3. The case of $v=1$ and $v'=3$.

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^3 & Z \\ Y & Z^2 & X^{u'} \end{pmatrix}$$

このとき、次が成り立つ。

定理2.1

(1) Case 1または3ならば、 R は Gorenstein環になる。

(2) Case 2で、 $u > u'$ ならば、 R は Gorenstein環になる。

(3) Case 2で、 $u' = k_0 u + u_1, u = k_1 u_1 + u_2$ と表したとき、 $k_0=2$ かつ $k_1=1$ 以外はすべて R は Gorenstein環になる。

この定理2.1の(1)は上記の定理 Cと次の定理より導かれる。

定理2.2([7])

$p=I_2(M)$ で、 M が次の形ならば R は Gorenstein環になる。

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^m & Z \\ Y & Z^n & X^{u'} \end{pmatrix}$$

ただし、 $m, n \geq 2$ とする。

ここでは、定理2.1の(2),(3)の証明を述べることにしたい。

3. 定理 2.1の(2)の証明.

$u > u'$ より、Euclidの互除法から、

$u = k_0 u' + u_1, u' = k_1 u_1 + u_2, \dots, u_{n-1} = k_n u_n$ ($u > u' > u_1 > \dots > u_{n-1} > u_n \geq 0$, かつ k_i は 0 以上の整数) と表せる。次に、 $a = Z^2 - X^2 Y^4, b = X^{u+u'} - YZ, c = Y^5 - X^u Z$ とおく。このとき、

補題 3.1 $1 \leq j \leq k_0$ にたいして、

$$e_{j+1} \equiv Y^{4(j+1)+1} + (-1)^{j+1} X^{u-ju'} Z^{2j+1} \pmod{X^{u-(j-1)u'}}$$

をみたす $e_{j+1} \in P^{(j+1)}$ が存在する。

証明.

$t_2 = ac - Y^3 b^2$ とおくと、

$$t_2 \equiv Y^5 Z^2 - X^2 Y^9 - X^3 Z^3 - Y^3 \cdot Y^2 Z^2 \pmod{X^{u+u'}}.$$

このとき、 $e_2 = t_2 / (-X^{u'})$ とおくと、

$$e_2 \equiv Y^9 + (-1)^2 X^{u-u'} Z^3 \pmod{X^u}.$$

次に、 $j > 1$ として、 e_{j+1} があるとせよ。このとき、 $t_{j+2} = ae_{j+1} - Y^2 b^2 e_j$ とおくと、

$e_{j+2} = t_{j+2} / (-X^{u'})$ とすると、

$$e_{j+2} \equiv Y^{4(j+2)+1} + (-1)^{j+2} X^{u-(j+1)u'} Z^{2j+3} \pmod{X^{u-ju'}}.$$

今、 $r_{0,j} = j+1, p_{0,j} = 4(j+1)+1, q_{0,j} = 2j+1$ としておく。上の補題で $j = k_0$

のときに議論をすると、

$$e_{k_0+2} \equiv X^{u'-u_1} Y^{4(k_0+2)+1} + (-1)^{k_0+2} Z^{2k_0+3} \pmod{X^{u'}}$$

が作れる。そこで

$$r_{1,1} = k_0+2, p_{1,1} = 4(k_0+2)+1, q_{1,1} = 2k_0+3$$

としておく。

補題3.2 $Y^{4(k_0+1)+1} Z^{2k_0+1} \equiv d \pmod{(X^{u'})}$ をみたす $d \in p^{(2k_0+2)}$ がある。

証明. $k_0 = 1$ ならば、 $Y^9 Z^3 \equiv Y^3 Z^3 \cdot Y^6 \equiv (-1)^3 b^3 \cdot Y \cdot c \pmod{(X^{u'})}$

となるので、 $d = (-1)^3 b^3 \cdot Y \cdot c$ とすればよい。 $k_0 \geq 2$ ならば、

$d = Y^{2k_0-1} \cdot (-1)^{2k_0+1} b^{2k_0+1} c$ とおくと、

$$d \equiv Y^{2k_0-1} \cdot Y^{2k_0+1} \cdot Z^{2k_0+1} \cdot Y^5 \equiv Y^{4(k_0+1)+1} Z^{2k_0+1} \pmod{(X^{u'})}$$

補題3.3 $1 \leq j \leq k_1$ にたいして

$$e_{j(k_0+1)+1} \equiv X^{u'-ju_1} Y^{4j(k_0+1)+j+4} + (-1)^{j(k_0+1)+1} Z^{j(2k_0+1)+2} \pmod{(X^{u'-(j-1)u_1})}$$

となる $e_{j(k_0+1)+1} \in p^{\{j(k_0+1)+1\}}$ がとれる。

証明. $j = 1$ ならばすでに構成されている。 $1 \leq j \leq k_1-1$ とする。

$$\begin{aligned} & e_{j(k_0+1)+1} \cdot e_{k_0+1} \\ & \equiv (X^{u'-ju_1} Y^{4j(k_0+1)+j+4} + (-1)^{j(k_0+1)+1} Z^{j(2k_0+1)+2}) \cdot \\ & \quad (Y^{4(k_0+1)+1} + (-1)^{k_1+1} X^{u_1} Z^{2k_0+1}) \\ & \equiv (-1)^{j(k_0+1)+1} Y^{4(k_0+1)+1} Z^{j(2k_0+1)+2} + X^{u'-ju_1} Y^{4(j+1)(k_0+1)+j+5} \\ & \quad + (-1)^{(j+1)(k_0+1)+1} X^{u_1} Z^{(j+1)(2k_0+1)+2} \pmod{(X^{u'-(j-1)u_1})}. \end{aligned}$$

まず、 $j=1$ ならば、 $e_{k_0+2} \cdot e_{k_0+1} \in p^{(2k_0+3)}$ だから、

$$(-1)^{k_0+2} \cdot (-1)^{2k_0+3} \cdot b^{2k_0+3} \cdot Y^{2(k_0-1)}$$

$$\equiv (-1)^{k_0+2} Y^{4(k_0+1)+1} Z^{2k_0+3} \pmod{X^{u'}}$$

となるので、

$$t_{2k_0+3} = e_{k_0+2} \cdot e_{k_0+1} - (-1)^{k_0+2} \cdot (-1)^{2k_0+3} \cdot b^{2k_0+3} \cdot Y^{2(k_0-1)}$$

とおくと、

$$e_{2k_0+3} \equiv X^{u'-2u_1} Y^{8(k_0+1)+6} + (-1)^{2(k_0+1)+1} Z^{2(2k_0+1)+2} \pmod{X^{u'-u_1}}.$$

をみたく e_{2k_0+3} が存在する。

次に、 $j > 1$ とすると、

$$e_{(j-1)(k_0+1)+1} \equiv Z^{(j-1)(2k_0+1)+2} \pmod{X^{u'-(j-1)u_1}}$$

かつ 補題3.2 から $Y^{4(k_0+1)+1} Z^{2k_0+1} \equiv d \pmod{X^{u'}}$ をみたく $d \in p(\frac{2k_0+2}{u'})$ があるので、

$$t_{(j+1)(k_0+1)+1} = e_{j(k_0+1)+1} \cdot e_{k_0+1} - d e_{(j-1)(k_0+1)+1}$$

とおくと、

$$e_{(j+1)(k_0+1)+1} \equiv X^{u'-(j+1)u_1} Y^{4(j+1)(k_0+1)+j+5} + (-1)^{(j+1)(k_0+1)+1} Z^{(j+1)(2k_0+1)+2} \pmod{X^{u'-ju_1}}$$

が作れる。

ここで、 $1 \leq j \leq k_1$ にたいして、

$$p_{1,j} = 4j(k_0+1)+j+4, q_{1,j} = j(2k_0+1)+2, r_{1,j} = j(k_0+1)+1$$

と定めておく。さらに、上記補題3.3において、 $j=k_1$ の場合に議論をすると

$$e_{(k_1+1)(k_0+1)+1} \equiv Y^{4(k_1+1)(k_0+1)+k_1+5} + (-1)^{(k_1+1)(k_0+1)+1} X^{u_1-u_2} Z^{(k_1+1)(2k_0+1)+2} \pmod{X^{u_1}}$$

が構成できる。そこで、

$p_{2,1} = 4(k_1+1)(k_0+1)+k_1+5$, $q_{2,1} = (k_1+1)(2k_0+1)+2$, $r_{2,1} = (k_1+1)(k_0+1)+1$
と定めておく。

補題3.4

$$Y^{4k_1(k_0+1)+k_1+4} Z^{k_1(2k_0+1)+2} \equiv e \pmod{X^{u_1}} \text{ をみたす } e \in p^{(2k_1(k_0+1)+2)}$$

がある。

証明. $b^{k_1(2k_0+1)+2} c^{k_1}$ を考える。

$$b^{k_1(2k_0+1)+2} c^{k_1} \equiv (-1)^{k_1(2k_0+1)+2} Y^{k_1(2k_0+1)+2+5k_1} Z^{k_1(2k_0+1)+2} \pmod{X^{u_1}}$$

となるので、Yの指数は

$$4k_1(k_0+1)+k_1+4 - \{k_1(2k_0+1)+5k_1+2\} = 2k_1k_0+2 (=k \text{ とおく})$$

だから、

$$e = (-1)^{k_1(2k_0+1)+2} Y^k b^{k_1(2k_0+1)+2} c^{k_1}$$

とおけばよい。

次の命題によりRがNoether環になることを示そう。

命題3.5

$0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$ にたいして自然数の列 $\{p_{i,j}\}, \{q_{i,j}\}, \{r_{i,j}\}$ と p の
symbolic powerの元の列 $\{e_{ri,j}\}$ がとれて、次をみたす。

(1) $p_{i,j} + q_{i,j} = 6r_{i,j}$ がすべての (i,j) について成り立つ。

(2) $\{p_{i,j}\}, \{q_{i,j}\}, \{r_{i,j}\}$ は 次の関係式をみたす。

$$A_{i,1} = A_{i-1,k_{i-1}} + A_{i-2,k_{i-2}}$$

$$A_{i,j} = A_{i-1,k_{i-1}} + A_{i,j-1} \quad \text{for } j \geq 2.$$

(3) $e_{ri,j}$ は次の形である。

$$e_{ri,j} \equiv \begin{cases} Y^{R,j} + (-1)^{q_{i,j}} X^{u_{i-1}-ju_i} Z^{q_{i,j}} & (i:\text{even}) \\ X^{u_{i-1}-ju_i} Y^{R,j} + (-1)^{q_{i,j}} Z^{q_{i,j}} & (i:\text{odd}) \end{cases} \pmod{X^{u_{i-1}-(j-1)u_i}}$$

証明. i まで成り立つとし、さらに $e_{ri+1,1}$ が作れると仮定しておく。
このとき、

主張. $i+1$ について構成できる。さらに $e_{ri+2,1}$ が作れる。

実際、 $i=0,1$ では成り立つので、 $i > 1$ とする。

1. i がevenのとき

$$\begin{aligned} e_{ri,ki} \cdot e_{ri+1,1} &= (Y^{R,ki} + (-1)^{q_{i,ki}} X^{u_{i+1}} Z^{q_{i,ki}})(X^{u-u_{i+1}} Y^{R+1,1} + (-1)^{q_{i+1,1}} Z^{q_{i+1,1}}) \\ &= (-1)^{q_{i+1,1}} Y^{R,ki} Z^{q_{i+1,1}} + X^{u-u_{i+1}} Y^{R+1,1} Y^{R,ki} \\ &\quad + (-1)^{q_{i,ki}} X^{u_{i+1}} Z^{q_{i,ki}} (-1)^{q_{i+1,1}} Z^{q_{i+1,1}} \pmod{X^u} \end{aligned}$$

であり、一方 $e_{ri-1,ki-1} \equiv Z^{q_{i-1,ki-1}} \pmod{X^u}$ から、

$$(*) \quad f \equiv (-1)^{q_{i+1,1}} Y^{R,ki} Z^{q_{i,ki}} \pmod{X^u}$$

をみたす $p^{(2q_{i,ki})}$ の元 f があることを示せば、

$$t = e_{ri,ki} \cdot e_{ri+1,1} - e_{ri-1,ki-1} \cdot f$$

と関係式が作れる。これより $e_{ri+1,2}$ が作れることになる。

(*)の証明

$$p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \text{ の作り方より、もし } r_{i,ki} = Sr_{0,k0} + Tr_{1,k1}$$

ならば、 $p_{i,ki} = Sp_{0,k0} + Tpr_{1,k1}$, $q_{i,ki} = Sq_{0,k0} + Tq_{1,k1}$ だから、

$$\begin{aligned} Y^{P_{i,k_i}} Z^{Q_{i,k_i}} &= (Y^{P_{0,k_0}} Z^{Q_{0,k_0}})^S (Y^{P_{1,k_1}} Z^{Q_{1,k_1}})^T \\ &\equiv d^S \cdot e^T \pmod{X^{q_i}} \end{aligned}$$

とできるので、 $f = (-1)^{q_{i+1,1}} d^S \cdot e^T$ とすればよい。

さて、上記と同様にして

$$t = e_{ri,ki} \cdot e_{ri+1,j-1} - e_{ri+1,j-2} \cdot f$$

を考えることにより、 $e_{ri+1,j}$ が構成できる。さらに、上の式で、 $j-1=k_{i+1}$

とすれば、 $e_{ri+2,1} \equiv Y^{P_{i+2,1}} + (-1)^{q_{i+2,1}} X^{q_{i+1}-u_{i+2}} Z^{Q_{i+2,1}} \pmod{X^{q_{i+1}}}$ が同様に構成できる。

2 i がoddのとき。この場合も1の場合と同様にして(*)の f を用いて構成ができる。詳しいことは省略したい。

上の命題から次が導かれる。

系3.6 R はNoether環である。

証明. 定理Aの f, g として $f = e_{rn, kn} \equiv Y^{P_{n, kn}} + (-1)^{r_{n, kn}} Z^{Q_{n, kn}}, g = b$ とおけば、

$$\text{length}(A/(x, f, g)) = P_{n, kn} + Q_{n, kn} = 6 \cdot \text{length}(A/(x+p))$$

をみたすので、Hunekeの判定条件により R はNoether環になる。

さて $u > u'$ のときに R がGorenstein環になることを示す。そのためには、

定理Bと系3.6より $1 \leq k \leq r_{n, kn-2}$ について $A/[(f, g) + p^{(k)}]$ がMacaulay環になればよい。方針は第13回可換環論シンポジウム報告集[7]と同様ですので省略いたします。

4. 定理2. 1の(2)の証明

ここでは、 $u' > u$ であるので、

$u' = k_0 u + u_1, u = k_1 u_1 + u_2, \dots, u_{n-1} = k_n u_n$ ($u' > u > u_1 > \dots > u_{n-1} > u_n \geq 0$, かつ k_i は 0 以上の整数) と表せる。次に、 $a = Z^2 X^{u'} Y^4, b = X^{u+u'} YZ, c = Y^5 X^u Z$ とおく。

このとき、補題 3. 1 と同様にして

$$t_2 = ac - Y^3 b^2 \text{ とおくと、}$$

$$t_2 \equiv Y^5 Z^2 X^{u'} Y^9 - X^3 Z^3 - Y^2 \cdot Y^2 Z^2 \pmod{X^{u+u'}}.$$

よって、 $e_2 = t_2 / (-X^u)$ とおくと、

$$e_2 \equiv (-1)^2 X^{u'-u} Y^9 + Z^3 \pmod{X^{u'}}.$$

k_0 が 3 以上ならば、 $t_3 = e_2 c - (-1)^3 Y b^3$ とおけば

$$e_3 \equiv (-1)^3 X^{u'-2u} Y^{14} + Z^4 \pmod{X^{u'-u}}$$

がとれて、さらに $t_4 = e_3 c - (-1)^4 Y b^4$ とおくと

$$e_4 \equiv (-1)^4 X^{u'-3u} Y^{19} + Z^5 \pmod{X^{u'-2u}}$$

が作れる。さらに k_0 が 4 以上ならば、 $t_5 = e_4 c - (-1)^5 b^5$ とおくと

$$e_5 \equiv (-1)^5 X^{u'-4u} Y^{24} + Z^6 \pmod{X^{u'-3u}}$$

ができる。また k_0 が 3 ならば、 $t_5 = e_4 c - (-1)^5 b^5$ とおくと

$$e_5 \equiv (-1)^5 Y^{24} + X^{u_1-u_2} Z^6 \pmod{X^{u'-3u}}$$

ができる。まとめて

補題 4. 1 R は k_0 が 3 以上ならば Noether 環である。

証明. k_0 が 3 ならば $f = e_4, g = e_5$ とおけば、

$$\text{length}(A/(X, f, g)) = 24 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot \text{length}(A/(X) + p)$$

となり、定理 A から R は Noether 環になる。次に k_0 が 4 以上ならば

$f = e_5, g = c$ とおくと、やはり定理AからRは Noether環になる。

命題 4. 2 Rは k_0 が 3以上ならば Goernstein環である。

証明. 定理Bにより k_0 が 3ならば、 $1 \leq k \leq 7$ について

$B_k = A/[(f, g) + p^{(k)}]$ が Macaulay環になることを示し、 k_0 が 4以上ならば、

$1 \leq k \leq 4$ について B_k が Macaulay環になることを言えばよい。それには、実際

に $I_k = (X) + (f, g) + p^{(k)}$ を計算すればよい。例えば、 k_0 が 4以上ならば、

$$I_2 = (X) + (Y^5, Z^6) + (Z^3) + (Z^2, YZ, Y^5) = (X) + (Z^3, Y^2 Z^2, Y^5)$$

$$I_3 = (X) + (Y^5, Z^6) + (Z^4) + (Z^2, YZ, Y^5)(Z^3, Y^2 Z^2, Y^5) = (X) + (Z^4, Y^3 Z^3, Y^5)$$

$$I_4 = (X) + (Y^5, Z^6) + (Z^5) + (Z^2, YZ, Y^5)(Z^4, Y^3 Z^3, Y^5) = (X) + (Z^5, Y^4 Z^4, Y^5)$$

となり、 B_k が Macaulay環になる。 k_0 が 3のときも同様である。

k_0 が 1または 2のときには、次が成り立つ。

命題 4. 3 $k_0 = 1$ ならば、Rは Gorenstein環である。

証明. 第3章の方針と同じにすればよい。そこで、詳細は省くことにする。

最後に $k_0 = 2$ のときは、 $k_1 = 1$ 以外では次が成り立つ。

命題 4. 4 Rは Gorenstein環である。

この証明では、第3章の補題3. 1に相当するものが、成り立たないので、代わりに、補題3. 1に対応する結果を $i=3$ のときに、見つけなくては いけない。したがって、 $k_1 = 1$ のときには、 $i=3$ のときでも、まだ見つかっていない。

参考文献

- [1] S.Cutkosky; Symbolic algebras of monomial primes, J.reine und ang. Math., to appear.
- [2] S.Goto, K.Nishida and Y.Shimoda; The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves, J.Math.Soc.Japan, Vol 43 (1991) 465-481.
- [3] _____; The Gorensteinness of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves, Trans.A.M.S., to appear.
- [4] S.Goto, K.Nisida and K.Watanabe; Non-Cohen-Macaulay symbolic Rees algebras for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question, preprint 1991.
- [5] C.Huneke; On the finite generation of symbolic blow-ups, Math. Z., 179 (1982), 465-472.
- [6] _____; Hilbert functions and symbolic powers, Michigan Math.J., 34 (1987), 293-318.
- [7] Y.Shimoda; On the symbolic Rees algebra for certain prime ideal, The report of the 13-th Commutative algebra symposium at Toyama, (1991), 39-46. (in Japanese).