

On the singularities of the solution of the Cauchy
problem with meromorphic data for an operator with
involutive characteristics

都立大 理 小林 隆夫

$Q(x, \frac{\partial}{\partial x})$ ($x=(x_0, x')=(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$) を $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍で正則な関数を係数とする線型微分作用素で, $(\frac{\partial}{\partial x_0})^m$ の係数 $\equiv 1$ とします。 $w_d(x')$, $d=0, 1, \dots, m-1$, を $x_1=0$ に極をもつ (それ以外では正則) $x_1=0$ の近傍の関数とする時 次の Cauchy 問題を考えます。

$$(1) \quad \begin{cases} Q(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x) = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial x_0})^d u(x) \Big|_{x_0=0} = w_d(x'), \quad d=0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

問題は 解 $u(x)$ の特異性を調べる事です。

特性根の重複度が一定の場合には, 「 $u(x)$ の特異性は $x_1=0$ を出る特性曲面に沿って伝播する」事が示されています。

(Hamada-Leray-Wagschal [4], Hamada [3], -----)

重複度が変わる場合については, Hamada-Nakamura [5] が特性根について (i) 正則 (ii) 包合的 (iii) 重複度 ≤ 2 を仮定

して考察しています。この小論では (i), (ii) は仮定し, (iii) の重複度の制限をはずして議論します。つまり 次の (C-1), (C-2) を仮定します。

$Q(x, \xi)$ の特性多項式 $p(x, \xi)$ を $p(x, \xi) = \prod_{i=1}^m (\xi_0 - \lambda_i(x, \xi))$ と分解したとき

(C-1) $\lambda_i(x, \xi)$, $i=1, \dots, m$, は $(x, \xi') = (0, \xi')$ ($\xi' = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$) の近傍で正則。

λ_i を $(0, \xi')$ における値で並べ替えて, $\lambda_1^\sigma(0, \xi') = \dots = \lambda_{m_\sigma}^\sigma(0, \xi') (= \lambda^\sigma)$ $\sigma=1, 2, \dots, \bar{\sigma}$, $m_\sigma \geq 1$, $m = m_1 + \dots + m_{\bar{\sigma}}$, $\{\lambda^1, \dots, \lambda^{\bar{\sigma}}\}$ は互いに異なるようにしたとき, $m_\sigma \geq 2$ なる各 σ に対して

(C-2) $(0, \xi')$ の近傍で正則な関数の集合 $\{C_{ij}^\sigma(x, \xi), 1 \leq i, j \leq m_\sigma\}$ が存在して $\xi_0 - \lambda_i$ と $\xi_0 - \lambda_j$ の Poisson bracket が

$$\{\xi_0 - \lambda_i(x, \xi), \xi_0 - \lambda_j(x, \xi)\} = C_{ij}^\sigma(x, \xi) (\lambda_j^\sigma(x, \xi') - \lambda_i^\sigma(x, \xi'))$$

となる。

(注) [5] では Poisson bracket が恒等的に消える事を仮定している。

(C-1)より次の *eigonal* 方程式の解が次々と正則関数として求まります。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \begin{cases} \frac{\partial \varphi_{\sigma}^i}{\partial x_0} - \lambda_i^{\sigma}(x; dx' \varphi_{\sigma}^i) = 0 \\ \varphi(x)|_{x_0=0} = x_1 \end{cases} \\
 & \vdots \\
 & \begin{cases} \frac{\partial \varphi_{\sigma}^{(i)_l}}{\partial x_0} - \lambda_{i_l}^{\sigma}(x, dx' \varphi_{\sigma}^{(i)_l}) = 0 \\ \varphi_{\sigma}^{(i)_l}(t_1 \dots t_{l-1}, x)|_{x_0=t_{l-1}} = \varphi_{\sigma}^{(i)_{l-1}}(t_1 \dots t_{l-2}, x)|_{x_0=t_{l-2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

ただし $(i)_l$ は $(i_1, \dots, i_l)$, $1 \leq i_l \leq m_{\sigma}$ の略記で, $(i)_{l-1} = (i_1, \dots, i_{l-1}) = (i_1, \dots, i_{l-1})$ 。 (2) の解 $\varphi_{\sigma}^{(i)_l}$ を多重相関数と呼ぶことにします。

定理 I 十分小さな開近傍, $T_0 \subset \mathbb{C}$, $X' \subset \mathbb{C}^n$ をとれば,

$(0, \tilde{x}') \in X \equiv T_0 \times X'$, $\tilde{x}_1 \neq 0$ ($\tilde{x}' = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$) なる任意の点 $(0, \tilde{x}')$ における (1) の解 $u(x)$ は

$$(3) \quad u(x) = \sum_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} \left\{ \Phi_{\sigma}^1(x) + \sum_{l=1}^{m_{\sigma}-1} \int_0^{x_0} dt_l \int_0^{t_l} dt_{l-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \Phi_{\sigma}^{l+1}(t_1 \dots t_l, x) \right\} + H(x)$$

と表示される。ただし $\Phi_{\sigma}^i = \Phi_{\sigma}^i(t_1, \dots, t_{i-1}, x)$ は次の形をしている:

$$(4) \quad \Phi_{\sigma}^i = \left[\frac{e_{\sigma}^i(t_1 \dots t_{i-1}, x)}{(\varphi_{\sigma}^{12 \dots i}) p_{\sigma}^i} + g_{\sigma}^{i(i)} \log \varphi_{\sigma}^{12 \dots i} \right] (t_1 \dots t_{i-1}, x) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m_{\sigma}-1 \text{ 或} \\ i = m_{\sigma} = 1 \end{matrix}$$

$$(5) \quad \Phi_{\sigma}^{m_{\sigma}} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_{\sigma, j}(t_1 \dots t_{m_{\sigma}-1}, x)}{(\varphi_{\sigma}^{12 \dots m_{\sigma}})^j} + g_{\sigma}^{m_{\sigma}(i)} \log \varphi_{\sigma}^{12 \dots m_{\sigma}} \right] (t_1 \dots t_{m_{\sigma}-1}, x), \quad m_{\sigma} \geq 2$$

ここで $p_\sigma^i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $H \in \mathcal{O}(X)$, $e_\sigma^i, g_\sigma^i, \varphi_\sigma^{12 \dots i} \in \mathcal{O}(T_0^i \times X')$
 $(T_0^i = \underbrace{T_0 \times \dots \times T_0}_{i \text{ times}} \subset \mathbb{C}^i)$, $f_{\sigma,j} \in \mathcal{O}(T_0^{m_\sigma} \times X')$ は $(0, x') \in X$ に依存しない。無限和は広義一様収束とし、さらに次の評価をもつ。

$$(6) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{f_{\sigma,j}}{(\varphi_\sigma^{12 \dots m_\sigma})^j} (t_1 \dots t_{m_\sigma}, x) \right| \leq B \exp C \left| \varphi_\sigma^{12 \dots m_\sigma} \right|^{-\left(\frac{1}{s-1}\right)}, \quad s = \frac{m_\sigma}{m_\sigma - 1}$$

(B, C は $(t_1 \dots t_{m_\sigma}, x) \in T_0^{m_\sigma} \times X' \setminus \{\varphi_\sigma^{12 \dots m_\sigma} = 0\}$ に依らない定数)

(注) (3) において $m_\sigma = 1$ なる σ については積分項はなく、 Φ_σ^1 の特異性は高々 $\log$ -pole 型である。 $m_\sigma \geq 2$ の時は Φ_σ^i , $1 \leq i \leq m_\sigma - 1$, についてはやはり高々 $\log$ -pole 型であり、 $\Phi_\sigma^{m_\sigma}$ は無限和であるが、 $\varphi_\sigma^{12 \dots m_\sigma} = 0$ に近づくとき 高々示度 $s = \frac{m_\sigma}{m_\sigma - 1}$ の増大度である。

証明は [5] と同様に、形式解を構成し、次にその収束を示して行ないます。しかし輸送方程式を導く時、[5] では微分作用素だけで済ましていた計算と、擬微分作用素まで拡張する必要があります。結果として、輸送方程式は Goursat 問題を次々に解いていく形になります。詳しくは Kobayashi [6] を参照して下さい。

§ 積分表示された解の解析接続

さて、(3) は $(0, x') \in X, x' \neq 0$ なる点において確かに正則関数の芽を定めます。実際 $\varphi_\sigma'(0 \cdots 0, x') = x' \neq 0$ ですから $(t_1 \cdots t_{l-1}, x_0, x') = (0 \cdots 0, 0, x')$ を中心とする *polydisc* を十分小さく取れば、 $\Sigma_\sigma^{(i)_l}$ はそこで正則であり ($\varphi_\sigma \neq 0$)、累次積分を行なうことにより $(0, x')$ における正則関数の芽が定まります。この芽がどこまで解析接続できるかと次に述べます。まず記号を導入します。

$$\bullet \quad J(k) = \bigcup_{l=1}^k \{ (i)_l = (i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{N}^l; 1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k \}$$

$$\bullet \quad \Sigma_\sigma^{(i)_l} = \{ x \in X; \exists (t_1 \cdots t_{l-1}) \in T_0^{l-1}, \varphi_\sigma^{(i)_l}(t_1 \cdots t_{l-1}, x) = \frac{\partial \varphi_\sigma^{(i)_l}}{\partial t_l}(t_1 \cdots t_{l-1}, x) = \dots = \frac{\partial \varphi_\sigma^{(i)_l}}{\partial t_{l-1}}(t_1 \cdots t_{l-1}, x) = 0 \}, (i)_l \in J(m_\sigma)$$

$$(l=1 \text{ のときは } \Sigma_\sigma^{i_1} = \{ x \in X; \varphi_\sigma^{i_1}(x) = 0 \})$$

$$\bullet \quad \Sigma_{\sigma,0} = \bigcup_{(i)_l \in J(m_\sigma)} \overline{\Sigma_\sigma^{(i)_l}} \quad (\Sigma_\sigma^{(i)_l} \text{ の閉包}).$$

$x \in X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ に対して

$$\bullet \quad S_\sigma^{(i)_l}(x) = \{ (t_1, \dots, t_{l-1}) \in T_0^{l-1}; \varphi_\sigma^{(i)_l}(t_1 \cdots t_{l-1}, x) = 0 \}$$

これは $x \notin \Sigma_\sigma^{(i)_l}$ ですから T_0^{l-1} の複素部分多様体となります。

す。 $\rho: T_0^{m_\sigma-1} \rightarrow \mathbb{R}$ と下に有界かつ *proper* な C^∞ -関数と

するとき $\rho_x^{(i)_l}: T_0^{l-1} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x = (x_0, x') \in T_0 \times X' (= X), (i)_l \in J(m_\sigma), l \geq 2)$ を

$$\bullet \quad \rho_x^{(i)_l}(t_1 \cdots t_{l-1}) = \rho(0 \cdots 0 \overset{i_1}{t_1} \cdots \overset{i_2}{t_1}, \overset{i_3}{t_2} \cdots \overset{i_{l-1}}{t_{l-1}}, \overset{i_l}{t_{l-1}}, x_0 \cdots x_0)$$

で定めます。($i_\ell = m_\sigma$ のときは x_0 の項はない。) このとき

$x \in X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ に対して

$$\bullet \quad D_\sigma^{(i)_\ell}(x) = \{ \text{critical values of } f_x^{(i)_\ell} \} \cup \{ \text{critical values of } f_x^{(i)_\ell} |_{S_\sigma^{(i)_\ell}(x)} \}$$

$$\bullet \quad D_{p,\sigma}(x) (= D_\sigma(x)) = \bigcup_{\substack{(i)_\ell \in J(m_\sigma) \\ \ell \geq 2}} D_\sigma^{(i)_\ell}(x) \subset \mathbb{R}$$

(注) Sand の定理により $D_{p,\sigma}(x)$ の測度は零。

定義 $X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ の閉部分集合 $\Sigma_{\sigma,\infty}$ と次で定める。

$$x \in X \setminus \Sigma_{\sigma,0} \text{ が } x \notin \Sigma_{\sigma,\infty}$$

$\Leftrightarrow \exists f: T_0^{m_\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ 下に有界かつ proper な C^∞ 関数 と

x の右近傍 $\exists U \subset X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ が存在して, 任意の $R_0 \gg 1$

に対して $\exists R > R_0$ が存在して $R \notin D_{p,\sigma}(y)$, $y \in U$

となる。

定理 II $\Sigma_0 = \bigcup_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} \Sigma_{\sigma,0}$, $\Sigma_\infty = \bigcup_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} \Sigma_{\sigma,\infty}$ とおく。(3) によ

って定まる $(0, x') \in X$, $x' \neq 0$ における正則関数の芽は

$X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty)$ の $(0, x')$ を含む連結成分上自由に解析接続
できる。

§ 定理 II の証明の方針

(3) の 1 つづつの積分項について調べれば十分ですから、余計な添字は省略して、次の関数 $I(x)$ について考えます。

$$(7) \quad I(x) = \int_0^{x_0} dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \, \Phi(t, x), \quad \begin{pmatrix} t = (t_1 \cdots t_m) \in \mathbb{C}^m \\ x \in \mathbb{C}^{n+1} \end{pmatrix}$$

(Φ_m は方程式の階数とは関係ない)。 $T = T_0^m$, $Y = T \times X$
 $S = \{(t, x) \in Y : \varphi(t, x) = 0\}$ とおく。簡単のために Φ は
 $Y \setminus S$ 上の一価正則関数とします。(多価の場合には $Y \setminus S$
 の universal covering space を考えればよい)。

$G_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ x から x_0 ($x = (x_0, x')$) への線分,
 $\Delta = \{(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_m \leq 1\}$ を m -単体とすると
 きパラメータ $x \in U$ の m -chain $\alpha_x : \Delta \rightarrow Y$ を
 $\alpha_x(s_1, \dots, s_m) = (G(s_1), \dots, G(s_m), x)$ で定めます。 x が $(0, x')$
 の十分小さい近傍 U を動き、 α_x が S と交わらないときには、

$$(8) \quad I(x) = \int_{\alpha_x} \Phi(t, x) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m$$

となり U 上の正則関数となります。この時次のことに注意します。

(a) α_x はパラメータ $x \in U$ に連続的に依存する

(b) $\alpha_x(\Delta) \subset (Y \setminus S)_x (= (Y \setminus S) \cap p_x^{-1}(x))$

(c) $\alpha_x(\partial^i \Delta) \subset A_i = \{t_i = t_{i-1}\}$, $i = 1, 2, \dots, m+1$,

ただし $p_X: Y \rightarrow X$: 自然な射影, $\partial^i \Delta = \{s \in \Delta; s_i = s_{i-1}\}$
 $i=1, 2, \dots, m+1$, $s_0=0$, $s_{m+1}=1$, $t_0=0$, $t_{m+1}=x_0$,

逆に Stokes の定理を使うことにより次の補題が証明されます。

補題 $U \subset X$ の開集合, $\alpha_X: \Delta \rightarrow Y \in \text{パラメータ } X \in U$
 を m -chain とする。もし α_X が (a), (b), (c) を満たせば (8) で定まる関数 $I(x)$ は U 上正則となる。
 (α_X は上で与えたような特別なものでなくてよい!)

この補題を使えば, (7) を解析接続するという問題は, chain $\alpha_X \in (a), (b), (c)$ を満たしながら変形していくという, 位相幾何の問題に還元されます。あとは, 位相幾何の有名な定理 1-st isotopy lemma of Thom (cf [1], [8]) と それを射像が proper でない場合に modify した補題 ([2]) を適用して, chain を変形できる範囲を調べればよい。ざっといって

Σ_0 は射像が submersion とならない点, Σ_∞ は射像が proper となるようにできる点と言えます。詳しくは Kobayashi [7] を参照して下さい。

(注) 実平面で双曲型方程式の特異性の伝播と同様に Σ_0 は

特性曲統の言葉で述べることができます。それに対して Σ_∞ は遠方の境界の影響から出てくる特異性と考えられ、今の所正体が不明です。

(注) 積分変数が 1 の場合 $\varphi(t_1, 0) \equiv 0$ であれば Σ_∞ が空集合としてよりことはすぐにわかります。しかし積分変数が 2 以上の場合に Σ_∞ が空集合となる条件と筆者はもっていません。

(注) $\varphi(t_1 \cdots t_m, x)$ が t についての多項式で $T_0 = \mathbb{C}$ とできる時には $\mathbb{C}^m \in P(\mathbb{C})$ にうめこむことで proper の条件を満たすようにすれば、いろいろな例について Σ_∞ は計算しやすくなります。

最後に例をあげます。

例 1. $a = (\frac{\partial}{\partial x_0})^2 - x_2^2 ((\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + \cdots + (\frac{\partial}{\partial x_n})^2)$

$$\varphi^{12} = x_1 + \frac{x_2}{2} (e^{2t_1 - x_0} - e^{x_0 - 2t_1})$$

$$\Sigma^1: x_1 + \frac{x_2}{2} (e^{x_0} - e^{-x_0}) = 0, \quad \Sigma^2: x_1 - \frac{x_2}{2} (e^{x_0} - e^{-x_0})$$

$$\Sigma^{12}: x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \Sigma_0 = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^{12}, \quad \Sigma_\infty: x_2 = 0$$

例 2 $a = (\frac{\partial}{\partial x_0}) \{ (\frac{\partial}{\partial x_0}) + 2x_2 (\frac{\partial}{\partial x_1}) + (\frac{\partial}{\partial x_2}) \} \{ (\frac{\partial}{\partial x_0} + 2x_3 (\frac{\partial}{\partial x_1}) + (\frac{\partial}{\partial x_3}) \}$

$$\varphi^{123} = x_1 - 2x_2 t_2 + t_2^2 + 2(x_2 - x_3 - t_2)t_1 + 2t_1^2$$

$$\Sigma^1: x_1 - 2x_2 x_0 + x_0^2 = 0, \quad \Sigma^2: x_1 - 2x_2 x_0 + x_0^2 = 0, \quad \Sigma^3: x_1 = 0$$

$$\Sigma^{12} : x_0^2 - 2(x_2 + x_3)x_0 - (x_2 - x_3)^2 + 2x_1 = 0, \quad \Sigma^{23} : x_1 - x_2^2 = 0$$

$$\Sigma^{13} : x_1 - x_3^2 = 0, \quad \Sigma^{123} : x_1 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

$$\Sigma_0 = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^{12} \cup \Sigma^{13} \cup \Sigma^{23} \cup \Sigma^{123}, \quad \Sigma_\infty = \emptyset.$$

References

- [1] T. Fukuda, Types topologiques des polynomes, Publ. Math. I.H.E.S., 46 (1976) 87-106.
- [2] T. Fukuda and T. Kobayashi, A local isotopy lemma, to appear.
- [3] Y. Hamada, Probleme analytique de Cauchy a caracteristiques multiples dont les donnees de Cauchy ont des singularites polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 276 (1973), 1681-1684.
- [4] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systemes d'equations aux derivees partielles a caracteristiques multiples: probleme de Cauchy ramifies; hyperbolicite partielle, J. Math. pures et appl., 55 (1976) 297-352.
- [5] Y. Hamada and G. Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristics, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, 4 (1977) 725-755.
- [6] T. Kobayashi, On the singular Cauchy problem for operators with variable involutive characteristics, to appear.
- [7] T. Kobayashi, On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, to appear.
- [8] J. Mather, Note on topological stability, Lecture notes, Harvard University (1970).