『数書九章』と『括要算法』[1]

The Mathematical Treatise in Nine Chapters and the Compendium of Mathematics

聖心女子学院　田辺寿美枝 (Sumie Tanabe)
Sacred Heart Senior High School

概 要

It is known that a simultaneous congruences of the first degree which will be henceforth called a remainder problem, first appeared in the Sunzi's Arithmetical Canon [Sunzi Suanjing] (c.AD400). Later in China, remainder problems were discussed in many books, and some of these Chinese books were introduced into Japan by the seventeenth century. The eminent Japanese mathematician Seki Takakazu(c.1642?-1708) investigated remainder problems adopting the term "the art of cutting bamboo[jianguan shu, Senkan-jutsu]" which is found in the Chinese book, Yang Hui's Arts on Arithmetic[Yanghui Suanfa] (1275) by Yang Hui. Seki had certainly consulted the Chinese book, but Seki's method is much more advanced than Yang Hui's. Seki generalized the theory on the remainder problem and showed the procedure for the solution systematically. The aim of this paper is to compare the remainder problems Seki presented in Compendium of Mathematics with those of Chinese books, especially with those of the Mathematical Treatise in Nine Chapters[Shushu Jiuzhang] (1247) by Qin Jiushao.

1　はじめに

南宋の 秦九韶（1202?〜1267）が 1247 年に著した『数書九章』とその数百年余の後，関孝和（1642？〜1708）の遺稿を関流の門弟，荒木村英，大高由昌が編集し，関の没後 1712 年に出版された『括要算法』，それぞれに収められている連立 1 次合同式 (以下，剰余方程式と呼ぶ)

「$x \equiv r_1 \pmod{m_1}$,　　, $x \equiv r_n \pmod{m_n}$」

についての比較検証を試みたい．

『数書九章』は 9 章 (類) からなる数学書で，その第 1 章大衍類(だいえんるい)(第 1 巻と第 2 巻) で剰余方程式 9 題とその解法「**大衍総数術**」を不定方程式の解法「**大衍求一術**」とともに述べている．一方，関孝和の『括要算法』は，元(げん)，亨(こう)，利(り)，貞(てい)の 4 巻からなっており，その亨巻 (第 2 巻) で剰余方程式 9 題を挙げ，その解法を「**翦管術**」と呼び，不定方程

[1]本稿は科学研究費補助金 奨励研究 課題番号 24913004 の助成を受けた研究の一環である．

式の解法「**剰一術**」とともに解説している．関が用いた「**翦管術**」という名称は中国，南宋の『楊輝算法』(1274〜1275 年，楊輝)「續古摘奇算法」(1275 年) の中で使われており，一方，奥付に「本ノマヽ 寛文辛丑仲夏下浣日 訂寫訖 關孝和」[2]と記されている『楊輝算法』が伝わっていることから,「**翦管術**」という用語は関が『楊輝算法』から援用したものと考えられる．また，関孝和の遺稿に基づく『括要算法』が出版された 1712 年に先んずる 1710 年には『大成算経』全 20 巻が建部賢明によって完成されている．この『大成算経』の第 6 巻「翦管」にも「求総数」と題して『括要算法』と同種の総数を求める形の剰余方程式が 8 題さらに変形施された問題 9 題と合わせ計 17 題，剰余方程式に関連する問題が収められている．この『大成算経』の問題も合わせ，これまでの研究 [C4] [C6] [C7] に続き，関孝和の「翦管術」についての検証を試みたい．

2 剰余方程式解法の流れ

『数書九章』と『括要算法』に述べられている剰余方程式の問題

「$x \equiv r_i \pmod{m_i}, i = 1, 2, \cdots, n,$ 但し $i \neq j$ で $(m_i, m_j) = 1$」$\cdots$ (1)[3]

の解法の流れは以下の通り[4].

まず $i = 1, 2, \cdots, n$ それぞれについて,

不定方程式 「 $\dfrac{M}{m_i}x - m_i y = 1,$ 但し $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$」$\cdots$ (2)

を解き, $\dfrac{M}{m_i}x = x_i$とする．この x_iは

「$x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $x_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ $(i \neq j)$」$\cdots$ (3)

を満たすので, $x \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \pmod{M}$ となる x のうち最小の正の整数を答としている．

不定方程式（2）の解法は「ユークリッドの互除法」と同等のもので，解法の詳細は参考文献 [C4] [C6] に述べた通りである．また，法が互いに素でない場合は，最小公倍数を変えずに互いに素である法の組に約す手続きを施し，法が各々二つずつ互いに素である不定方程式に置き換えてから解いている[5]．互いに素でない幾つかの数の組の最小公倍数を変えずに各々互いに素な数の組に約す方法を『数書九章』では「**両両連環求等**」,『括要算法』では「**互約** (2 数の場合)，**逐約** (3 数以上の場合)」と呼び，名称こそ異なるが，同様の手続きを用いて解いている．

[2]参考文献 [A4] [C1] [C4] [C5] [C6] 参照

[3]合同式「$x \equiv y \pmod{m}$」は「$x \quad y = km$ となる整数 k が存在する」ことを意味するものとし，法が整数でない場合にも用いる．

[4]整数 a, b の最大公約数を (a, b) と表す．

[5]可解条件については参考文献 [B1] [C6] 参照．

剰余方程式は『孫子算経』(400 年頃，著者不詳) 巻下に「物不知其総数」とある 1 題を嚆矢とし，その解法は「孫子定理」或いは「中国剰余定理」とも呼ばれている．中国では暦学や兵法などの必要から，古来よりその解法が伝えられていた.『数書九章』(1247 年)「**大衍総数術**」には 9 題，関が用いた「**翦管術**」という名のもととなった『楊輝算法』(1274〜1275 年)「續古摘奇算法」には 5 題，さらに時代を下って『算法統宗』(1592 年，程大位) にも 3 題収められている．剰余方程式およびその解法は，その時代や地域によって「物不知其総数」に始まり,「**大衍総数術**」「**翦管術**」さらには「秦王暗點兵」「韓信點兵」「鬼谷算」など様々に呼ばれ，伝承されていた．ただ，このような古来の多くの研究成果の中で算書という形で現在に伝えられているものは一部であり，さらにその中で日本にまで伝わり，和算に影響があったことが確認されているものは,『楊輝算法』と『算法統宗』である.『楊輝算法』は前述の通り，関孝和の署名入りの写本が伝わっており，一方『算法統宗』は『括要算法』の中に，その書名とともに引用されている (図 2 参照）. また,『算法統宗』を手本としたとされる『塵劫記』(吉田光由, 1627 年) には,『算法統宗』に載せられている『孫子算経』「物不知其総数」問題が「百五減算」として紹介されている．従って，関を含めた和算家達が『楊輝算法』と『算法統宗』から少なからず示唆を受けていたことは確かといえよう. ただ,『数書九章』以外の中国の算書には上述の不定方程式（2）の解法を含めた剰余方程式の解法は示されておらず，答えと略解が示されているだけである．日本においても関孝和以前の算書には不定方程式の解法は示されておらず，関孝和が携わった『括要算法』および『大成算経』において始めて，不定方程式の解法を含めた剰余方程式の解法の手順が示されている．この故に『数書九章』と『括要算法』それぞれの剰余方程式問題の比較検証を試みる意義がある，と考えるものである．

3　『数書九章』第 1 章「大衍類」

秦九韶の『数書九章』は 9 章 (類)18 巻からなる数学書で，各章ごとに 9 題，全 81 題の問題からなっている。欽定四庫全書には『数学九章』として収められており,「数学」の語源ともなったと見られている．その第 1 章「大衍類」(第 1 巻，第 2 巻) には次頁に示す剰余方程式 9 題が収められている．第 2 章 (第 3 巻) 天時類に収められている 1 題「治歴演紀」も不定方程式の問題であるが，この問題は中国剰余定理を用いずに解いている.『数書九章』第 1 章「大衍類」の冒頭第 1 問「蓍卦發微」の解答の部分で，剰余方程式をその法をなす数の組の種類に応じて分類し，名を付けている．

法が整数の場合は「元数」
法が小数を含む場合は「収数」
法が分数を含む場合は「通数」
法が 10^n の倍数の場合「復数」

と 4 種に分類し，法の分類に応じて法が整数である合同式に置き換え，さらに法の組

が互いに素でない場合には,「**両両連環求等**」を施し，法を互いに素とした後，不定方程式の解法「**大衍求一術**」とともに，剰余方程式の解法「**大衍総数術**」を用いて解いている.「**大衍求一術**」および「**大衍総数術**」とは,「衍 (余り) が一となる術」,「衍 (余り) から総数を求める術」という意かと考えられる.『数書九章』に関しては参考文献 [B4] [B5] [B7] [C2] [C3] など先行研究がある.

『数書九章』第 1 章（第 1 巻，第 2 巻)「大衍類」に収められている剰余方程式，法が小数，分数のものも含め，敢えて合同式を用いて表したものが以下の 9 題である.

第 1 問 (第 1 巻)「蓍卦發微」

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{1} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

第 2 問 (第 1 巻)「古暦會積」

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{365\frac{1}{4}} \\ x \equiv 8 \pmod{29\frac{499}{940}} \\ x \equiv 0 \pmod{60} \end{cases}$$

第 3 問 (第 1 巻)「推計土功」

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{54} \\ x \equiv 0 \pmod{57} \\ x \equiv 51 \pmod{75} \\ x \equiv 18 \pmod{72} \end{cases}$$

第 4 問 (第 1 巻)「推庫額銭」

$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{12} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \\ x \equiv 0 \pmod{10} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \\ x \equiv 6 \pmod{8} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$$

第 5 問 (第 2 巻)「分糶推原」

$$\begin{cases} x \equiv 0.32 \pmod{0.83} \\ x \equiv 0.70 \pmod{1.10} \\ x \equiv 0.30 \pmod{1.35} \end{cases}$$

第 6 問 (第 2 巻)「程行計地」

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{300} \\ x \equiv 180 \pmod{240} \\ x \equiv 60 \pmod{180} \end{cases}$$

第 7 問 (第 2 巻)「程行相及」

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{300} \\ x \equiv 0 \pmod{250} \\ x \equiv 0 \pmod{200} \end{cases}$$

第 8 問 (第 2 巻)「積尺尋源」

$$\begin{cases} x \equiv 60 \pmod{130} \\ x \equiv 30 \pmod{120} \\ x \equiv 20 \pmod{110} \\ x \equiv 30 \pmod{100} \\ x \equiv 30 \pmod{60} \\ x \equiv 30 \pmod{50} \\ x \equiv 5 \pmod{25} \\ x \equiv 10 \pmod{20} \end{cases}$$

第 9 問 (第 2 巻)「餘米推數」

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv 14 \pmod{17} \\ x \equiv 1 \pmod{12} \end{cases}$$

『数書九章』「大衍類」の９題はみな易，暦，測量などそれぞれに特色のある実際的，具体的な問題ばかりであり，問題それぞれに表題が付けられている．また，法は小数「収数」，分数「通数」あるいは桁数の大きな「復数」が含まれ，さらに最後の第９問 「餘米推数」を除く８題はすべて法が互いに素でない,「**両両連環求等**」を必要とする問題となっている．

例えば，第５問 「分糶推原（ぶんちょうすいげん）」（図１）は,「甲，乙，丙の３人が収穫し，等分した穀物をそれぞれ異なる地方の斛 (ます) を使って売った. 甲は官斛 (八斗三升入り) で売って三斗二升余し，乙は安吉斛 (一石一斗入り) で売って七斗余し，丙は平江斛 (一石三斗五升入り) で売って三斗余した. このとき，其の米の量と３人それぞれの分はいくらか」と問う問題である．原文を敢えて合同式で表せば,
「$x \equiv 0.32 \pmod{0.83}$，$x \equiv 0.70 \pmod{1.10}$，$x \equiv 0.30 \pmod{1.35}$」となる．この問題を，まず「$x \equiv 32 \pmod{83}$，$x \equiv 70 \pmod{110}$，$x \equiv 30 \pmod{135}$」と書き換え，整数でない法の組「0.83，1.10，0.30」を整数の組「83，110，135」にする．この新たな法「83，110，135」は互いに素でないので,「**(両両) 連環求等**」を適用し, 法を「83，110，27」と互いに素である数の組に置き換え，その後「**大衍求一術**」,「**大衍総数術**」を用い,「其の米 738 石，3 人の分はそれぞれ 246 石」と答えている．

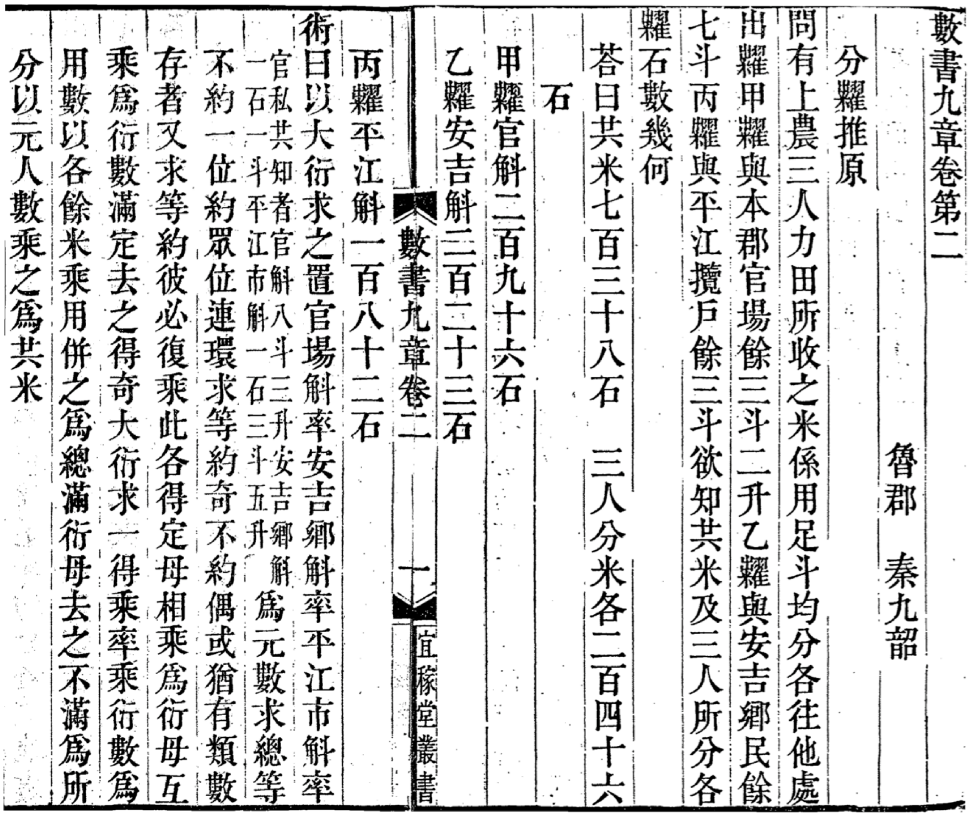
數書九章卷第二
魯郡　秦九韶
分糶推原
問有上農三人力田所收之米係用足斗均分各往他處出糶甲糶與本郡官場餘三斗二升乙糶與安吉鄉民餘七斗丙糶與平江攬戶餘三斗欲知共米及三人所分各糶石數幾何
荅曰共米七百三十八石　三人分米各二百四十六石
甲糶官斛二百九十六石
乙糶安吉斛三百二十三石
丙糶平江斛一百八十二石
術曰以大衍求之置官場斛率安吉鄉斛率平江市斛率官私共知者官斛八斗三升安吉鄉斛一石一斗平江市斛一石三斗五升爲元數求總等不約一位約衆位連環求等約奇不約偶或猶有類數存者又求等約彼必復乘此各得定母相乘爲衍母互乘爲衍數滿定去之得奇大衍求一得乘率乘衍數爲用數以各餘米乘用併之爲總滿衍母去之不滿爲所分以元人數乘之爲共米
數書九章卷二　一　宜稼堂叢書

図１　『数書九章』（和算研究所所蔵） 巻二より「分糶推原」

4　『括要算法』亨巻「翦管術解」

関孝和は「括要算法」亨巻の前編において「諸約の法」として,「**互約，逐約，斉約，遍約，増約，損約，零約，遍通，剰一**」を紹介している.「諸約の法」のうち，**翦管術**に直接利用されているものを以下に紹介する.

まず，最大公約数のことを**等数**と呼び，２つの数の**等数**は互いに減じることを繰り返せば求まるとし，ユークリッドの互除法と同じ方法を示している.次に，互いに素でない自然数の組を最小公倍数を変えずに，互いに素である数の組に約すことを「数が２つの場合は**互約**」,「数が３つ以上の場合は**逐約**」と呼んでいる.**互約，逐約**の結果は必ずしも一意ではない.

〔例〕６と８を互約すると３と８に，36 と 48 を互約すると９と 16 になる.
30 と 54 を互約すると５と 54，或いは，10 と 27 と２通りの互約が可能.
〔例〕105，112，126 を逐約すると，例えば ５，16，63 となる.

最小公倍数を求めることを**斉約**，いくつかの数を最大公約数で約すことを**遍約**と呼んでいる.　〔例〕８，10 は遍約すると４，５に，12，30，39 は ４，10，13 になる.
「諸約の法」の最後には，１次不定方程式

「$Ax - By = 1$,　但し, A, B は互いに素な整数」

の解法を述べ,「一を剰(あま)す」という意味からか,「**剰一**」と呼んでいる[6].

前半の「諸約術」に対し，後編は「**翦管術解**」と名付けられ，前編の諸約術を道具立てとして，９題の剰余方程式及びその解法を示している．次頁 $\boxed{1}$〜$\boxed{9}$ は，後編「**翦管術解**」に収められている剰余方程式９題を，それぞれの総数を x として合同式を用いて表したものである．すべて抽象化された問題で，数値も平易なものばかりであるが，それぞれに特色のある剰余方程式９題がきれいに配置され，提示されている．関は剰余方程式

「$x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, 2, \cdots, n,$　但し $(m_i, m_j) = 1\ (i \neq j)$」

をさらに一般化して

「$a_i x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, 2, \cdots, n,$　但し $(m_i, m_j) = 1\ (i \neq j)$」

とし，第１問から第５問は $a_i = 1$ である問題，第６問から第９問は $a_i \neq 1$ の問題，
さらに，法 m_i, m_j が互いに素でない問題をも扱い，
奇数番の問題は法が互いに素，$(m_i, m_j) = 1$ である問題，
偶数番の問題は法が互いに素でない，$(m_i, m_j) \neq 1$ である問題
と配置している.

[6]関と建部賢明，賢弘兄弟との共著である『大成算経』の中では「剰一」は「累約」と呼ばれている.

『数書九章』に見られるような，法が小数，分数，10^n の倍数などとなる問題はない．しかし，係数が単純なゆえに，剰余方程式の解法の本質が際立って，明解に示されている．解法の読み下し，詳細は参考文献 [C4] [C6] などにある．

$\boxed{1}$ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$

答 $x = 16$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{36} \\ x \equiv 14 \pmod{48} \end{cases}$

答 $x = 110$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$

答 $x = 26$

$\boxed{4}$ $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 6 \\ x \equiv 3 \pmod 8 \\ x \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$

答 $x = 75$

$\boxed{5}$ $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 9 \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$

答 $x = 128$

$\boxed{6}$ $\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \\ 45x \equiv 35 \pmod{50} \end{cases}$

答 $x = 13$

$\boxed{7}$ $\begin{cases} 8x \equiv 2 \pmod 3 \\ 7x \equiv 3 \pmod 4 \\ 6x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$

答 $x = 13$

$\boxed{8}$ $\begin{cases} 34x \equiv 6 \pmod 8 \\ 34x \equiv 14 \pmod{20} \\ 34x \equiv 23 \pmod{27} \end{cases}$

答 $x = 11$

$\boxed{9}$ $\begin{cases} 13x \equiv 3 \pmod 7 \\ 13x \equiv 8 \pmod 9 \end{cases}$

答 $x = 11$

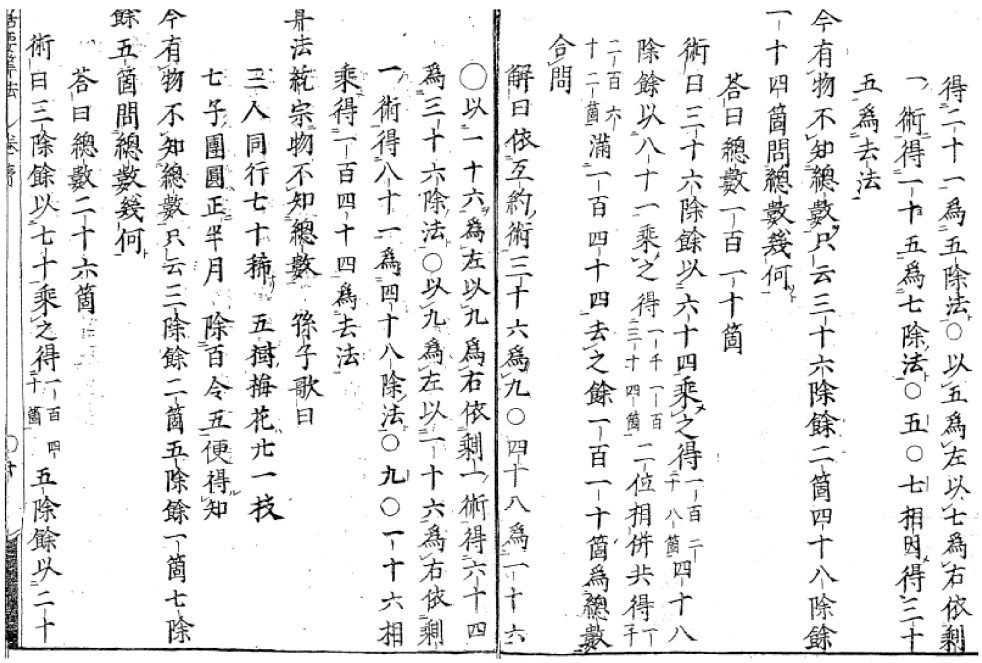
得二十一為五除法○以五為左以七為右依剰
一術得一十五為七除法○五○七相因得三十
五為去法
今有物不知總數只云三十六除餘二箇四十八除餘
一十四箇問總數幾何
荅曰總數一百一十箇
術曰三十六除餘以六十四乘之得一百二十八箇四十八
除餘以八十一乘之得一千一百三十四箇二位相併共得一千
二百六十二箇滿一百四十四去之餘一百一十箇為總數
合問
解曰依互約術三十六為九○四十八為一十六
○以一十六為左以九為右依剰一術得六十四
為三十六除法○以九為左以一十六為右依剰
一術得八十一為四十八除法○九○一十六相
乘得一百四十四為去法
算法統宗物不知總數　孫子歌曰
三人同行七十稀　五樹梅花廿一枝
七子團圓正半月　除百令五便得知
今有物不知總數只云三除餘二箇五除餘一箇七除
餘五箇問總數幾何
荅曰總數二十六箇
術曰三除餘以七十乘之得一百四十箇五除餘以二十

図２　『括要算法』（個人蔵）より亨巻「翦管術解」

5　『大成算経』第６巻「翦管」

『大成算経』は関孝和が建部賢明，賢弘兄弟とともに 1683 年から編纂を始め，その後関は 1708 年に没し，弟の賢弘は公務多忙となり，最終的には，編纂開始から 20 余年を経た 1710 年，兄の賢明によって完成に至った．その最終版は全 20 巻からなり，刊行こそされていないが，当時の和算の集大成と云えるものである．この『大成算経』の第６巻「翦管」には「求総数」と題された剰余方程式問題８題および変形施された問題９題と合わせ計 17 題が収められている．

第６巻「翦管」の「求総数」と題された８題は以下のものである．(原文に「総数二約」とあるものは「$x/2$」,「総数取三分之二」は「$\frac{2}{3}x$」と表した．)

$\boxed{1}$ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$

答　$x = 16$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 6 \\ x \equiv 3 \pmod 8 \\ x \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$

答　$x = 75$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} x + 6 \equiv 3 \pmod 5 \\ x \quad 9 \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$

答　$x = 22$

$\boxed{4}$ $\begin{cases} x/2 \equiv 3 \pmod 5 \\ x/3 \equiv 4 \pmod 7 \\ x/4 \equiv 6 \pmod 9 \end{cases}$

答　$x = 96$

$\boxed{5}$ $\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \end{cases}$

答　$x = 13$

$\boxed{6}$ $\begin{cases} 24x \equiv 12 \pmod{30} \\ 35x \equiv 7 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \end{cases}$

答　$x = 53$

$\boxed{7}$ $\begin{cases} \frac{2}{3}x \equiv 4 \pmod 7 \\ \frac{3}{4}x \equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$

答　$x = 48$

$\boxed{8}$ $\begin{cases} (x+5)/2 \equiv 3 \pmod 6 \\ 3(x \quad 4) \equiv 4 \pmod 7 \\ \frac{3}{5}(x+2) \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$

答　$x = 73$

ここまでに挙げた８題はすべて『括要算法』の「**翦管術解**」と同じ「総数を求める」問題である．$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ は『括要算法』と全く同じ数値の問題，$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ は『括要算法』にある問題を少し変形したものである．一方, その他の問題 $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ のように総数に加減乗除を施したものは『括要算法』にはない．

『大成算経』６巻には，この「求総数」８題に続き,「求加減数」１題,「求約数」１題「求分母」１題,「求分子」１題,「求相乗数」５題の９題,「求総数」と合わせて全部で 17 題の剰余方程式が収められている．

「求加減数」第１問

$$\begin{cases} 23 + x \equiv 2 \pmod 8 \\ 23 + x \equiv 4 \pmod{10} \end{cases}$$

答　$x = 11$

「求約数」第１問

$$\begin{cases} 39 \div x \equiv 1 \pmod 3 \\ 39 \div x \equiv 3 \pmod 5 \\ 39 \div x \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$$

答　$x = 3$

「求分母」第１問

$$\begin{cases} \dfrac{35}{x} \quad 3 \equiv 7 \pmod 8 \\ \dfrac{35}{x} \quad 4 \equiv 2 \pmod 9 \end{cases}$$

答　$x = 7$

「求分子」第１問

$$\begin{cases} 45 \quad \dfrac{x}{3} \equiv 2 \pmod 7 \\ 45 \quad \dfrac{x}{5} \equiv 8 \pmod{10} \end{cases}$$

答　$x = 2$

「求相乗数」第１問

$$\begin{cases} 34x \equiv 6 \pmod 8 \\ 34x \equiv 5 \pmod 9 \\ 34x \equiv 4 \pmod{10} \end{cases}$$

答　$x = 11$

「求相乗数」第２問

$$26x + 15y = 265$$

答　$x = 5$, $y = 9$

これらの問題はまずはじめに総数が与えられ，その総数に加減乗除いずれかを施し，その数を求めるという形の問題になっている．このような「求加減数」「求約数」「求分母」「求分子」「求相乗数」という種の問題もまた『括要算法』にはない．しかし，剰余方程式解法の本質，核心は『括要算法』に収められている「求総数」に凝縮されているといえる．
具体的な「翦管」問題の前に, 一般的な解法の解説を述べているところは,『数書九章』,『括要算法』と同様の組み立てになっている．

6　結び

日本に伝来したとされる中国の算書では, 法が互いに素である剰余方程式に限っていた中で，関孝和は剰余方程式を一般化し，法が互いに素でない問題をも扱い, 不定方程式の解法を含めた剰余方程式の一般的な解法を示した.『括要算法』以前の和算にあっては『股勾弦鈔』(1672 年, 星野実宣) に 1 題, 法が互いに素でない問題「$x \equiv 5 \pmod 6$, $x \equiv 7 \pmod 8$, $x \equiv 5 \pmod{10}$」が紹介されているが「答 95」だけが書かれ，解法は示されていない.「**翦管術**」という剰余方程式の名称こそ『楊輝算法』から援用したものの,『孫子算経』をはじめ『楊輝算法』,『算法統宗』など，日本に伝わったとされる中国の算書の剰余方程式は問題と解答そして簡略な解法だけが示され，剰余方程式解法の核心である不定方程式の解法についての記述はない．不定方程式の解法を述べている中国の算書は秦九韶の『数書九章』である.『数書九章』では不定方程式の解法「**大衍求一術**」と剰余方程式の解法「**大衍総数術**」を用い,

「両両連環求等」→「大衍求一術」→「大衍総数術」

という流れの中で系統立てて語られていた．一方，関孝和の『括要算法』においては,

「互約・逐約」→「剰一術」→「翦管術」

と示されており，これは『数書九章』の解法と吻合するものであり，術の実質的組立てに於いても,『数書九章』と『括要算法』は同様の手順で進められている. 関孝和が示した剰余方程式の解法「**翦管術**」は，その後和算家たちによって大いに活用されるようになった（参考文献 [B2] [C7] 参照）.「剰余方程式を一般的に解いたこと」を関孝和の功績としている著述も多く見られる（参考文献 [B3] [B6] など）．しかし,『括要算法』に先んずること 450 年以上の南宋，隣国中国に於て，法が互いに素でない剰余方程式の解法が『数書九章』に著わされていた．そして，その解法の名称こそ異なれ,『括要算法』で示された解法の流れは『数書九章』のものと同様の手順，手法であった．従って「たとえ『数書九章』が日本に伝来していなかったとしても，口伝等によって，関は『数書九章』の解法を知り得ていたのではないか」とする説もある．今回改めて，この 2 つの書の問題を比較するに，両書それぞれの問題は実に趣きの異なるものである.『数書九章』の 9 題は易，暦をはじめ米の分量など具体的，実際的な問題を扱い，それぞれの数値は煩雑な，難易度の高いものばかりである．一方『括要算法』の 9 題は抽象化された単純な問題で，その数値はすべて平易な整数ばかりである．もし，関が『数書九章』を見知っていたとすれば，あのような複雑な問題を完全に抽象化したことになる．関が『数書九章』を見知っていたか，否かという問題は依然残されているとしても,『数書九章』さらに『大成算経』の問題と比較検証した結果として，関孝和が『括要算法』で示した「**翦管術**」の問題は一般化され抽象的，数値は平易，問題の形も単純なものばかりであった．この故に解法理論の本質が却って際立ち，鮮やかに説示されている．関孝和は複雑な問題の本質を見抜き，抽象化する力を備えていた．このことを『括要算法』亨巻「翦管術」はよく物語っていると云えるのではないだろうか.

参考文献

A．原典［A 1］　著者不詳『孫子算経』中国科学技術典籍通彙 河南教育出版 1993 年
［A 2］　秦九韶『数書九章』 中国科学技術典籍通彙 河南教育出版 1993 年
［A 3］　秦九韶『数学九章』 和算研究所所蔵
［A 4］　楊輝　『楊輝算法』 中国科学技術典籍通彙 河南教育出版 1993 年
［A 5］　程大位『算法統宗』 中国科学技術典籍通彙 河南教育出版 1993 年
［A 6］　関孝和『括要算法』　個人蔵
［A 7］　関孝和，建部賢明，建部賢弘『大成算経』京都大学附属図書館蔵

B．著作［B 1］　高木貞治『初等整数論講義』共立出版 1931 年
［B 2］　日本学士院編 『明治前日本数学史』第 2 巻 岩波書店 1956 年
［B 3］　平山諦『関孝和』恒星社厚生閣 1959 年
［B 4］　伊東俊太郎編『数学の歴史 II 中世の数学』 共立出版 1987 年
［B 5］　銭宝琮(川原秀城訳)『中国数学史』みすず書房 1990 年
［B 6］　平山諦『和算の誕生』恒星社厚生閣 1993 年
［B 7］　Ulrich Libbrecht
『Chinese Mathematics in the Thirteenth Century』
Dover Publications 2005 年

C．論文［C 1］　平山諦　「関孝和が楊輝算法を写した年」
日本数学史学会『数学史研究』68:1 － 2　1976 年
［C 2］　沈康身　「秦九韶の大衍総数術と関孝和の諸約術」
日本数学史学会『数学史研究』109:1 － 23　1986 年
［C 3］　城地茂　「もうひとつの天元術・大衍求一術」
日本数学史学会『数学史研究』148:1 － 12　1996 年
［C 4］　田辺寿美枝「関孝和の翦管術」
京都大学数理解析研究所講究録』1257:114 － 124　2003 年
［C 5］　城地茂　「中田高寛写・石黒信由蔵『楊輝算法』について」
『京都大学数理解析研究所講究録』1392:46 － 59　2004 年
［C 6］　田辺寿美枝「関孝和の翦管術 其ノ二」
『京都大学数理解析研究所講究録』1513:91-103　2006 年
［C 7］　田辺寿美枝「『勘者御伽雙紙』の翦管術」
『京都大学数理解析研究所講究録』1583：40-50　2008 年