

Pure Braid Groups と Milnor μ -不変量

広大理 大川哲介

Pure braid group と Milnor μ -不変量の関係を調べ、
その応用として、 P_n の mod. p -剰余中零性を証明する。

§1. 諸定義及諸事実

$$X_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \forall i \neq j (x_i = x_j \Rightarrow i = j) \}$$

と置き、 X_n の座標の置換にともなう n 次対称群 S_n の作用
による商空間を $Y_n = X_n / S_n$ と書く。すると

事実 1. $\forall i \geq 2$ に対して $\pi_i(X_n) = \pi_i(Y_n) = 0$ 。

が成立する。これより、

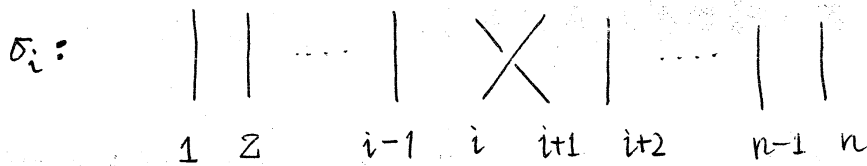
系. 次の完全列が従う。

$$1 \longrightarrow \pi_1(X_n) \longrightarrow \pi_1(Y_n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$$

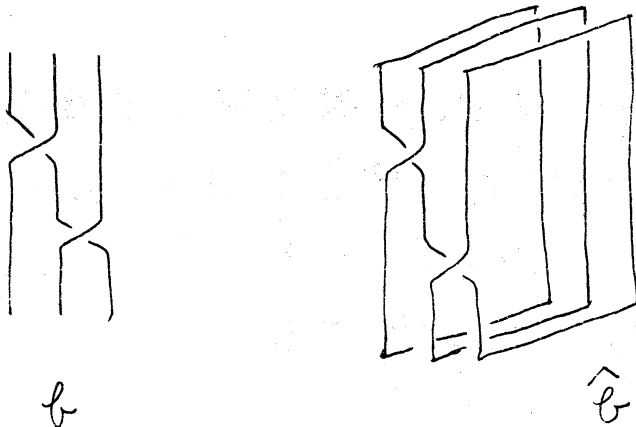
定義. $\pi_1(Y_n)$, $\pi_1(X_n)$ を各々, n 次 braid group,
 n 次 pure braid group と呼び、 B_n , P_n で表わす。

B_n は braid (組紐) の同値類によつて定義された群と
一致し、以下幾何学的表示を使う。 F_n を $x_1, \dots, x_n$ で生成
された階数 n の自由群とする。

事実2 (Artin). $\varphi_n: B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ を,
 $\varphi_n(\sigma_i)(x_i) = x_{i+1}$, $\varphi_n(\sigma_i)(x_{i+1}) = x_i^{-1} x_i x_{i+1}$
 $\varphi_n(\sigma_i)(x_j) = x_j \quad (j \neq i, i+1)$ で定義すると, 中への同
 型となる. 但し σ_i は次の図で示される B_n の生成元.



以下 $a^{-1}ba$ を b^a と書く. また $b \in B_n$ に対し, その
 closed braid $\hat{b}$ (S^3 内の link となる) を次の図で定義す
 る.



$b \in P_n$ なら, $\hat{b}$ は n -成分の link となる.

群 G が与えられた時, その普通の (又ハ mod. p の) 降中
 心列を $\Gamma_* G$ 又ハ $\Gamma_*^{(p)} G$ と表わす. $\{\Gamma_n^{(p)} G\}_{n=1}^\infty$
 は, 列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ で ① $G_1 = G$, ② $[G_m, G_n] \subset G_{m+n}$
 ③ $x \in G_n \rightarrow x^p \in G_{np}$ の三条件を満たす最小の (部
 分群) 列として特徴づけられる.

定義. $P_{n,g} = \{h \in P_n \mid \bar{\mu}(i_1 \dots i_k)(\hat{h}) = 0, \forall k \leq g, \forall i_1 \dots i_k\}$, $P_{n,g}^{(p)} = \{h \in P_n \mid \bar{\mu}(i_1 \dots i_k)(\hat{h}) \equiv 0 \pmod{p}, \forall k \leq g, \forall i_1 \dots i_k\}$ 但し $\bar{\mu}$ は Milnor $\bar{\mu}$ -不変量.

このとき次の諸結果が成立する.

定理1. (i) $P_{n,g}$ は B_n の, 従って P_n の正規部分群
 (ii) $[P_{n,g}, P_{n,r}] \subset P_{n,g+r}$
 (iii) $\bigcap_g P_{n,g} = \{1\}$

定理2. (i) $P_{n,g}^{(p)}$ は B_n の, 従って P_n の正規部分群
 (ii) $[P_{n,g}^{(p)}, P_{n,r}^{(p)}] \subset P_{n,g+r}^{(p)}$
 (iii) $h \in P_{n,g}^{(p)} \rightarrow h^p \in P_{n,pg}$
 (iv) $\bigcap_g P_{n,g}^{(p)} = \{1\}$

系. P_n は 剰余中零であり, さらに任意の素数 p に対し $\text{mod } p$ -剰余中零でもある.

§2. 定理の証明.

定理1も全く同様であるから, 定理2のみを証明する. まず次の事実に注意する.

事実3. $\phi \in P_n$ に対し, $\varphi_n(\phi)(x_i) = x_i^{f_i(x_1, \dots, x_n)}$ と書いた時 (但し f_i に於ける x_i の指数の和は零とする. この様な表示は一意的で, 標準表示と呼ぶ),

$$\phi \in P_{n,g} \Leftrightarrow f_i(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_g F_n \quad (\forall i)$$

$$\phi \in P_{n,g}^{(p)} \Leftrightarrow f_i(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_g^{(p)} F_n \quad (\forall i)$$

が成立.

mod. p の Magnus expansion.

$\Psi_n : F_n \rightarrow \bigcup (\mathbb{Z}_p[[v_1, \dots, v_n]])$ ($\mathbb{Z}_p$ 上非可換巾級数環の単数群) を $\Psi(x_i) = 1 + v_i$ で定義するとき, 次が成立.

事実4 (Bassenhau). $x \in F_n$ に対し $x \in \Gamma_g^{(p)} F_n \Leftrightarrow \Psi(x) = 1 + (g \text{ 次以上の項})$.

1) の証明. 正規性は $\widehat{a^{-1}ba} = \widehat{a}$ より明白だから部分群をなすことを云う. $\phi, \psi \in P_{n,g}^{(p)}$, $\varphi_n(\phi) = B$, $\varphi_n(\psi) = C$ とし, $B(x_i) = x_i^{f_i}$, $C(x_i) = x_i^{g_i}$ を各々標準表示とする. すると $B(C(x_i)) = B(x_i^{g_i}) = x_i^{f_i} C(g_i)$ となるが, 事実3, 4, 及び $\Gamma_g^{(p)} G$ が G の特性部分群 (任意の自己同型で不変) なることより $\psi C \in P_{n,g}^{(p)}$ が出る. また $B^{-1}(x_i) = x_i^{h_i}$ を標準表示とすると, $x_i = BB^{-1}(x_i) = x_i^{f_i} B(h_i)$ より $h_i = B^{-1}(f_i)$ となり $\phi^{-1} \in P_{n,g}^{(p)}$ が出る.

ii)の証明. $f_i \in P_{n,g}^{(p)}$, $C \in P_{n,r}^{(p)}$ とし, B, C, f_i, g_i を前と同様とする. $B^{-1}C^{-1}BC(x_i) = x_i h_i$ を標準表示とすると, 以下式変形を行い, $BC(x_i) = C B(x_i h_i)$, $B(x_i g_i) = C(x_i f_i B(h_i))$,
 $x_i f_i B(g_i) = x_i g_i C(f_i) CB(h_i)$,
 $\therefore f_i B(g_i) = g_i C(f_i) CB(h_i)$,
 $CB(h_i) = C(f_i)^{-1} g_i^{-1} f_i B(g_i)$
 $= C(f_i)^{-1} f_i(f_i, g_i) g_i^{-1} B(g_i)$ となる.
 ここで $(f_i, g_i) \in \Gamma_{g+r}^{(p)} F_n$ だから, $C(f_i)^{-1} f_i \in \Gamma_{g+r}^{(p)} F_n$ を示せば良い. $\Psi(f_i) = 1 +$ (g 次以上, の項) だし, F_n の自己同型 C を Magnus alg. $\mathbb{Z}_p[[[v_1, \dots, v_n]]]$ の自己同型に持上げて考えれば, 各 v_i に $C(v_i) = v_i + (r+1$ 次以上の項) を代入する操作だから, $\Psi(f_i)$ と $\Psi(C(f_i))$ は高々 $g+r-1$ 次の項まで一致し, $C(f_i)^{-1} f_i \in \Gamma_{g+r}^{(p)} F_n$ が成る.

iii)の証明. $f_i \in P_{n,g}^{(p)}$ に対し B, f_i を前と同じとすると

$$B^j(x_i) = x_i f_i B(f_i) B^2(f_i) \cdots B^{j-1}(f_i)$$

が帰納的に云えるから, $B^p(x_i) = x_i g_i$ を標準表示とすると, $g_i = f_i B(f_i) \cdots B^{p-1}(f_i)$ となる. だから

$f_i \in \Gamma_g^{(p)} F_n$ のときに この g_i が $\Gamma_{pg}^{(p)} F_n$ に属することさええば良い. F_n の自己同型 B を $\mathbb{Z}_p[[C_1, C_2, \dots, C_n]]$ の (連続) 自己同型に持ち上げたものを, 前と同様に, 同じく B で表わす. その時 $\Psi(B^j(f_i)) = B^j(\Psi(f_i)) = 1 + C_1 + \binom{j}{1} C_2 + \dots + \binom{j}{j} C_{j+1}$ (C_k : gk 次以上の項からなる) が帰納的に示される. よって次の補題を示せばよい.

補題. C_i を $\mathbb{Z}_p$ 上の次数環 (可換性は仮定しない) の i 次同次元とすると, $\prod_{i=0}^p (1 + C_1 + \binom{i}{1} C_2 + \dots + \binom{i}{i} C_{i+1})$ の k 次同次部分 ($0 < k < p$) は消える.

二項係数の計算によって示されるが詳細は略す.

ii) の証明. n に関する帰納法で証明する. $n=1$ のとき明白. $n-1$ のとき正しいとして n のとき示す. $h \in \cap_g P_{n,g}^{(p)}$ とすると 仮定より h の最初の $n-1$ 本の組紐は真直であるから, h を考えるとき その第 n 本目の紐は $\pi_1(S^3 - [n-1\text{-成分の自明 link}])$ の元を表わすと考えられるが, もしそれが真直でなければ 事実 4 により mod. p で消えない μ が現われるが, これは矛盾. **Q.E.D.**