

局所係数を持つコホモロジー理論の 一般化とその応用

広島大 理 岡井 孜

ordinary cohomology theory を一般化した generalized cohomology theory は代数的位相幾何学の有力な道具になっているが、対応する局所系を係数に持つ cohomology theory の一般化についてはどうであろうか。それが今後有力になるかどうか予想はつかないが、今回は J. C. Becker [1] の一般化の定義を採用すれば、generalized cohomology theory で成立する命題の多くは拡張された形で成立する事をみてゆく。

§1 定義

定義 1 [1] B を (基点 b_0 を持つ) 位相空間とする。この時、finite cell complex の対 (X, A) と連続写像 $f: X \rightarrow B$ との組 $(X, A; f)$ を object とし、連続写像 $g: (X, A) \rightarrow (X', A')$ で $f' \circ g = f$ をみたすものを $g: (X, A; f)$

$\rightarrow (X', A'; f')$ とか morphism とする category を $\mathcal{F}(B)$ とする。

定義 2 [1] h^n は $\mathcal{F}(B)$ から abel 群の category への $\text{contravariant functor}$ の列、 $d^n: h^n \cdot T \rightarrow h^{n+1}$ は $\text{natural transformation}$ の列とする。但し、 $T: \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ は $T(X, A; f) = (A, \emptyset; f|_A)$ で定まる functor とする。 h^n, d^n が次の (i) ~ (iii) をみたす時 (h^n, d^n) を $\text{cohomology theory on } \mathcal{F}(B)$ という。

(i) (homotopy axiom) $I = [0, 1]$ と置き、 $i_0: (X, A) \rightarrow (X, A) \times I$ を $i_0(x) = (x, 0)$ で定める。更に $\mathcal{F}(B) \ni ((X, A) \times I; F)$ とし、 $F \circ i_0 = f_0$ と置く。この時 $h^n(i_0): h^n(X \times I, A \times I; F) \rightarrow h^n(X, A; f_0)$ は全ての n で同型である。

(ii) (exactness axiom) $(X, A; f) \in \mathcal{F}(B)$ に対し、 $i: (A; f|_A) \rightarrow (X; f)$, $j: (X; f) \rightarrow (X, A; f)$ は共に $\mathcal{F}(B)$ に属し、次の sequence は exact である。

$$d^{n-1} \rightarrow h^n(X, A; f) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(X; f) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(A; f|_A) \xrightarrow{d^n} h^{n+1}(X, A; f) \rightarrow$$

(iii) (excision axiom) A_1, A_2 は $\text{finite cell complex } X$ の subcomplex で $A_1 \cup A_2 = X$ とする。この時 $i: (A_1, A_1 \cap A_2; f|_{A_1}) \rightarrow (X, A_2; f)$ $\in \mathcal{F}(B)$ に対し、 $h^n(i): h^n(X, A_2; f)$

$\rightarrow h^n(A_1, A_1 \cap A_2; f|_{A_1})$ は全ての n で同型である。

$b_0 \in B$ への定値写像を同じ b_0 で表わし、その object が $(X, A; b_0)$ であるもの全体からなる $\mathcal{S}(B)$ の subcategory を $\mathcal{S}_0(B)$ とかく。 $\mathcal{S}(B)$ 上の cohomology theory を $\mathcal{S}_0(B)$ に制限すると定義し (i) は普通の homotopy axiom を導き、 $\mathcal{S}_0(B)$ 上の cohomology theory は generalized cohomology theory になる。 triple の exact sequence, Mayer-Vietoris の exact sequence が存在する事は定義 (ii), (iii) から容易にわかる。

§2 h -fibration と spectral sequence

$\pi: E \rightarrow X$ と X の p -skeleton X_p とに對して、 $\pi^{-1}(X_p) = E_p$ は finite cell complex とし、 E の subcomplex E' に對して $\pi^{-1}(X_p) \cap E'$ は E_p の subcomplex とする。 $f: X \rightarrow B$ とする。 この時

$$D^{p,q} = h^{p+q}(E_p, E_p \cap E'; f|_{\pi})$$

$$E^{p,q} = h^{p+q}(E_p, E_{p-1} \cup (E_p \cap E'); f|_{\pi})$$

とおくと exact couple が構成される。 対応する spectral sequence は $F_p^n = \ker(h^n(E, E'; f|_{\pi}) \rightarrow h^n(E_{p-1}, E_{p-1} \cap E'; f|_{\pi}))$ とおくと $E_\infty^{p,q} = F_p^{p+q} / F_{p+1}^{p+q}$ に収束する。 $\{F_p^n\}_p$ は収束す

る filtration である。問題は spectral sequence の E_1 、 E_2 -term である。

定義3 $\pi: E \rightarrow X$ が次の条件を満たす時、これを k -fibration という。「任意の $f: X \rightarrow B$ 、 X の任意の cell Δ 、 Δ の任意の頂点 v と k に対し、 $h^n(\pi^{-1}(\Delta); f\pi) \rightarrow h^{n-1}(\pi^{-1}(v); f\pi)$ が全ての n で同型である」更に E の subcomplex E' に対して $\pi|_{E'}: E' \rightarrow X$ も k -fibration の時 $\pi: (E, E') \rightarrow X$ は relative k -fibration とよぶ。

定理1 relative k -fibration $\pi: (E, E') \rightarrow X$ と $f: X \rightarrow B$ とを与える。 X の各頂点 v に対し $h^n(\pi^{-1}(v), \pi^{-1}(v) \cap E'; f\pi)$ を対応させ、1-cell $[v_0, v_1]$ に対し $\gamma_{[v_0, v_1]}: h^n(\pi^{-1}(v_1), \pi^{-1}(v_1) \cap E'; f\pi) \xleftarrow{\cong} h^n(\pi^{-1}([v_0, v_1]), \pi^{-1}([v_0, v_1]) \cap E'; f\pi) \xrightarrow{\cong} h^n(\pi^{-1}(v_0), \pi^{-1}(v_0) \cap E'; f\pi)$ を対応させる事により X 上に局所系 $h^n(\overline{F}, \overline{F} \cap E'; f\pi)$ が定まる。但し $\overline{F} = \pi^{-1}(x_0)$ で x_0 は X の基点とする。この時先に構成された spectral sequence において

$$E_1^{p,q} \cong C^p(X; h^q(\overline{F}, \overline{F} \cap E'; f\pi))$$

$$E_2^{p,q} \cong H^p(X; h^q(\overline{F}, \overline{F} \cap E'; f\pi))$$

が成立する。

この定理より直ちに次の系が導かれる。

系1 $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ を $\mathcal{B}(B)$ 上の cohomology theory とする。
 $\tau: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ が natural transformation で $\tau(*; b_0): \mathcal{H}^i(*; b_0) \rightarrow \mathcal{H}'^i(*; b_0)$ が全ての i で同型ならば、任意の $(X, A; f) \in \mathcal{B}(B)$ に対して $\tau(X, A; f): \mathcal{H}^i(X, A; f) \rightarrow \mathcal{H}'^i(X, A; f)$ は全ての i で同型である。

系2 $\mathcal{B}(B)$ 上の cohomology theory $\mathcal{H}$ が $i \neq 0$ に対して $\mathcal{H}^i(*; b_0) = 0$ をみたすならば $\mathcal{H}^n(X, A; f) \cong H^n(X, A; \mathcal{H}^0(*; f))$ が任意の $(X, A; f) \in \mathcal{B}(B)$ に対して成立する。

§3 積について

定義4 基点 b_0 を持つ空間 B は基点を保つ写像 $\mu: B \times B \rightarrow B$ を持つとする。 $\mathcal{B}(B)$ 上の cohomology theory $\mathcal{H}$ が次の (i) (ii) を満たす natural pairing $\gamma: \mathcal{H}^p(X, A; f) \otimes \mathcal{H}^q(X', A'; f') \rightarrow \mathcal{H}^{p+q}((X, A) \times (X', A'); \mu(f, f'))$ を持つ時 $\mathcal{H}$ は multiplicative という。

- (i) $\mathcal{B}_0(B)$ に制限すると、 γ は bilinear, associative, commutative かつ unit $1 \in \mathcal{H}^0(S^0; *; b_0)$ を持つ。
- (ii) 次の diagram は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(A; f) \otimes H^q(X', A'; f') & \xrightarrow{\gamma} & H^{p+q}(A \times (X', A'); \mu(f \times f')) \\
 & & \approx \downarrow (\text{excision}) \\
 & & H^{p+q}(X \times B \cup A \times Y, X \times B; \mu(f \times f')) \\
 \text{d} \otimes 1 \downarrow & & \text{d} \downarrow \\
 H^{p+1}(X, A; f) \otimes H^q(X', A'; f') & \xrightarrow{\gamma} & H^{p+q+1}((X, A) \times (X', A'); \mu(f \times f'))
 \end{array}$$

対角線写像 $X \rightarrow X \times X$ を用いて cup 積を定義する。 $\mathcal{P}_0(B)$ で考えると generalized cohomology theory における cup 積になるが、 $\mathcal{P}(B)$ 上では $H^*(X, A; f)$ は必ずしも ring にならない、 $H^*(*, b_0)$ -module にもならない。しかし次の事は成立する。

補題 $\pi: (E, E') \rightarrow X$ を relative H -fibration、 X は連結で基点 x_0 に対し $\pi^{-1}(x_0) = F$ とする。 $f: X \rightarrow B$ に対して $\{a_i \in H^n(E, E'; f\pi)\}_{i=1}^r$ が $H^*(F, F \cap E'; b_0)$ の $H^*(*, b_0)$ -module としての basis になるならば、任意の $g: X \rightarrow B$ ($g(x_0) = b_0$) と X の任意の頂点 v とに対して、 $H^n(\pi^{-1}(v), \pi^{-1}(v) \cap E'; \mu(g\pi, f\pi))$ の任意の元 u は $u_1 a_1 + \cdots + u_r a_r$ ($u_i \in H^{n-n_i}(*; g(v))$, $i = 1, \dots, r$) と一意的に書ける。

従って Leray-Hirsch 及び Dold-Thom 型の定理は次の様

に拡張される。

定理2 補題の仮定のもとで $P: \bigoplus_{i=1}^r H^{n-n_i}(X; g) \rightarrow H^n(E, E'; \mathcal{M}(g, f, \pi))$ を $P(x_1, \dots, x_r) = x_1 a_1 + \dots + x_r a_r$ で定めれば、 P は同型 (abel 群として) になる。

定理3 $\pi: E \rightarrow X$ は n -disc bundle, $\pi|_{E'}: E' \rightarrow X$ は対応する sphere bundle とする。更に $f: X \rightarrow B$ ($f(x_0) = b_0$) に対して $H^*(\cdot; b_0)$ -module $H^*(D^n, S^{n-1}; b_0)$ の base となる $U \in H^n(E, E'; \mathcal{M})$ が存在し U とする。この時任意の $g: X \rightarrow B$ に対して $\Phi(U, g): H^p(X; g) \rightarrow H^{p+n}(E, E'; \mathcal{M}(g, f, \pi))$ を $\Phi(U, g)(x) = \pi^*(x) \cdot U$ で定めると $\Phi(U, g)$ は同型になる。

対応する Gysin sequence は次の様になる。 $s: X \rightarrow E$ を zero section, $j: E \hookrightarrow (E, E')$, $i: E' \hookrightarrow E$ とし、 $\Phi(U, g) = s^* j^* \Phi(U, g)$, $s^* j^* U = X$ とおくと

$$\rightarrow H^{p+n-1}(E'; \mathcal{M}(g, f, \pi)) \rightarrow H^p(X; g) \xrightarrow{\Phi(U, g)} H^{p+n}(X; \mathcal{M}(g, f)) \rightarrow H^{p+n}(E'; \mathcal{M}(g, f, \pi))$$

 は exact で $\Phi(U, g)(x) = x \cdot x$ とかける。

B を適当にとれば各 (ring) spectrum に対応して $\mathcal{S}(B)$ 上の (multiplicative) cohomology theory が構成できる [1] が、有効な例は多くはみつかっていない。

§4 spectrum と $H^*(\cdot; \mathbb{Q})$

F を fiber に持つ fiber space $p: E \rightarrow B$ とその切断 $\Delta: B \rightarrow E$ とを $\varepsilon = (E, p, B, F, \Delta)$ とおき、 $\lambda: \varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ は $\lambda: E \rightarrow E'$ で $p' = p \circ \lambda$ 、 $\lambda \Delta = \Delta'$ をみたすものを表わす。これに対し $\Omega_B E = \{ \gamma: I \rightarrow E \mid \exists b \in B, \text{ s.t. } \gamma(I) \subset p^{-1}(b), \gamma(0) = \gamma(1) = \Delta(b) \}$ 、 $\Omega_B(p)(\gamma) = \gamma(1)$ 、 $\Omega_B(\Delta)(b)(t) = \Delta(b)$ とおくと $\Omega_B \varepsilon = (\Omega_B E, \Omega_B(p), B, \Omega_B F, \Omega_B(\Delta))$ が構成される。 $\mathbb{E} = \{ \varepsilon_k, \lambda_k: \varepsilon_k \rightarrow \Omega_B \varepsilon_{k+1} \}$ を B 上の spectrum という事にする。 $\mathcal{L}(X, A, f; \varepsilon_k) = \{ g: X \rightarrow E_k \mid pg = f, g|A = \Delta \circ f|A \}$ とおくと $\mathcal{L}(X, A, f; \Omega_B \varepsilon_k) \simeq \Omega \mathcal{L}(X, A, f; \varepsilon_k)$ が成り立ち、普通の意味で spectrum が構成される。 $h^n(X, A; f) = \pi_n(\{ \mathcal{L}(X, A, f; \varepsilon_k) \})$ とおくと $p(B)$ 上の cohomology theory になる [17]。

そこで群 π と abel 群 G と準同型 $\varphi: \pi \rightarrow \text{aut } G$ とを与える。すると $\tilde{\varphi}: \pi \rightarrow \text{Homeo}(K(G, n), *)$ が $\varphi = \tilde{\varphi}_*: \pi \rightarrow \text{aut}(\pi_n(K(G, n)))$ となる様に定まる。 $K(\pi, 1)$ の普遍被覆を $\widetilde{K(\pi, 1)}$ で表わし、 $K_\varphi(G, n) = \widetilde{K(\pi, 1)} \times_{\tilde{\varphi}} K(G, n)$ とおく。 $p_k: K_\varphi(G, k) \rightarrow K(\pi, 1)$ は切断 Δ_k を持つ fiber space になる。 $\mathcal{K}(G, k) = (K_\varphi(G, k), p_k, K(\pi, 1), K(G, k), \Delta_k)$ と π -equivariant homotopy 同値 $\lambda_k: K(G, k) \rightarrow \Omega K(G, k+1)$ から導かれる fiber homotopy 同値 $\lambda_k: \mathcal{K}(G, k) \rightarrow \Omega_{K(\pi, 1)} \mathcal{K}(G, k+1)$ とより $K(\pi, 1)$ 上の spectrum $\{ \mathcal{K}(G, k), \lambda_k \}$ が定まる。この spectrum に対して定まる $\mathcal{P}(K(\pi, 1))$ 上の

Cohomology theory は

$$\begin{aligned} H^n(X, A; f) &= \pi_{-n}(\{\chi(\mathbb{Q}_n, \lambda_n)\}) \\ &= \pi_0(\mathcal{L}(X, A, f; \chi(\mathbb{Q}_n))). \end{aligned}$$

特に $H^n(x; b_0) = 0$ ($n \neq 0$), $H^0(x; b_0) = \mathbb{G}$ だから、 $f: X \rightarrow K(\pi, 1)$ より定まる X 上の局所系を $\mathcal{F}\mathbb{Q}$ で表わし、 f の $K_\varphi(\mathbb{Q}_n)$ への lifting の homotopy class 全体の集合を $[X, K_\varphi(\mathbb{Q}_n)]_f$ で表わせば

$$H^n(X; \mathcal{F}\mathbb{Q}) = [X, K_\varphi(\mathbb{Q}_n)]_f$$

が成立する。これは既に知られている結果であるが、その一つの証明である。

文 献

- [1] J. C. Becker, Extending of cohomology theories, Illinois J. Math. 14(1970), 551-584.
- [2] E. Dyer, Cohomology Theories.