

Landau-Lifschitz equation について

京大教養

伊達 悦朗

Date Etsuro

京大数理研

神保 道夫

Jimbo Michio

〃

柏原 正樹

Kashiwara Masaki

〃

三輪 哲二

Miwa Tetsuji

表題の方程式は、一次元空間上のスピン波を記述する次の偏微分方程式である。

$$\vec{S}_t = \vec{S} \times \vec{S}_{xx} + \vec{S} \times J \vec{S}, \quad \vec{S} = (S_1, S_2, S_3), \quad \vec{S}^2 = 1$$

$J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$: 定数行列.

Sklyanin¹⁾は Lax pair を構成して、この積分可能性を示し、
また広田²⁾は双線型化

$$D_1(f^*f + g^*g) = 0, \quad (D_2 - D_1^2)(f^*f - g^*g) = 0$$

$$(D_2 - D_1^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)) \frac{f^*g}{g^*f} + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \frac{g^*f}{f^*g} = 0$$

を得た。但し $a^2 = J_3 - J_1$, $b^2 = J_3 - J_2$, $x_1 = x$, $x_2 = -it$, かつ

$$S_1 = \frac{f^*g + g^*f}{f^*f + g^*g}, \quad S_2 = -i \frac{f^*g - g^*f}{f^*f + g^*g}, \quad S_3 = \frac{f^*f - g^*g}{f^*f + g^*g}.$$

Lax pair のスペクトルパラメータとして、自然に elliptic curve

$$E : \omega^2 = (k^2 - a^2)(k^2 - b^2)$$

が現われる。文献³⁾で展開された、ソリトン方程式の変換群の理論では、スペクトルパラメタが $\mathbb{P}^1$ を動く場合を取扱、ている。そこで $\mathbb{P}^1$ を elliptic curve に置替えて理論を拡張しその立場から Landau-Lifschitz 方程式を見直したい。

($\mathbb{P}^1$ 上の) KP 方程式は、次のように構成されていた。即ち、

$$(1) \text{自由フェルミ場 } \psi(k), \psi^*(k) \quad (k \in \mathbb{P}^1)$$

$$(2) \text{真空期待値 } \langle \psi(p)\psi^*(q) \rangle = \frac{q}{p-q}$$

$$(3) \text{時間発展 } e^H \psi(k) e^{-H} = e^{kx_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 + \dots} \psi(k)$$

$$e^H \psi^*(k) e^{-H} = e^{-kx_1 - k^2 x_2 - k^3 x_3 - \dots} \psi^*(k)$$

の3つをもちえて、 τ 函数

$$\tau(x) = \langle e^{H(x)} g \rangle, \quad g : \text{Clifford 群の元}^{(\text{中性})}$$

を作る。このとき、 $\tau(x)$ は g の如何にかかわらず、双線型の KP ヒエラルヒー

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) \tau \cdot \tau = 0, (D_1^3 D_2 + 2D_2 D_3 - 3D_1 D_4) \tau \cdot \tau = 0, \dots$$

を満たす。KP の代りに、involution $k \mapsto -k$ に関する対称性を加えて、中性フェルミ場 $\phi(k)$ による BKP ヒエラルヒーが定義される。

elliptic curve E 上の involution (fixed point free)

$P = (k, \omega) \mapsto P^\# = (-k, -\omega)$ を用いて、後者の拡張を考える。 E 上の無限遠点 $\infty_\pm$ を

$$\infty_\pm : k = \omega = \infty, \quad \omega/k^2 = \pm 1$$

と定める。Cauchy核 $K(P, P')$ を

$$K(P, P') = \frac{1}{2} \frac{(\omega + k^2 - \omega' - k'^2)}{k + k'} = -K(P', P)$$

を導入する。 $K(P, P')$ は, $P = P'^{\#}$, ∞_+ に一位の極, $P = P'$, ∞_- に一位の零をもつ。また

$$h(P) = \frac{1}{2c} (\omega + k^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)) = h(P^{\#})^{-1}, \quad c = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

とおく。 h の極は ∞_+ (2 位), 零は ∞_- (2 位) のみにある。

上になら, τ

(1) 中性フェルミ場 $\phi(P)$ ($P \in E$)

(2) 真空期待値 $\langle \phi(P)\phi(P') \rangle = K(P, P')$

(3) 時間発展 $e^{H_n(x)} \phi(P) e^{-H_n(x)} = e^{\xi_n(x, P)} \phi(P)$

$$e^{\xi_n(x, P)} = h(P)^n e^{kx_1 + \omega x_2 + \dots} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

としよう。 $\mathbb{P}^1$ 上の場合と違, τ , discrete な時間発展 $h(P)^n$ も同時に導入されている。 $e^{kx_1 + \omega x_2 + \dots}$ の部分は, Cauchy 核の $P = \infty_+$ の展開

$$\begin{aligned} \frac{K(P, P')}{\sqrt{ch(P)}} &= \sqrt{\frac{K(P, P')}{K(P, P^{\#})}} = \exp \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - k'/k}{1 + k'/k} \frac{1 - h'/h}{1 + h'/h} \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{n \text{ odd}} \frac{k'^n}{n k^n} - \sum_{n \text{ even}} \frac{1}{n (ch)^{n/2}} c^{n/2} (h'^{n/2} - h'^{-n/2}) \right) \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned} \xi_n(x, P) &= n \log h(P) + \sum_{n \text{ odd}} x_n k^n + \sum_{n \text{ even}} x_n c^{n/2} (h^{n/2} - h^{-n/2}) \\ &= -\xi_n(x, P^{\#}) \end{aligned}$$

と決めた。こうしておけば

$$\epsilon(P) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2ch}, \frac{1}{3k^3}, \frac{1}{4ch^2}, \dots \right) \quad (P \sim \infty_+)$$

$$\phi_0 = \int_{\infty_+ \cup \infty_-} dP \phi(P), \quad \langle \phi_0 \phi(P) \rangle \equiv 1$$

を用いて, Cauchy 核を

$$\frac{K(P, P')}{\sqrt{ch(P)}} = e^{-\xi_0(\epsilon(P), P')} = \langle \phi_0 e^{H_0(-\epsilon(P))} \phi(P') \rangle$$

と書くことができる。一般に, 任意のオペレータ a につい

て次が成立つ:

$$(1) \quad \langle e^{H_n(x)} \phi(P) a \rangle = \begin{cases} \sqrt{ch(P)} e^{\xi_n(x, P)} \langle \phi_0 e^{H_n(-\epsilon(P))} a \rangle & P \rightarrow \infty_+ \\ \sqrt{ch(P)} e^{\xi_n(x, P)} \langle \phi_0 e^{H_{n+1}(x+\epsilon(P))} a \rangle & P \rightarrow \infty_- \end{cases}$$

$$\langle \phi_0 e^{H_n(x)} \phi(P) a \rangle = \begin{cases} e^{\xi_n(x, P)} \langle e^{H_{n+1}(-\epsilon(P))} a \rangle & P \rightarrow \infty_+ \\ e^{\xi_n(x, P)} \langle e^{H_n(x+\epsilon(P))} a \rangle & P \rightarrow \infty_- \end{cases}$$

さて, τ 函数をここでも

$$\tau_n(x) = \langle e^{H_n(x)} \mathcal{G} \rangle, \quad \mathcal{G}: \text{Clifford 群の元}$$

で定めると, $\tau_n(x)$ は一連の双線型方程式系

$$(2) \quad (2D_3 + D_1^3 + 3D_1(D_2 - (a^2 + b^2))) \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0$$

$$(6(D_4 + (a^2 + b^2)D_2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2) + 3(D_2 - (a^2 + b^2))^2 + 4D_1D_3 - D_1^4) \tau_{n+1} \tau_n = 0$$

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2 + \frac{3}{2}(a^2 - b^2)^2) \tau_n \cdot \tau_n - \frac{3}{2}(a^2 - b^2)^2 \tau_{n+1} \tau_{n-1} = 0$$

...

の解となることがわかる。

例. $\mathcal{G} = \exp(\alpha_1 \phi(P_1) \phi(Q_1) + \alpha_2 \phi(P_2) \phi(Q_2))$ とおくと, 2 ソリ

トン解

$$\tau_n(x) = 1 + e^{\eta_1(n, x)} + e^{\eta_2(n, x)} + c_{12} e^{\eta_1(n, x) + \eta_2(n, x)}$$

[4]

$$e^{\eta_i(n,x)} = \alpha_i K(P_i, Q_i) e^{\xi_n(x, P_i) + \xi_n(x, Q_i)} \quad (i=1, 2)$$

$$c_{12} = \frac{K(P_1, P_2) K(P_1, Q_2) K(Q_1, P_2) K(Q_1, Q_2)}{c^2 h(P_1) h(P_2) h(Q_1) h(Q_2)}$$

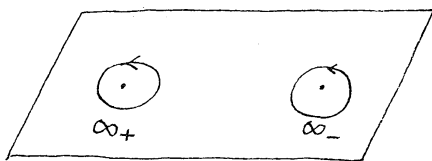
を得る。

双線型方程式を導くには、次の identity を用いる。

$$(3) \quad 0 = \int_{\infty_+ \cup \infty_-} dP \langle \phi_0 e^{H_n(x)} \phi(P) g \rangle \langle \phi_0 e^{H_{n'}(x')} \phi(P^\#) g \rangle$$

(for any n, x, n', x')

ここに積分路は $\infty_\pm$ のまわりの小円, $dP = \frac{dk}{2\pi i \omega}$ は E 上の第一種微分である。



(1), (3) から

$$0 = \int_{\infty_+} \frac{dk}{2\pi i \omega} \left[e^{\xi_{n-n'}(x-x', P)} \tau_{n-1}(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2ch}, \dots) \tau_{n'}(x'_1 + \frac{1}{k}, x'_2 + \frac{1}{2ch}, \dots) \right. \\ \left. + e^{-\xi_{n-n'}(x-x', P)} \tau_n(x_1 + \frac{1}{k}, x_2 + \frac{1}{2ch}, \dots) \tau_{n-1}(x'_1 - \frac{1}{k}, x'_2 - \frac{1}{2ch}, \dots) \right]$$

が従うので, integrand を $P = \infty_+$ で展開して積分を実行すれば, (2) が得られる。

(2) は elliptic DKP とでも呼ばべき sub-sub-holonomic な系であるが, 実は

$$(4) \quad \bar{\tau}_n(\bar{x}) = e^{-Q_n(x)} \tau_n(x) \quad \bar{x}_n = \sum c_{nk} x_k \\ Q_n(x) : x \text{ の 2 次式}$$

なる変換とすると, elliptic moduli a, b を含まない方程式
[5]

に変換されてしまうことがわかる。つまり elliptic curve と考えた甲斐がなくである意味では面白くないわけであるが、その reduction を考えると、一般には上の操作が reduction とは compatible にならず、moduli が残ってくる。

Landau-Lifschitz 方程式は、上の 2 成分化 ($\phi(P)$ の copy $\phi^{(1)}(P), \phi^{(2)}(P)$ を用いる) において、

$$\begin{aligned} f &= \langle e^{H_{n_1, n_2}} g \rangle, \quad f^* = \langle e^{H_{n_1+1, n_2}} g \rangle \\ g &= \sqrt{c} \langle \phi_0^{(1)} \phi_0^{(2)} e^{H_{n_1, n_2}} g \rangle, \quad g^* = \sqrt{c} \langle \phi_0^{(1)} \phi_0^{(2)} e^{H_{n_1+1, n_2}} g \rangle \\ (H_{n_1, n_2} &= H_{n_1}^{(1)}(x^{(1)}) + H_{n_2}^{(2)}(x^{(2)})) \end{aligned}$$

とおき、更に g として上記 f, f^*, g, g^* が

$$x = x^{(1)} - x^{(2)}, \quad n = n_1 - n_2$$

のみに依存するという条件とあいた reduction である。

((4) の形の変換では moduli を消すことはできない)。例えば

$$g = \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi^{(1)}(P_i) \phi^{(2)}(P_i^{\#})\right)$$

のようにとれば、その条件は満足される。(N ソリトン)

N ソリトン解, ヒエラルヒー, 線型化, 変換群, Quasi-periodic solution 等の詳細は論文⁴⁾に譲る。

文献

- 1) E.K. Sklyanin, On complete integrability of the Landau-Lifschitz equation, LOMI preprint E-3-1979, Leningrad.
- 2) R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 323.
- 3) M. Kashiwara and T. Miwa, Proc. Japan Acad. 57 A (1981) 342.
 E. Date, M. Kashiwara and T. Miwa, *ibid.* 57 A (1981) 387.
 E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3806, 3813.
 ——, to appear in *Physica D* & *Publ. RIMS*. (1982)
- 4) E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Landau-Lifschitz equation : solitons, quasi-periodic solutions and infinite dimensional Lie algebras, *RIMS preprint* 395 (1982).