

The Crossing Number Problem and Rotation System

関孝大理 浅野孝平 (Kouhei Asano)

一般にはグラフを平面上に self intersection なしに描くことはできない。しかし、辺と頂点、あるいは頂点と頂点が重なりあわないように描くことはできる。グラフ G のこのような図のうち辺と辺の交わりが最小であるように描いた時の交差 (crossing) の数を、 G の 交差数 (crossing number) と呼び $cr(G)$ であらわすことにする。したがって、 G の交差数が 0 であることと、 G が平面的グラフであることは同等である。交差数は完全グラフ K_n に対しては $n \leq 10$, 完全二部グラフ $K_{m,n}$ に対しては $m \leq 6$ の場合が既に求められている。

単純グラフ G が向きづけ可能な曲面に埋め込まれているとする。 G の頂点 v に隣接している頂点を、曲面の向きにしたがって書きあげると v に隣接する頂点の巡回置換ができる。 G の各頂点に対してこのような巡回置換を考えたとき、この巡回置換の組を rotation system (循環埋め込み図式) と呼ぶ。

この概念は, Dyck (1888), Heffter (1890) により導入されてグラフの埋め込み問題に種々応用された。ここでは、この概念がグラフの交差数の問題に対しても有効であることを述べる。ただし、証明は概略のみである。

§1. Weighted Crossing Number Problem (重みつき交差数問題)

単純グラフ G のユークリッド平面 R^2 への、各頂点を異なった点へ写し、各辺を弧に写す写像が次の条件を満足するとき、 G の描画 (drawing) ということにする。

- (i) 辺の像は頂点の像をふくまない。
- (ii) 辺 uv (頂点 u と v を結ぶ辺) の像は、 u と v の像を結ぶ弧である。

- (iii) 3本の辺の像は共有点を持たない。

G の描画が good であるとは、次の条件を満足するときをいう。

- (iv) 隣接する2本の辺の像は共有点を持たない。
- (v) 2本の辺の像は高々1個の共有点しか持たない。

描画における2本の弧の交わりを交差 (crossing) という。明らかに任意のグラフは good な描画を持ち、最小交差数の描画は good である。

w を G の辺集合 $E(G)$ から正の実数全体への写像とすると、

G を 重みつきグラフ (weighted graph) という。また w を 重み関数 と呼ぶ。 ϕ を G の描画とする。辺 a と辺 b の、 ϕ による交差 p に対して、

$$w(p) = w(a) \cdot w(b)$$

と定義し、 p の 重み ということにする。 $E(G)$ の部分集合 A , B に対して、 $cr_{\phi}(A, B)$ を、 A に属する辺と B に属する辺の ϕ によるすべての交差の重みの和とおく。ここで A と B は互いに素でなくてもよい。 $cr_{\phi}(E(G), E(G))$ を ϕ の交差数といい、 $cr_{\phi}(G, w)$ と書く。 G のすべての描画に対する交差数の最小値を $cr(G, w)$ と書き (G, w) の 交差数 という。

重み関数が、各 $e \in E(G)$ に対して $w(e) = 1$ であるとき、それぞれ、単に $cr_{\phi}(G)$, $cr(G)$ であらゆる。

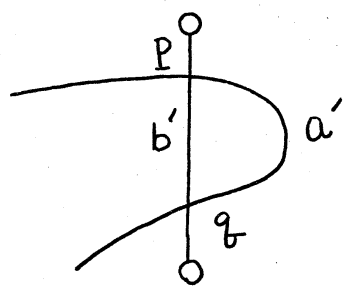
命題 1.1 ϕ を G の good でない描画とする。このとき適当な描画 ϕ' が存在して、 $cr_{\phi'}(G, w) < cr_{\phi}(G, w)$ 。

証明の概略。 ϕ は good ではないから、隣接する 2 本の辺の像が共有点を持っているか、または適当な 2 本の辺の像が 2 個以上の共有点を持っている。このとき、次のような交差のうち少なくとも 1 方が存在することが示せる。

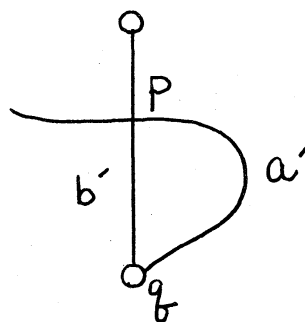
(i) 辺 a , b の像の交差 p , q に対して、 a の像の上の

p から q までの部分 a' は b とは p, q 以外で交わらず,
 b の像の上の p から q までの部分 b' は a とは p, q 以外で
 交わらない. (図 1 (i)).

(ii) 隣接する辺 a, b の像の交差を p とし, a, b が接続
 している頂点の像を q とする. このとき, (i) と同様な部分弧
 a', b' が存在する. (図 1 (ii))



(i)



(ii)

図 1

(i) の場合は次の図で示された二つの変形のうちどちらか
 適当な 1 方を行なった結果の描画を ϕ' とすれば,

$$cr_{\phi'}(G, w) < cr_{\phi}(G, w)$$

であることが容易に証明できる.

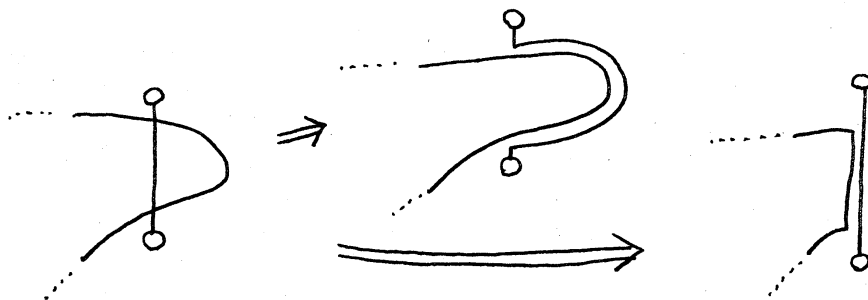


図 2

(ii)の場合についても同様である。 証明終。

この命題により次の定理が導びかれる。

定理 1.2 G を単純グラフ, K を, G の隣接していない頂点の対を辺で必ず結ぶことによって得られた完全グラフとする。このとき, K の good な描画の適当なもの ϕ をとれば,

$$cr_{\phi|G}(G) = cr(G)$$

である。

証明の概略. G の描画のうち適当なものを ψ とすれば,
 $cr_{\psi}(G) = cr(G)$ である。(必然的に ψ は good.) このとき ψ は K の描画 ψ' に拡張できる。

$cr_{\psi'}(K) = n$ とおき, $1/n$ より小さい実数 ε をとる。いま K の重み関数 w を次のように定義する。

- (i) e が $E(G)$ の元であるときは, $w(e) = 1$,
- (ii) e が $E(K) - E(G)$ の元であるときは, $w(e) = \varepsilon$ 。

このとき, 明らかに

$$cr_{\psi}(G) \leq cr_{\psi'}(K, w) < cr_{\psi}(G) + 1$$

である。

ψ' が good でないときだけを考えればよい。 ψ' が good ではないので, 命題 1.1 より K の good な描画 ϕ が存在して,

$$cr_{\phi}(K, w) < cr_{\psi}(K, w)$$

である。また $cr_{\phi}(K, w) \geq cr_{\phi|G}(G)$ なので、

$$cr_4(G) \leq cr_{\phi|G}(G) < cr_4(G) + 1$$

である。故に、

$$cr_{\phi|G}(G) = cr_4(G) = cr(G). \text{ 証明終.}$$

上の定理の意味を明らかにするために、次の描画を考える。
これは、 $K_{2,4}$ の描画で、good になるように x, y を結ばない。

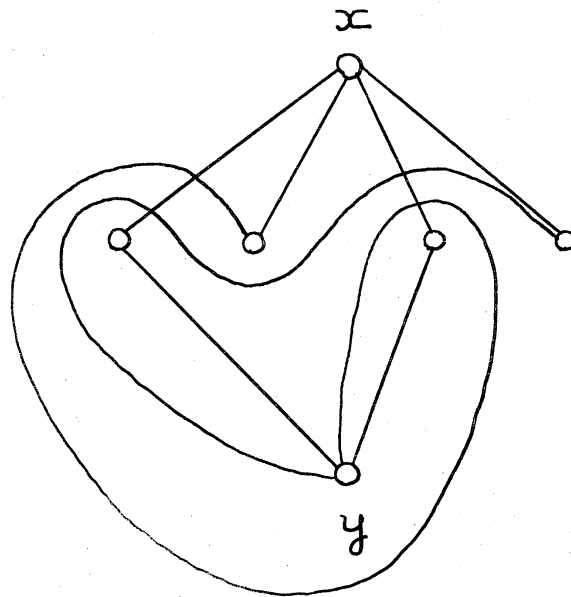


図 3.

§2. Rotation System.

§1の議論により、グラフの交差数を求めるためには、完全グラフの good な描画に拡張できる描画のみを調べればよいことがわかった。ここでは、グラフの good な描画に対する

rotation system を定義し、完全グラフに対しては描画の同値類がこの system により定まることを示す。

平面に対して方向を定めておく。 ϕ を G の good な描画とし、 $N(v)$ を G の頂点 v に隣接する頂点の集合とする。各 v に対して $N(v)$ の巡回置換 ρ_v を次のように定める。

(*) $u \in N(v)$ に対して、 v と u を含む辺の、正の方向の隣りの辺の u 以外の頂点を $\rho_v(u)$ と定義する。

例えば、下の図のような描画に対しては、

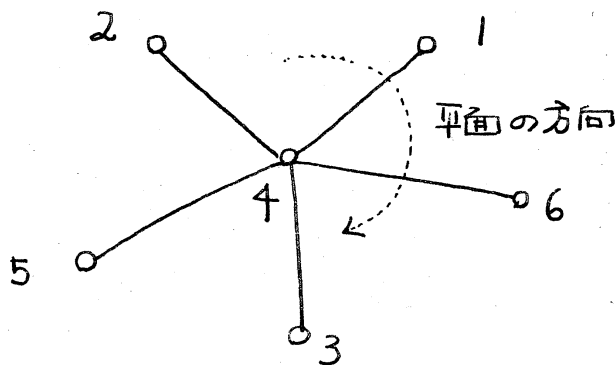


図 4

$\rho_4 = (1, 6, 3, 5, 2)$ である。ここで ϕ は good であるので、頂点 v に接続する辺どおしは、像において v 以外では交わっていないことに注意してほしい。このようにしてつくった置換の列を ϕ の rotation system という。

定義 ϕ, ϕ' を単純グラフ G の good な描画とする。次の条件 (**) を満足するとき、 ϕ, ϕ' は同等であるという。

(**) ϕ において辺 uv と辺 $u'v'$ が交差を持つための必

要十分条件は、 ϕ' において uv と $u'v'$ が交差を持つことである。

次の図は、同等な2つの描画である。

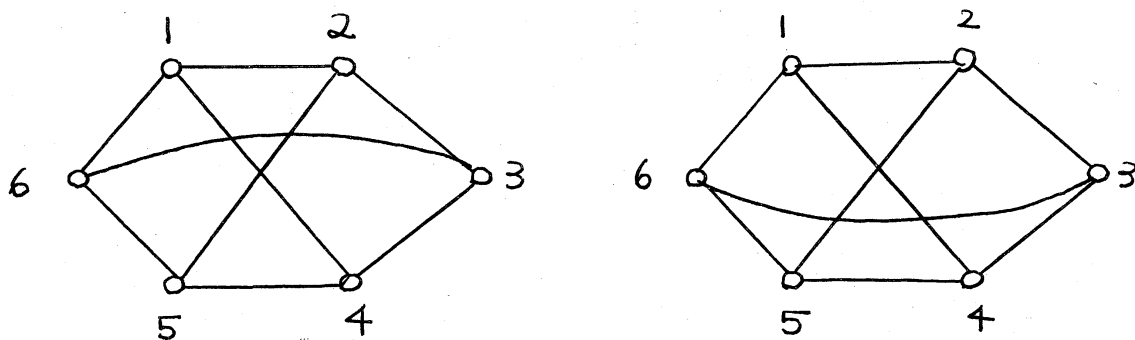


図 5

定理 2.1 完全グラフ K の good な描画が同等であるための必要十分条件は、 ϕ と ϕ' の rotation system が一致することである。

証明は略する。次の例は、完全グラフでないグラフに対しては、この定理に相当するものは成立しないことを示している。

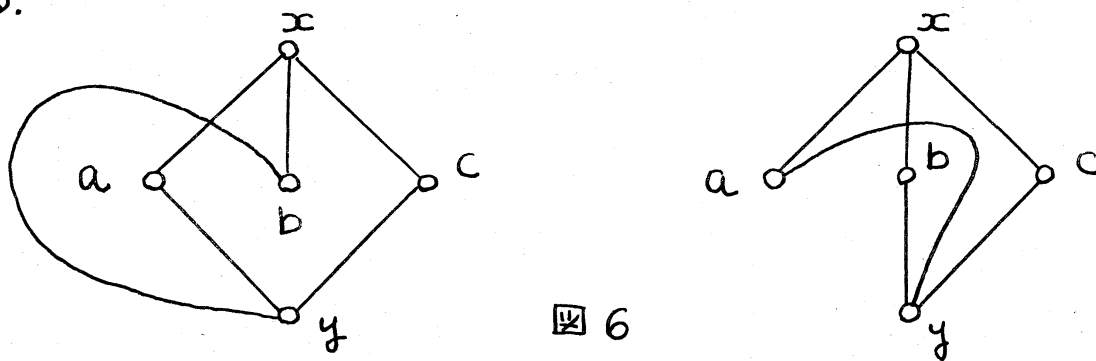


図 6

共に rotation system は,

$$x: cba, \quad y: bac, \quad a: xy, \quad b: xy, \\ c: xy.$$

注意 1. 定理 1.2 より, 頂点数が n 個のグラフの交差数を計算するためには, K_n のすべての good な描画を考えればよい, またさらに, 定理 2.1 を用いると, その個数は $\{(n-2)!\}^{n-1}$ 個以下である.

注意 2. すべての巡回置換の組みあわせが, 完全グラフの good な描画の rotation system になるわけではない. rotation system になるための必要十分条件は容易に想像できるが, 筆者にはまだ整理できていない.

参考文献

- [1] R. K. Guy, Crossing number of graphs, Recent Trends in Graph Theory, Lecture Notes in Math., 303(1972), 111 - 124.
- [2] D. J. Kleitman, The crossing number of $K_{5,n}$, J. Combinatorial Theory 9(1970) 315 - 323.
- [3] A. T. White and L. W. Beineke, Topological Graph Theory, Selected Topics in Graph Theory, Academic, London(1978) 15 - 49.