

圏代数としての量子場

西郷甲矢人（長浜バイオ大学）

2022 年 3 月 21 日

概要

本稿では、圏代数と圏上の状態の概念に基づく量子場への新しいアプローチを提起する。我々は量子場とその状態を、部分的な対合構造をもつ圏上の圏代数とその上の状態として定義する。圏代数と圏上の状態の概念を用いることにより、圏論的構造としての相対論的構造と非可換確率構造としての量子論的構造を直接に統合できる。本稿の内容は、Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, *13* 9, 1727. <https://doi.org/10.3390/sym13091727> および Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, *13* 7, 1172. <https://doi.org/10.3390/sym13071172> に基づく。

1 序

量子場は物理学における根本概念であり、相対論と量子論の統合を目指すなかで登場した（もちろん非相対論的な文脈への展開も重要であるが）。しかし、4次元ミンコフスキー時空上のポアンカレ群に共変的な相互作用する量子場の存在は証明されていない。量子場への公理的アプローチにおいては、概念的な明晰化を通じ、ハークの定理などの不可能性定理が示されてきた。

雑に言えば、相互作用する量子場を捉えるには、われわれが「当然だ」と思っているような枠組みを超える必要がある。この講演では新しいアプローチを提起したい。核心となるアイデアは、量子場を rig (semiring すなわち半環とも呼ばれる、足し算と掛け算が定義されている代数系。われわれは「数系」と呼ぶ) 上の「圏代数」として捉えることである。圏代数は圏構造と整合的な非可換代数であり、これとその上の線型汎関数としての「圏上の状態」を用いることで、「相対論的」構造と「量子論的」構造とが直接的につながる。

数系として複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数を考えたものが、量子場の数理においては特に重要である。変わったところでは、トロピカル数系 ($\min$ と $+$ を「足し算」「掛け算」とする数系) は変分法と関係している。体や環のみならず数系上の圏代数を考えることによって、量子古典対応への理解が深まることも期待される。

相対論の本質は事象たちの間の関係性の総体である。実際、未来と過去を識別可能なローレンツ多様体が共形同型であることは、その事象間に「未来

向きの因果的な曲線が存在する」ことをもって定義される半順序集合が同型であることと同値であることが知られている (Malament, D. B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime. *Journal of Mathematical Physics* **1977**, 18(7), 1399–1404)。したがって、順序構造こそ相対論の本質であるという見方も自然に生まれてくる。実際、時空への順序構造的アプローチも試みられている (Bombelli, L., Lee, J., Meyer, D. and Sorkin, R. D. Space-time as a causal set. *Physical review letters* **1987**, 59(5):521)。

しかし一方で、(相互作用する現実の) 量子場の「オフシェルな本質」(オンシェル条件・粒子描像のみに還元できない本質) をとらえるには、狭い意味での因果的関係のみならず、空間的に離れた事象間の関係をも含めて考える必要がある。では既存の枠組みをいかに一般化すべきであろうか？

われわれのアプローチは、順序構造と群論的構造の双方の一般化である「圏」を一般化された意味での「相対論的構造」として考えることである。圏とは、「対象」とよばれるものと「射」とよばれるものからなる数学的なシステムであって、以下の条件をみたすものである：

- 射には「始まり」と「終わり」にあたる対象が定まり（それぞれ「域」とよび「余域」と呼ばれる）
- 一方の始まりと他方の終わりが一致する射のペアは「合成」ができ
- 合成は「結合律」をみたし
- 各対象に対しては自分から自分への「何もしない」射が対応する。

われわれは相対論的構造をある種の圏構造としてとらえる。より具体的に言えば、われわれは後述する「部分的な対合構造をもつ因果的圏」という概念を導入し、これが（一般化された）相対論的構造であると見なすのである。これについて直感的に述べてみよう。

「時空」を「点の集まり」ではなく、(因果的とは限らない)「プロセスのなすシステム」としての圏と考えよう。相対論的構造は、この圏全体とその「骨組み」(部分圏)としての「因果的プロセスからなる部分圏」の組として捉えられる。さらに、「対合」すなわち「矢印の向きのひっくり返し」(「逆射とは限らない」)の構造が(少なくとも部分的に)定義されている状況を考える。これがのちに「エルミート共役」の構造の種となる。これが「部分的な対合構造をもつ因果的圏」の概念であり、「一般化された相対論的構造」の定式化である。

この「一般化された相対論的構造」と量子論的構造としての「非可換確率構造」すなわち「物理量代数と期待値汎関数(各物理量に期待値を対応させる線型写像)としての状態の組」を結びつけるために、圏の構造を反映する(複素数体などの)数系上の非可換代数を考えるのが自然である。圏代数こ

そ、まさにこのような非可換代数なのである。圏が群の一般化であるように、圏代数は群代数（群環）の一般化である（実は多項式代数や行列代数の一般化ともなっている）。以上の議論は、なぜわれわれが量子場のモデル化に圏代数を用いるのかを大まかに説明する。

簡単のため、これまでの研究ではある種の「有限性条件」をみたす圏代数に焦点をあててきている。もちろん、有限性条件を満たさないより大きな拡張を考えることは興味深く重要な問題であるが（とくに測度や位相などとの関係）、有限性条件のもとでさえ、圏代数は圏構造を反映した共変性や局所性のような豊かな構造を持っていることが明らかになる。これらの豊かな構造に着目することにより、先行する有力な量子場へのアプローチである代数的量子場理論（AQFT）や位相的量子場理論（TQFT）などの概念的な関係性も見えてくる。

量子場を数系上の圏代数であると同定したとして、量子場の状態はどのように考えるとよいだろうか。一般に、複素数体上の $*$ -代数の上の状態の概念は、正規化された正值線型汎関数として定義される。われわれはこれを一般の数系上の対合をもつ代数に拡張することができる。圏が対合構造を持てば、その圏代数も対合をもつ。この圏代数上の状態を量子場の状態と考えよう。われわれは、圏代数上の状態を「圏上の状態」と呼ぶ。これは言葉の濫用ではあるが、次に述べる事実（後述する定理 20）からある程度正当化できる（定義などは後述）。

もし（対合をもつ）圏の対象が有限個なら、圏上の状態は圏上のある種の関数（射に数系の元を対応させる半正定値関数）と一対一対応する。

これは、亜群についての先行研究（Ciaglia, F. M., Ibort, A. and Marmo, G. *Schwinger's Picture of Quantum Mechanics III: The statistical Interpretation*. *Int. J. Geom. Meth. Modern Phys.* **2019**, 16(11): 1950165）の一般化となっている。

より一般に、そのサポートが有限個の対象をもつ圏に含まれるような状態に関しては、状態を定めることと射の重みづけをすることが同値ということになる。そのような意味での有限性をもつ状態を考えることにより、有限自由度的な「量子力学系」を量子場の一様相として捉えなおすことが可能である。この見方は、量子論の基礎に新しい光を投げかけるであろう。

一方で、圏代数と圏上の状態によるアプローチは、DHR(Doplicher-Haag-Roberts)-DR(Doplicher-Roberts) セクター理論、小嶋(I. Ojima)の「ミクロ・マクロ双対性」「四項図式」を活用する際にも役立つと考えられる。小嶋は、量子古典対応の深化としての「ミクロ・マクロ双対性」を、物理理論（あるいは理論一般）がもつべき一般構造としての「四項図式」の枠組みで定式化している。その四項とは、 $\text{Dyn} \cdot \text{Alg} \cdot \text{States} \cdot \text{Spec}$ である。それぞれ（大まかにいって）、圏・圏代数・圏上の状態・圏の普遍表現の構造に対応してい

る。これら四項の関係を通じて、不可視な Dyn が（ある程度）可視化され、系の振る舞いがモデル化できる。われわれは、これを（圏代数構造に根差した）状態遷移としての「圏上の量子ウォーク」を用いて実現することが可能であろうと考えている。

本稿の内容は主に

- Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, *13*, 1727. <https://doi.org/10.3390/sym13091727>
- Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, *13*, 7, 1172. <https://doi.org/10.3390/sym13071172>

の二つの論文に基づく。

2 圏としての時空

序で述べた通り、圏は順序構造と群論的な構造をともに包括する概念である¹。簡単に言えば、圏は射からなるシステムであって射の「合成」の概念が適切に定義されたものである（合成については結合律および単位律という条件が満たされていることが仮定される）。射の「始まり」や「終わり」といった「結節点」の役割を果たすものが「対象」であり、「単位律」により各対象には「合成に関して何もしない射」である恒等射が（一意に）対応する。このことにより、対象は特別な射である恒等射と同一視できる。これらを踏まえ、以下では、圏 $\mathcal{C}$ はその射の集まりと同一視すし、その部分である恒等射（対象）の集まりを $|\mathcal{C}|$ と書くことにする。一般に、射の集まりは集合論という「集合」よりもはるかに大きなものとなり得るが（たとえば集合を対象とし写像を射とする圏の場合、 $\mathcal{C}$ や $|\mathcal{C}|$ は「集合」にはならない）、本稿においては $\mathcal{C}$ や $|\mathcal{C}|$ が集合であるケース、いわゆる「小さな圏」のみを扱う（小さな圏のことを単に圏と呼ぶ）。とはいえ、 $\mathcal{C}$ や $|\mathcal{C}|$ は有限や可算無限とは限らず、連続無限でも構わない（実数全体の集合よりもっと大きな濃度をもつ集合でも構わない！）ことに注意する。

さて、これも序で述べた通りであるが、圏の概念は（相対論的な）時空の概念を一般的に取り扱う上で恰好の概念である。事象間の諸関係こそが重要であり、とくにその諸関係のうちでも「因果的」関係が骨格的な役割を果たすことから、次の概念を定義する：

定義 1. 圏 $\mathcal{C}$ とその部分圏 $\mathcal{C}^{cau}$ の対が $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}^{cau}|$ をみたすとき、これを因果的圏と呼ぶ。 $\mathcal{C}^{cau}$ に属する射は因果的であるという。（言葉の濫用により、 $\mathcal{C}$ 自身をも因果的圏と呼ぶ。その際、 $\mathcal{C}^{cau}$ をいちいち明示しない。）

¹圏論の基本概念については、西郷甲矢人・能美十三『圏論の道案内』（技術評論社）などを参照。

もちろんこれは一般の圏に対する定義であって、「因果的」といった用語はミスリーディングかもしれない。しかしわれわれの念頭にあるのは主に時空における経路のなす圏（対象は事象である）と因果的経路のなす部分圏であるので、この用語を用いることにする。

定義 2. $\mathcal{C}$ を因果的圏とし、 $\mathcal{O}$ を $|\mathcal{C}|$ の部分集合とする。以下に述べる射によって生成される部分圏を $\mathcal{O}$ の関連圏と呼び、 $\mathcal{O}^{rel}$ と表す：

域および余域がともに $\mathcal{O}$ に含まれる射、
 域が $\mathcal{O}$ に含まれ余域が $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に含まれる因果的射、
 余域が $\mathcal{O}$ に含まれ域が $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に含まれる因果的射、
 $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に属する恒等射（対象と同一視されている）。

によって生成される部分圏を $\mathcal{O}$ の関連圏と呼び、 $\mathcal{O}^{rel}$ と表す。

これは時空の場合に則して直感的に言えば、「ある時空領域に関して物理的」な関係性の総体である。定義より以下が容易に示せる：

定理 3. $\mathcal{C}$ を因果的圏とし $\mathcal{O}$ を $|\mathcal{C}|$ の部分集合とする。関連圏 $\mathcal{O}^{rel}$ の任意の射は下記のいずれかの形で書ける：

$$c, c^{out} \circ c, c \circ c^{in}, c^{out} \circ c \circ c^{in}, i,$$

ただし c は域と余域がともに $\mathcal{O}$ に含まれる射、 c^{out} は域が $\mathcal{O}$ に含まれ余域が $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に含まれる因果的射、 c^{in} は余域が $\mathcal{O}$ に含まれ域が $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に含まれる因果的射、 i は $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に含まれる恒等射を表す。

定義 4. $\mathcal{C}$ を因果的圏とし $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を $|\mathcal{C}|$ の部分集合とする。 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ とが空間的に離れているとは、一方に属する対象から他方に属する対象への因果的射が存在しないことをいう。

上の定理 3 から次が示される：

定理 5. $\mathcal{C}$ を因果的圏とし $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を空間的に離れた $|\mathcal{C}|$ の部分集合とする。このとき、射のペア $(c, c') \notin |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ であって $c \in \mathcal{O}^{rel}, c' \in (\mathcal{O}')^{rel}$ かつ $\text{cod}(c) = \text{dom}(c')$ をみたすものは存在しない。

次節においては、圏の構造を反映する代数として「圏代数」の概念を導入するが、状態概念の定式化において重要な圏代数の対合構造（エルミート共役の一般化）をもたらすのが「圏の対合構造」である。

定義 6. $\mathcal{C}$ を圏とする。 $(\cdot)^\dagger$ が $\mathcal{C}$ 上の共変な対合／反変な対合であるとは、それが $\mathcal{C}$ から自身への共変関手／反変関手であって² $(\cdot)^\dagger \circ (\cdot)^\dagger$ が³ $\mathcal{C}$ 上の恒等関手⁴に等しくなることをいう。反変な対合を備えた圏を † -圏と呼ぶ。

²共変関手（しばしば単に関手と呼ばれる）とは、射に射を対応させるものであって合成や恒等射を保つものをいう。端的に言えば「圏の準同型」である。反変関手は共変関手とほぼ同じ概念であるが、合成の順序をひっくり返すところだけが異なる。

³関手の合成は写像の合成とまったく同様に定義される。

⁴すなわち、任意の射をそれ自身にうつす関手。

定義 7. $\mathcal{C}$ を圏とする。 $\mathcal{C}$ の部分的な対合構造とは、対合を備えた部分圏 $\mathcal{C}^\sim$ であって $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}^\sim|$ をみたすものをいう。

定義 8. $\mathcal{C}$ を部分的な対合構造 $\mathcal{C}^\sim$ をもつ因果的圏とする。対合つき関連圏 $\mathcal{C}^{rel\sim}$ とは $\mathcal{C}^\sim$ の対合について閉じた部分圏のうちで最大のものをいう。

3 圏代数としての量子場

和と積の二つの演算（およびそれぞれの単位元）を備えた代数系（つまり「環」の定義のうちで加法の逆元の存在の仮定を取り去ったもの）を rig あるいは semiring と呼び、半環などと呼ばれる。ここでは「数系」と呼ぶことにしよう。

数系に関しても、環と同じようにしてその上の（左・右・両側）加群（和と数系の元によるスカラー倍を備えた代数系）や代数（和・スカラー倍および積を備えた代数系）の概念を定めることができる。また、共変な／反変な対合についても同様に定義される。とくに、積の順番をひっくりかえす反変な対合はエルミート共役の一般化であり、これをもつ代数は $*$ -代数と呼ばれる。

われわれにとって重要なのは、圏からその構造を反映した代数を定義できることである：

定義 9. $\mathcal{C}$ を圏とし R を数系とする。 $\mathcal{C}$ 上の R -値関数 α が有限伝搬であるとは、 $\mathcal{C}$ の任意の対象 C に関して「 $\mathcal{C}$ を域あるいは余域とする射 f であって $\alpha(f) \neq 0$ となるもの」が有限個しかないことをいう。有限伝搬な $\mathcal{C}$ 上の R -値関数全体のなす（両側） R -加群は、積

$$(\alpha' \alpha)(c'') = \sum_{\{(c', c) \mid c'' = c' \circ c\}} \alpha'(c') \alpha(c), \quad c, c', c'' \in \mathcal{C}$$

によって積の単位元

$$\epsilon(c) = \begin{cases} 1 & (c \in |\mathcal{C}|) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

をもつ代数となる。これを圏 $\mathcal{C}$ 上の（有限伝搬な）圏代数と呼び、 $R[\mathcal{C}]$ と表す。

圏代数は（係数である数系が可換であっても）一般に非可換である（異なる対象間に射が存在すれば必ず非可換となる）。恒等射のみからなる圏（離散圏）の圏代数は対象の集合上の関数たちのなす代数であり、圏代数はその非可換な一般化であるといえる。行列代数や多項式代数も圏代数の一例となっている。なお、上のような「畳み込み」により積を定義することさえできれば、「有限伝搬な圏代数」以外にも様々な圏代数を考えることが可能である。

ただ、有限伝搬な圏代数は、任意の小さな圏（たとえどれほど濃度が大きくてもよい）で定義できるという利点があり、単位的でもあることに注意せよ⁵。

圏および数系が対合をもつとき、圏代数も対合をもつ：

定理 10. $\mathcal{C}$ を共変な／反変な対合 $(\cdot)^\dagger$ をもつ圏とし R を共変な／反変な対合 $\overline{(\cdot)}$ をもつ数系とする。このとき、圏代数 $R[\mathcal{C}]$ は R 上の共変な包含を持つ代数／*-代数となる。

以上の準備のもとで、量子場を圏代数として定義する。

定義 11. $\mathcal{C}$ を部分的な対合構造 $\mathcal{C}^\sim$ をもつ因果的圏とし R を数系とする。圏代数 $R[\mathcal{C}]$ を時空 $\mathcal{C}$ 上の R 係数量子場と呼ぶ。

このように定義された量子場は、圏構造を反映した共変性や局所性のような豊かな構造を持っている（詳しくは Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, 13 9, 1727. を参照のこと）。とくに局所性を論じるには、以下に定義される局所代数の概念が重要である。

定義 12. R を数系とし $\mathcal{C}$ を因果的圏とする。 $|\mathcal{C}|$ の部分集合 $\mathcal{O}$ の関連圏の圏代数 $R[\mathcal{O}^{rel}]$ を $\mathcal{O}$ の R 係数関連代数と呼ぶ。 $|\mathcal{C}|$ の部分集合 $\mathcal{O}$ が領域であるとは任意の恒等射 $C \in |\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}^{rel}$ において自明でない分解をもたない（自身以外の $\mathcal{O}^{rel}$ の射の対の合成として表せない）ことをいう。領域 $\mathcal{O}$ に対し $R[\mathcal{O}^{rel}]$ の部分数系 $R^{loc}[\mathcal{O}]$ を、任意の $C \in |\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ に対し $\alpha(C) = 0$ をみたす α と $R[\mathcal{O}^{rel}] \cap Z(R[\mathcal{C}])$ （ただし $Z(R[\mathcal{C}])$ は $R[\mathcal{C}]$ の中心⁶を表す）に属する δ によって $\alpha + \delta$ という形で書けるものの集合として定義するとき、これは R の中心 $Z(R)$ 上の代数となり、 $\mathcal{O}$ 上の局所代数と呼ばれる。

さらに対合を考えることによって、対合つき関連代数 $R[\mathcal{O}^{rel\sim}]$ および対合つき局所代数 $R^{loc\sim}[\mathcal{O}]$ もまったく同様に定義される。定理 5 より以下が示される：

定理 13. 領域 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ が空間的に離れているとき、局所代数 $R^{loc}[\mathcal{O}]$ と $R^{loc}[\mathcal{O}']$ とは互いに可換となる。

定理 14. 領域 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ が空間的に離れているとき、対合つき局所代数 $R^{loc\sim}[\mathcal{O}]$ と $R^{loc\sim}[\mathcal{O}']$ とは互いに可換となる。

上の定理は代数的量子場理論（Algebraic Quantum Field Theory, AQFT）におけるアインシュタイン因果性の対応物である。AQFT および位相的量子

⁵われわれの圏代数は、群環などの一般化になっているが、対象が無数個の場合、有限伝搬だからといって「0 でない値を取る射は有限個」とは限らないことに注意（有限個の対象をもつ場合にはそうなるが）。「無限行列」的なものを許しつつ、行列演算がきちんと定義されているのである。圏代数を一般化された行列代数という観点から調べることも興味深い。「線型代数」的な研究の基盤となる性質については Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, 13 7, 1172. <https://doi.org/10.3390/sym13071172> を参照のこと。

⁶ある数系の任意の要素と積について可換なその数系の要素全体をその数系の中心と呼ぶ。

場理論 (Topological Quantum Field Theory, TQFT) とわれわれの関連についてより詳しいことは Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, 13 9, 1727. に譲る。

4 圏上の状態としての量子場の状態

状態とは、各物理量 (代数の元) に対しその期待値を対応させるものであり、「系と環境とのインターフェイス」(小嶋泉) の在り方としての統計的な法則性に他ならない。数学的には次のように定義される。

定義 15. A を数系 R 上の代数とする。 A 上の R -値線型写像 (加法とスカラー倍を保つ写像) は A 上の線型汎関数とよばれる。 A 上の線型汎関数が単位的であるとは $\varphi(\epsilon) = 1$ をみたすことである。ただし ϵ と 1 とはそれぞれ A と R との乗法単位元を表す。

定義 16. 数系の対 (R, R_+) が R 上の正性構造であるとは R_+ が R の対合を備えた部分数系であって、任意の $r, s \in R_+$ に対し $r + s = 0$ が $r = s = 0$ を含意し、かつ任意の $a \in R$ について $a^*a \in R_+$ が成り立つことをいう。

定義 17. R を対合を備えた数系とし (R, R_+) を R 上の正性構造とする。対合を備えた R 上の代数 A 上の単位的な線型汎関数 φ が A 上の状態であるとは、 $\varphi(a^*a) \in R_+$ および $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ が任意の $a \in R$ に対して成り立つことをいう⁷。ただし $(\cdot)^*$ と $\overline{(\cdot)}$ とはそれぞれ A と R の対合を表す。

定義 18. 対合を備えた数系 R 上の対合を備えた代数 A とその上の状態 φ との対 (A, φ) を非可換確率空間と呼ぶ。

この非可換確率空間は通常の (古典的・測度論的な) 確率空間の一般化となっており、その研究である非可換確率論は古典的・測度論的確率論と量子論の双方を包含する理論となっている。この非可換確率論と圏論は、次の「圏上の状態」の概念によってつながる。

定義 19. R を対合を備えた数系、 (R, R_+) を R 上の正性構造、そして $\mathcal{C}$ を対合を備えた圏とする。圏代数 $R[\mathcal{C}]$ 上の状態を圏 $\mathcal{C}$ 上の状態と呼ぶ。

この定義はいわば「言葉の濫用」をしているが、それは以下の定理によってある程度正当化される (証明は Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, 13 9, 1727. を参照) :

定理 20. $\mathcal{C}$ を対合を備えた圏であって $|\mathcal{C}|$ が有限であるようなものとする。このとき圏 $\mathcal{C}$ 上の状態と $\mathcal{C}$ 上の正規化された $Z(R)$ -値半正定値関数是一对一対応する。ただし、 $Z(R)$ -値関数 ϕ が $Z(R)$ -値半正定値関数であるとは、任

⁷ $R = \mathbb{C}$ の場合、最後の条件 $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ は他の条件から従う。

意の射 c, c' および有限個の射を除いて値が 0 となるような R -値関数 ξ について

$$\sum_{\{(c, c') | \text{dom}((c')^\dagger) = \text{cod}(c)\}} \overline{\xi(c')} \phi((c')^\dagger \circ c) \xi(c)$$

が R_+ に属し $\phi(c^\dagger) = \overline{\phi(c)}$ となることをいう。

この圏上の状態の概念を用いて、量子場の状態を以下のように定義する。

定義 21. $\mathcal{C}$ を部分的な対合構造 $\mathcal{C}^\sim$ をもつ因果的圏とし、 (R, R_+) を対合をもつ数系 R 上の正性構造とする。 $\mathcal{C}$ 上の単位的線型汎関数 φ が時空 $\mathcal{C}$ 上の R 係数量子場の R' -値状態であるとは、 φ を $R[\mathcal{C}^\sim]$ 上に制限すれば状態となり、 φ の像が R の部分数系 R' に含まれることをいう。

さらには、「局所状態」の概念も定義できる。

定義 22. $\mathcal{C}$ を部分的な対合構造 $\mathcal{C}^\sim$ をもつ因果的圏とし、 (R, R_+) を対合をもつ数系 R 上の正性構造とする。 $R^{loc\sim}[\mathcal{O}]$ 上の状態を時空 $\mathcal{C}$ 上の R 係数量子場の $\mathcal{O}$ における局所状態と呼ぶ。

これらの概念を導入することにより、AQFT・セクター理論・小嶋の「ミクロ・マクロ双対性」および「四項図式」や TQFT などとの関連がよりはっきりと見えてくるのであるが、これはいずれ別の機会に改めて述べることにする。

5 展望

本稿では詳しく触れなかったが、前述の通りわれわれのアプローチは AQFT や TQFT とも概念的な関連性を持っている。もちろんその関連性をより明らかにするためには、測度や位相、微分構造などをうまく取り込む必要があるが、これについては安藤浩志氏、長谷部高広氏および藤井宗一郎氏らとの共同研究が進行中である（われわれの議論において射の集合がどれほど大きな濃度を持っていてもよいことに注意）。一方、格子ゲージ理論をはじめとする離散構造に基づくアプローチをわれわれの枠組みに取り込むことも興味ある課題である。

また、量子系についての興味深いトイモデルを与える「量子ウォーク」をこの枠組みで考えることもできる。

定義 23. A を $*$ -代数とする。ユニタリ元 $\omega \in A$ すなわち $\omega^* \omega = \omega \omega^* = \epsilon$ をみたす A の要素によって

$$\varphi^t(\alpha) = \varphi((\omega^*)^t \alpha \omega^t) \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

として与えられる状態の列を A 上の量子ウォークと呼ぶ。

定義 24. $\mathcal{C}$ を † -圏とし R を $*$ -数系（反変的な対合を備えた数系）とする。 $R[\mathcal{C}]$ 上の量子ウォークを $\mathcal{C}$ 上量子ウォークと呼ぶ。

定義を見るだけでは解析のしようがないように見えるが、非可換確率空間からはヒルベルト空間等を構成できるので（GNS 構成）、見かけ以上に具体的な解析が可能となる。また、状態と半正定値関数との対応を通じた「再生核ヒルベルト空間」の理論との関係も興味深い。一般論とともに興味深い具体例の研究を行っていきたい。

もちろん最終的な目的は相互作用する量子場のモデルの構築と解析、そして一般相対論と量子論の統合である。この見戯に等しい小論が、遠大な目的に向けての最初の一步であったと振り返ることができることを願ってやまない。