

氏 名	寺 田 俊 明 てら だ とし あき
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 441 号
学 位 授 与 の 日 付	昭 和 48 年 9 月 25 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables (多変数超幾何函数より生ずるリーマンの問題と保型函数)

(主 査)
論文調査委員 教授 楠 幸男 教授 溝 畑 茂 教授 一 松 信

論 文 内 容 の 要 旨

主論文に関連した古典的な研究として、Riemann は、2つの一次独立な分岐をもつ一変数正則函数が3点 $0, 1, \infty$ を特異点とし、そこである分岐の様式をもつならば、それは超幾何微分方程式をみたし、したがって超幾何函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ で表わされることを示した。ついで Schwarz は、 α, β, γ が適当な値のとき、超幾何微分方程式の2つの独立な解 ω_1, ω_2 に対し商 ω_1/ω_2 の逆函数が単位円内の保型函数になることを示した。申請者は、これらの古典的結果を複素 n 変数の場合に拡張することを目指し、上記およびそれ以後に関連した結果すべてを含む一般論を展開した。次に主な結果の概要を述べる。

複素 n 変数 $x_1, \dots, x_n$ の Osgood 空間 $(P^1)^n$ から、固有面 $S_{ij} = \{(x) | x_i = x_j\} (i, j = 0, 1, \dots, n+1, \infty, x_0 = 0, x_{n+1} = 1, x_\infty = \infty)$ をすべて除いた領域を D とし、 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, \lambda_\infty$ は整数でない複素数でその和は $n+1$ とする。このとき D の普遍被覆空間 $\tilde{D}$ で正則でかつ次の条件をみたす函数 $F(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}; x_1, \dots, x_n)$ を考える：

- 1) F の任意の $n+2$ 個の分枝は一次従属であるが、 $n+1$ 個の一次独立な分枝が存在する。
- 2) 各 S_{ij} には適当な一点があり、その近傍では、 F の任意の函数要素は n 個の正則函数と $(x_i - x_j)^{\lambda_i + \lambda_j - 1} \times (\text{正則函数})$ との一次結合で表わされる（ただし、 $j = \infty$ または $\lambda_i + \lambda_j$ が整数の場合は少し修正を要する）。

このような函数 F は次の連立偏微分方程式

$$(*) \begin{cases} (x_i - x_j) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + (\lambda_j - 1) \frac{\partial F}{\partial x_i} - (\lambda_i - 1) \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (i \neq j) \\ x_i(x_i - 1) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \left[x_i(x_i - 1) \sum_{1 \leq \alpha \leq n} \frac{1 - \lambda_\alpha}{x_i - x_\alpha} + \lambda_0 + \lambda_i - 2 + (4 - \lambda_0 - 2\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i \right] \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ + (\lambda_i - 1) \sum_{1 \leq \alpha \leq n} \frac{x_\alpha(x_\alpha - 1)}{x_i - x_\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} + \lambda_\infty(1 - \lambda_i)F = 0 \end{cases}$$

をみたす。これは $n+1$ 個の一次独立な解をもち、それらは次の Euler 型の積分表示をもつ：

$$\int u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\dots(u-x_n)^{\lambda_n-1}(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}du$$

申請者は次に、 u 平面上の $n+1$ 個の適当な積分路をとったとき上の積分が定義する函数 ((*)の解) が、 D の基本群の生成曲線に沿って動いたときうける変換をしらべ、 λ_i がすべて実数のときその変換で不変なエルミット形式の存在を示し、その性質を表現論を用いてしらべた。これによってとくに、 $0 < \lambda_i < 1 (i=0, 1, \dots, n+1, \infty)$ のとき

$$|\varrho_1|^2 + \dots + |\varrho_n|^2 - |\varrho_{n+1}|^2 < 0$$

なる (*) の解 $\varrho_1, \dots, \varrho_{n+1}$ の存在が示される。したがって、 $(\varrho_1, \dots, \varrho_{n+1})$ は $\tilde{D}$ から C^n の超球 B の中への解析的写像を与えるが、その際さらに適当な $\{\lambda_i\}$ に対しては、その逆写像が一価で B 全体へ解析接続できることを証明した。すなわち、その逆写像は B 上の保型函数を与える。このような保型函数を生ずる $\{\lambda_i\}$ の例として、申請者は、 $n=3$ のとき $\lambda_i = \frac{2}{3} (0 \leq i \leq 4)$ 、 $n=2$ のとき 14 種類見出している。これらの中には古典的なものや近年志村氏がえたものが含まれ、さらに新しい保型函数がいくつか発見されている。またこれらの例ではすべて、基本領域が適当にコンパクト化されその上の保型函数体は n 次元の有理函数体と同型であることが示されている。

参考論文 1 では、古典的な Hartogs の正則性定理を次のように改良した。 D, D' を領域、 E を D 内の集合とする。 $f(x, y)$ は $y \in D'$ を固定するとき D で正則、 $x \in E$ を固定するとき D' で正則な函数とする。このときもし E の容量が正ならば f は (D, D') で正則になる。また E の容量が 0 ならばその結論は一般に成立しない。

参考論文 2 は参考論文 1 の考察を、有限多価解析函数やその正規族の場合について拡張した。

論文審査の結果の要旨

一変数の超幾何函数を Riemann が新しい観点から研究し、それに関連して Schwarz は超幾何函数から具体的な保型函数を構成する方法を見出した。その後 Picard はこれらの結果を、Appell による 2 変数の超幾何函数の場合に拡張した。しかしそれ以来この方面の研究は進まず長く手がつけられていなかった。実際その一般化には極めて複雑困難な点が多く含まれていた。

申請者はこのような状況のもとに、論文内容の要旨で述べたような複素 n 変数の場合の一般論を確立し、上述の古典的諸結果を統合するとともに新しい具体的な保型函数を見出した。これらは極めて深い結果であり、注目に値するものである。

主論文の結果を導くために申請者は、連立偏微分方程式 (*) の Euler 型積分による解について詳細にしらべ、(*) のモノドロミー群が不変エルミット形式をもつことを示し、またその性質を表現論の技法を用いてしらべた。これが最も難しい点であったといえるが、その解決は非凡で見事なものである。このほか随所にあられる複雑な計算を巧みに処理し、また高次元の固有面の場合に生ずる困難な点を克服するために σ -process 等の多変数函数論の近代的方法を駆使している。これらのことはその着想とともに高く評価される。

申請者は上の一般論の特別の場合として、Schwarz や Picard の古典的保型函数や近年整数論の研究から志村氏がえた保型函数を導くとともに、さらに新しい具体的な保型函数をいくつか見出した。保型函数

は函数論のみならず、整数論においても重要で近年盛んに研究されているので、主論文が多変数函数論はもとより、それらの関連分野に与える影響と貢献は少なくないものと考ええる。

参考論文において申請者は、古典的な Hartogs の正則定理の条件を吟味し、より弱い条件で成立することを示し、さらにその考察を有限多価解析函数やその正規族の場合について拡張した。これらの研究も興味深く、多変数函数論の基礎理論に寄与するところが多い。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。