

算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論 (Adelic Cohomology Theory on Arithmetic Varieties)

By

菅原 弘太郎 (Kotaro SUGAHARA)*

Abstract

Based on Parshin-Beilinson's theory for Noetherian schemes, we develop an adelic cohomology theory for quasi-coherent sheaves over arithmetic varieties, jointly with Prof. Weng. This is a survey article.

本稿では算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論を概説する。これはネータースキーム上で構築された Parshin, Beilinson, Huber によるアデリックコホモロジー理論のアナロジーである。本研究は翁林先生との共同研究であり、本稿の主たる目的は翁林先生との共著論文「Arithmetic Cohomology Groups」([12])で議論された算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論の中の諸定義・諸結果を概説することである。[12]は本稿執筆時点でプレプリント（投稿中論文）であることをご留意いただきたい。

§ 1. 序論

アデールの構成は 1938 年の A. Weil の論文 [14] の中で現れる。Weil はこの論文の中で代数的曲線上の Riemann-Roch の定理を証明するのに、アデールを使っている。A. N. Parshin は 1976 年に [9] の中で、このアデールを代数的曲面の場合で構成した。そのとき、Parshin は代数的曲面上の各因子に対して、アデールを使った複体を構成し、そのコホモロジー群が因子に付随する可逆層のコホモロジー群と一致することを示している ([9], §2, Theorem 1). 1980 年、この Parshin のアイデアを元に任意のネータースキーム上でアデールを構成したのは A. A Beilinson であった。Beilinson はネータースキーム上の各準連接層に対し、アデールを使った複体を構成し、それが層のコホモロジー群と一致することを示した ([1], §2, Corollary). しかしながら彼の論文はわずか 2 ページととても短く、定理の証

Received March 31, 2014. Revised January 7, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14G40, 20G10.

Key Words: Adelic Cohomology Theory, Arakelov Theory.

*Kyushu University, 744 Motoooka Nishi-ku, Fukuoka 819-0395 Japan.

e-mail: k-sugahara@math.kyushu-u.ac.jp

明などが省略されている. A. Huber は [3] で Beilinson の結果に詳細な証明を与えながら Beilinson の仕事を補いつつ, 有理アデールを構成するなど新たな結果も得ている. §2 で Parshin, Beilinson, Huber が発展させたネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論を復習する.

我々の研究目的はこのネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論のアナロジーとして, 算術的多様体上のアデリックコホモロジー理論を構築することであった. D. V. Osipov と A. N. Parshin は [8], §5 で代数体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ 上の算術的曲面 X に対するアデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の構成を行っているが, このアデール環は代数体のアデール環と同様に finite part と infinite part を持っている. 我々はこのアデール環の構成方法のアイディアに動機づけられて, 一般の算術的多様体上でアデールを構成した. またこのアデールを使って複体を構成し, そのコホモロジー群を算術的コホモロジー群として導入した. §3 で算術的多様体上のアデールの構成と算術的コホモロジー群の定義について述べる.

§4 と §5 を使って算術的コホモロジー群の性質について述べる. §4 で算術的曲線上の算術的コホモロジー群に対する双対定理を紹介する. これは翁林先生による [15] の中の結果である. §5 で算術的曲面上の算術的コホモロジー群に対する帰納的構造や双対定理について述べる. また双対定理を示すために必要なアデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の位相的構造とアデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の留数ペアリングの定義についても §5 で述べる.

算術的曲面上の算術的コホモロジー群に対する双対定理は我々の研究 [12] の主結果であるのでそれがどういうものか先に述べておきたいと思う. そのために算術的曲面上のアデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の留数ペアリングがどういうものか述べる.

定義 1.1 (Weng-Sugahara, [12]; 本稿の定義 5.6). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. 算術的アデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ を

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \mathbb{A}_X^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_X^{\text{ar}} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; \quad ((f_{C,x}) \times (f_P)), (g_{C,x}) \times (g_P)) \\ &\mapsto \sum_{(C,x)} \text{Res}_{C,x}(f_{C,x}g_{C,x}\omega) + \sum_P \text{Res}_P(f_Pg_P\omega) \end{aligned}$$

と定義する.

ここで x は X の閉点, C は x を含む X の既約曲線, P は X の生成ファイバー X_F 上の閉点を表し, $\text{Res}_{C,x}, \text{Res}_P$ はそれらに付随する留数写像である. 留数写像の定義の詳細については §5 で述べる. このペアリングを定義するために我々は M. Morrow による 2 次元局所体上の留数写像の定義を用いている ([5], 2.2 and 2.3). このペアリングを使って記述される次の主結果について述べる. この結果は算術的コホモロジー群の双対性を示すために用意される結果である.

定理 1.2 (Weng-Sugahara, [12]; 本稿の定理 5.7). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. 算術的アデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ について, 次の (i)-(iv) が成り立つ.

- (i) ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ は非退化である.

(ii) X 上の因子 D に対して, $(\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp = \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$ が成り立つ.

(iii) $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp = \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ が成り立つ.

(iv) $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^\perp = \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ が成り立つ.

ここで $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))$ は $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の部分群であり, §3 でその定義を述べる. 可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ に対する算術的コホモロジー群はこれらの部分群を使って定義される.

この結果を使って我々は次のような算術的コホモロジー群に対する双対定理を示すことができる.

定理 1.3 (Weng-Sugahara, [12]; 本稿の定理 5.8). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. 任意の $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して, 位相群としての同型

$$H_{\text{ar}}^i(\widehat{X, \mathcal{O}_X(D)}) \simeq H_{\text{ar}}^{2-i}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$$

がある.

ここで位相群 V に対して $\widehat{V}$ はその Pontryagin 双対群を表す. また $H_{\text{ar}}^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ は $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の位相から誘導された位相群構造を持っている.

この双対定理をみると, $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に入る位相的構造がとても重要な意味を持っていることがわかる. これはある意味で算術的多様体上でコホモロジー論を展開するのになぜアデールを使うのがよいのかという疑問に答えるものになっているのではないかと思う.

本稿で, アデールが多様体上の局所的な情報を集めつつ, とても自然な位相群構造を持っており, それが算術的コホモロジー群の双対性に対する重要な因子となっているということを読者にうまく伝えることができれば幸いである.

謝辞

本稿の投稿の際に多くの問題点を指摘, 注意して下さった編集者の方々に感謝申し上げます.

§2. ネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論の復習

本節では Parshin, Beilinson, Huber が発展させたネータースキーム上のアデリックコホモロジー理論を復習する. この節では特に断らない場合, X はネータースキームとする.

§2.1. ネータースキーム X に付随する単体的複体

各ネータースキームに付随する単体的複体の定義について述べる.

定義 2.1 ([1], §2; [3], Definition 1.3.1). X をネータースキーム, $P(X)$ を X の点の集合とする. 点 $p, q \in P(X)$ に対して, $q \in \overline{\{p\}}$ ならば $p \geq q$ と定義する. そのとき $\geq$ は $P(X)$ 上の半順序になる. $S(X)$ を順序集合 $(P(X), \geq)$ に付随する単体の集合とする. 特に, $m \geq 0$ に対し, $S(X)_m$ を m -単体からなる集合とする:

$$S(X)_m := \{(p_0, \dots, p_m) \mid p_i \in P(X), p_i \geq p_{i+1}\}.$$

$i \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対し, 境界写像 δ_i^m と退化写像 σ_i^m を

$$\begin{aligned} \delta_i^m : S(X)_m &\rightarrow S(X)_{m-1}; (p_0, \dots, p_i, \dots, p_m) \mapsto (p_0, \dots, \check{p}_i, \dots, p_m), \\ \sigma_i^m : S(X)_m &\rightarrow S(X)_{m+1}; (p_0, \dots, p_i, \dots, p_m) \mapsto (p_0, \dots, p_i, p_i, \dots, p_m), \end{aligned}$$

と定義する.

定義 2.2 ([3], Definition 1.3.3). $S(X)_m^{\text{red}}$ を $S(X)_m$ のうち非退化な単体からなる集合とする:

$$S(X)_m^{\text{red}} := \{(p_0, \dots, p_m) \in S(X)_m \mid \text{任意の } i \neq j \text{ に対して, } p_i \neq p_j \text{ である}\}.$$

定義 2.3 ([1], §2; [3], Subsection 1.3, Notations). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ と点 $p \in P(X)$ に対して, 集合 ${}_pK$ を

$${}_pK := \{(p_1, \dots, p_m) \in S(X)_{m-1} \mid (p, p_1, \dots, p_m) \in K\}.$$

とおく.

§ 2.2. アデリック群とアデリックコホモロジー群

$QC(X)$ を X 上の準連接層の圏, $AbGp$ をアーベル群の圏とする. 点 $p \in X$ に対して, $\mathcal{O}_p$ を p に対応する極大イデアル m_p における局所環とする. 標準的な射 $f : \text{Spec}(\mathcal{O}_p) \rightarrow X$ と $\mathcal{O}_p$ -加群 N に対して $[N]_p = f_* \tilde{N}$ とおく. Parshin, Beilinson, Huber によるネータースキーム上のアデールの構成は以下のとおりである.

命題 2.4 (Parshin, [9], §2, Definition 1; Beilinson, [1], §2; Huber, [3], Proposition 2.1.1). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ に対し, 性質 (i), (ii), (iii) によって一意的に定まる加法的かつ完全な関手

$$\mathbb{A}(K, \cdot) : QC(X) \rightarrow AbGp$$

が存在する.

(i) $\mathbb{A}(K, \cdot)$ は順極限と可換である.

(ii) $m = 0$ と X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して,

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) = \prod_{p \in K} \varprojlim_l \mathcal{F}_p / m_p^l \mathcal{F}_p$$

である.

(iii) $m > 0$ と X 上の接続層 $\mathcal{F}$ に対して,

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \mathbb{A}(pK, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$$

である.

我々は上の命題の関手 $\mathbb{A}(K, \cdot)$ をアデリック関手と呼び, アーベル群 $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ を準接続層 $\mathcal{F}$ のアデリック群と呼ぶ.

注意. 準接続層ではあるが接続層でないものには (ii) や (iii) を直接適用することはできない. 任意の準接続層に対しアデリック群を計算するには性質 (i) を使う必要がある. X はネータースキームなので, X 上の準接続層 $\mathcal{F}$ はある接続層たち $\mathcal{F}_i$ ($i \in I$) を使って $\mathcal{F} = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i$ と書ける. よって準接続層 $\mathcal{F}$ に対し, アデリック群 $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ は性質 (i) から $\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) = \mathbb{A}(K, \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i) = \varinjlim_{i \in I} \mathbb{A}(K, \mathcal{F}_i)$ と計算される. $\mathbb{A}(K, \mathcal{F}_i)$ は $\mathcal{F}_i$ が接続層なので性質 (ii) や (iii) を使って計算できる. アデリック群の具体的な計算例は例 2.10 をみてほしい.

定義 2.5 ([3], Definition 3.3.2). 準接続層 $\mathcal{F}$ と $m \geq 0$ に対して, m -アデリック群 $\mathbb{A}_X^m(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_X^m(\mathcal{F}) := \mathbb{A}(S(X)_m^{\text{red}}, \mathcal{F})$$

と定義する.

定義 2.6 ([10], §2). 準接続層 $\mathcal{F}$ と $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m$ に対して, $(i_0, \dots, i_m)$ -型アデリック群 $\mathbb{A}_{X, i_0, i_1, \dots, i_m}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{X, i_0, i_1, \dots, i_m}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_X(K_{i_0, i_1, \dots, i_m}, \mathcal{F}).$$

と定義する. 但し,

$$K_{i_0, i_1, \dots, i_m} := \left\{ (p_0, p_1, \dots, p_m) \in S(X)_m \mid 0 \leq t \leq m \text{ に対して, } \text{codim} \overline{\{p_t\}} = i_t \right\}$$

である.

注意 ([10], §2). $\dim X < +\infty$ であるとき, $\mathbb{A}_X^m(\mathcal{F}) = \bigoplus_{0 \leq i_0 < \cdots < i_m \leq \dim X} \mathbb{A}_{X, i_0, \dots, i_m}(\mathcal{F})$ が成り立つ.

アデリック群には次のような包含関係がある.

命題 2.7 (Huber, [3], Proposition 2.1.4). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ と準接続層 $\mathcal{F}$ に対して, 包含関係

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) \subset \prod_{(p_0, \dots, p_m) \in K} \mathbb{A}((p_0, \dots, p_m), \mathcal{F})$$

が成り立つ.

記号. この命題によって, アデリック群 $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ の元 f を $f = (f_{X_0, \dots, X_m})$, もしくは $f = (f_{p_0, \dots, p_m})$ と書くことがある. ここで $X_i = \overline{\{p_i\}}$ ($0 \leq i \leq m$) であり, $f_{X_0, \dots, X_m}, f_{p_0, \dots, p_m} \in \mathbb{A}((p_0, \dots, p_m), \mathcal{F})$ とする. また, X が既約で p_i がその生成点である場合, その添え字 X_i, p_i は省略して書くことがある.

アデリック群に対する境界写像を以下のように定義する.

定義 2.8 (Huber, [3], Definition 2.2.2). 部分集合 $K \subset S(X)_m$ と $L \subset S(X)_{m-1}$ はある $i \in \{1, \dots, m\}$ に対して $\delta_i^m K \subset L$ であるとする. このとき, 性質 (a)-(d) によって各準連接層 $\mathcal{F}$ に対し境界写像

$$d_i^m(K, L, \mathcal{F}) : \mathbb{A}(L, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}(K, \mathcal{F})$$

を定義する.

(a) $i = 0$ かつ $\mathcal{F}$ を連接層とする. 各点 $p \in P(X)$ に対し, 射 $\mathcal{F} \rightarrow [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p$ に関手 $\mathbb{A}(L, \cdot)$ を適用すれば, 写像 $\mathbb{A}(L, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}(L, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ を持つ. この写像と $L \supset {}_p K$ に対する自然な射影 $\mathbb{A}(L, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p) \rightarrow \mathbb{A}({}_p K, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ の合成写像 $\varphi_p^l : \mathbb{A}(L, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}({}_p K, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ は $l \in \mathbb{N}$ に対して射影系をなす. 境界写像を $d_0^m(K, L, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \varphi_p^l$ と定義する.

(b) $i = 1, m = 1$ かつ $\mathcal{F}$ を連接層とする. このとき, 各点 $p \in P(X)$ に対し, 標準的な写像 $\pi_p^l : \Gamma(X, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p) \rightarrow \mathbb{A}({}_p K, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$ は $l \in \mathbb{N}$ について射影系をなす. 境界写像を $d_1^1(K, L, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \pi_p^l$ と定義する.

(c) $i > 0, m > 1$ かつ $\mathcal{F}$ を連接層とする. 境界写像を

$$d_i^m(K, L, \mathcal{F}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l d_{i-1}^{m-1}({}_p K, {}_p L, [\mathcal{F}_p/m_p^l \mathcal{F}_p]_p)$$

と定義する.

(d) $d_i^m(K, L, \cdot)$ は順極限と可換である.

記号. 準連接層 $\mathcal{F}$ に対し, $d^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i d_i^m(S(X)_m^{\text{red}}, S(X)_{m-1}^{\text{red}}, \mathcal{F})$ とおく. そのとき境界写像 $d^m : \mathbb{A}_X^{m-1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_X^m(\mathcal{F})$ を持つ.

アデールと層のコホモロジー群の関係を示した次の結果は非常に重要である.

定理 2.9 ([9], §2, Theorem 1; [1], §2, Corollary; [3], Theorem 4.2.3, Proposition 5.1.2). ネータースキーム X 上の準連接層 $\mathcal{F}$ に対して (i), (ii) が成り立つ.

(i) $(\mathbb{A}_X^*(\mathcal{F}), d^*)$ は複体をなす.

(ii) 任意の $i \geq 0$ に対して,

$$H^i(\mathbb{A}_X^*(\mathcal{F})) = H^i(X, \mathcal{F})$$

が成り立つ. 但し, 左辺は複体 $(\mathbb{A}_X^*(\mathcal{F}), d^*)$ から得られるコホモロジー群であり, 右辺は層 $\mathcal{F}$ のコホモロジー群である.

我々はこの定理の複体をアデリック複体と呼び, アデリック複体のコホモロジー群をアデリックコホモロジー群と呼ぶ.

定理 2.9 のようにネータースキーム上の準連接層のコホモロジー群がアデリックな言葉を用いて表現されうるといのは非常に興味深い結果である. 一般の算術的多様体に対しても同様にアデリックな言葉を用いたコホモロジー理論を展開することを考えたい. これについては後の節で述べる.

アデリックコホモロジー群の最も単純な計算例の 1 つを考えてみる.

例 2.10. X を体 k 上の既約かつ非特異な曲線とし, $\mathcal{O}_X(D)$ を X 上の因子 D に付随する可逆層とする. そのとき, $\mathcal{O}_X(D)$ に対する各型のアデリック群は以下のように計算される. まず $\mathbb{A}_{X,0}(\mathcal{O}_X(D))$ を計算する. η を X の生成点とする.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{X,0}(\mathcal{O}_X(D)) &= \mathbb{A}_X(\{\eta\}, \mathcal{O}_X(D)) \text{ (定義 2.6 によって)} \\ &= \varprojlim_l \mathcal{O}_X(D)_\eta / m_\eta^l \mathcal{O}_X(D)_\eta \text{ (命題 2.4(ii) により)} \\ &= \varprojlim_l k(X) / \{0\} \\ &= k(X). \end{aligned}$$

次に, $\mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{O}_X(D))$ は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{O}_X(D)) &= \mathbb{A}_X(\{p \mid p : \text{closed}\}, \mathcal{O}_X(D)) \text{ (定義 2.6 によって)} \\ &= \prod_{p:\text{closed}} \varprojlim_l \mathcal{O}_X(D)_p / m_p^l \mathcal{O}_X(D)_p \text{ (命題 2.4(ii) により)} \\ &= \prod_{p:\text{closed}} \varprojlim_l m_p^{-\text{ord}_p(D)} / m_p^{-\text{ord}_p(D)+l} \\ &= \prod_{p:\text{closed}} \hat{m}_p^{-\text{ord}_p(D)} \\ &= \left\{ (a_p) \in \prod_{p:\text{closed}} k(X)_p \mid \text{ord}_p(a_p) + \text{ord}_p(D) \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

$\mathbb{A}_{X,01}(O_X(D))$ は以下のように計算される.

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{X,01}(O_X(D)) &= \mathbb{A}_X(\{(\eta, p) \mid p : \text{closed}\}, O_X(D)) \text{ (定義 2.6 によって)} \\
&= \varprojlim_I \mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, [O_X(D)_\eta / m_\eta^I O_X(D)_\eta]_\eta) \text{ (命題 2.4(iii) により)} \\
&= \mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, [k(X)]_\eta) \\
&= \mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, \varinjlim_E O_X(E)) ([k(X)]_\eta = \varinjlim_E O_X(E) \text{ と書けるので}) \\
&= \varinjlim_E \mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, O_X(E)) \text{ (命題 2.4(i) により)} \\
&= \varinjlim_E \mathbb{A}_{X,1}(O_X(E)) \text{ (定義 2.6 から)} \\
&= \bigcup_E \mathbb{A}_{X,1}(O_X(E)) \\
&= \left\{ (a_p) \in \prod_{p:\text{closed}} k(X)_p \mid \text{ほとんどすべての閉点 } p \text{ に対して, } a_p \in \hat{O}_p \right\}.
\end{aligned}$$

ここで, $\hat{O}_p$ は点 p での局所環の完備化, $\hat{m}_p$ はその極大イデアル, $k(X)_p$ は $\hat{O}_p$ の分数体, ord_p は p での付値函数, $k(X)$ は X の函数体を表す.

$\mathbb{A}_{X,01}(O_X(D))$ の計算の 3 行目に出てくる $[k(X)]_\eta$ は函数体 $k(X)$ の定数層である. これは準連接層である一方で, 連接層ではないことに注意しなければならない. 連接層ではない準連接層に対するアデリック群を計算するには, 命題 2.4 の注意で述べたように準連接層を連接層の順極限で表示し命題 2.4(i) を適用しなければならない. もし $\mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, [k(X)]_\eta)$ を計算するのに直接命題 2.4(ii) を適用してしまうと, $\mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, [k(X)]_\eta) = \{0\}$ と計算されてしまう. 上で計算したように $\mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, [k(X)]_\eta) \neq \{0\}$ なので, 連接層ではない準連接層に対するアデリック群を計算するのに命題 2.4(ii) を直接適用してはならないことがわかる. アデリック群を計算するときはこれらの点について注意してほしい.

また, $\mathbb{A}(\{p \mid p : \text{closed}\}, [k(X)]_\eta)$ をみると, これは因子 D に依らないことがわかる. よって $\mathbb{A}_{X,01}(O_X(D))$ は因子 D に依存しないアーベル群になる. そのため, $\mathbb{A}_{X,01}(O_X(D))$ を単純に $\mathbb{A}_X$ と書く. これはよく知られた代数的曲線 X に対するアデール環である. $\mathbb{A}_{X,1}(O_X(D))$ に対して, 記号の簡単のため以下 $\mathbb{A}_{X,1}(D)$ と書くことにする.

次は $O_X(D)$ に対するアデリックコホモロジー群を計算する. 定義から $O_X(D)$ に対するアデリック複体は

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow k(X) \oplus \mathbb{A}_{X,1}(D) &\xrightarrow{d^1} \mathbb{A}_X \rightarrow 0 \\
d^1 : (a_0, a_1) &\mapsto a_1 - a_0
\end{aligned}$$

というアデリック群の列である.

このアデリック複体から $O_X(D)$ に対するアデリックコホモロジー群は

$$H^0(\mathbb{A}_X(O_X(D))) = k(X) \cap \mathbb{A}_{X,1}(D), H^1(\mathbb{A}_X(O_X(D))) = \mathbb{A}_X/k(X) + \mathbb{A}_{X,1}(D)$$

と計算される.

§ 3. 算術的アデリック群と算術的コホモロジー群

この節では算術的多様体上のアデールの構成とそれを使って導入される算術的コホモロジー群の定義について述べる.

§ 3.1. 記号

§3 以降の説明のため, 以下の記号を導入する.

F : 代数体,

O_F : F の整数環,

S_{fin} : F の有限素点の集合,

S_{∞} : F の無限素点の集合,

$S := S_{\text{fin}} \cup S_{\infty}$,

$\pi: X \rightarrow Y = \text{Spec } O_F$: 次元 $n+1$ の正則な算術的多様体,

X_F : X の生成ファイバー,

F_v : F の v -完備化 ($v \in S$),

$X_{\sigma} := X \times_Y \text{Spec } F_{\sigma}$ ($\sigma \in S_{\infty}$),

$\varphi_{\sigma}: X_{\sigma} \rightarrow X_F$.

§ 3.2. 算術的多様体上のアデールの構成

算術的曲線 Y の閉点は F の有限素点と 1:1 に対応しているが, 代数体 F のアデール環 $\mathbb{A}_F$ はこの有限素点と合わせて F の無限素点の情報を含むアーベル群として定義されている. 一般の算術的多様体に対してアデールを構成する場合も同様のことがいえる. つまり, 我々は算術的多様体 X と合わせて多様体 X_{σ} ($\sigma \in S_{\infty}$) の点の情報も含むアデールを構成する必要がある. なぜそうする必要があるのかというと, 我々は算術的多様体上の交叉理論や Riemann-Roch の定理などを含む理論である Arakelov 理論と両立するようなアデリックコホモロジー理論を構築したいからである (Arakelov 理論については例えば [4] を参照されるといいだろう). しかし X_{σ} のすべての点の情報を取り出す必要はない. 我々が必要とする X_{σ} の点の情報は Arakelov 理論の中の交叉理論に関連のある点の情報のみで充分である. すなわち, X_F の点 P に対して, $\varphi_{\sigma}^{-1}(\overline{\{P\}})$ は X_{σ} の有限個の既約閉部分多様体に分解するが, 我々はこの既約閉部分多様体の生成点の情報だけを取り出せば充分である. このように P に対応する X_{σ} の既約閉部分多様体の生成点を P に付随する無限素点と呼ぶことにする.

Osipov, Parshin は [8] の中で算術的曲面に対するアデール環を以下のように定義している. ここで X は算術的曲面とする.

定義 3.1 (Osipov-Parshin, [8], §5).

[有限アデール環]

Parshin-Beilinson アデリック群を使って X に対する有限アデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ を $\mathbb{A}_X^{\text{fin}} := \mathbb{A}_{X,012}(\mathcal{O}_X)$ と定義する. そのとき $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ は

$$\mathbb{A}_X^{\text{fin}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$$

と書くことができる. 但し D_* は X 上の因子であり, $\mathbb{A}_{X,12}(D_*) = \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{O}_X(D_*))$ とする.

[∞ -アデール環](Osipov-Parshin)

生成ファイバー X_F に対するアデール環 $\mathbb{A}_{X_F}$ を $\mathbb{A}_{X_F} = \mathbb{A}_{X_F,01}(\mathcal{O}_{X_F})$ とおくと,

$$\mathbb{A}_{X_F} = \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} \mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)$$

と書ける. 但し, C_* は X_F 上の因子であり, $\mathbb{A}_{X_F,1}(C_*) = \mathbb{A}_{X_F,1}(\mathcal{O}_X(C_*))$ とする. そのとき X に対する ∞ -アデール環 $\mathbb{A}_X^\infty$ を

$$\mathbb{A}_X^\infty := \mathbb{A}_{X_F} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} := \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} ((\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

と定義する.

[算術的アデール環](Osipov-Parshin)

X に対する算術的アデール環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ を

$$\mathbb{A}_X^{\text{ar}} := \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}} := \mathbb{A}_X^{\text{fin}} \oplus \mathbb{A}_X^\infty$$

と定義する.

注意. X_F 上の任意の因子 $C_1 \geq C_2$ に対して $\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)$ は有限次元 F ベクトル空間であり, よって有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であることに注意する.

注意. $\widehat{\otimes}$ の意味は次の例をみるとわかりやすいかもしれない. ローラン級数体 $\mathbb{Q}((t))$ を考える. そのとき $\mathbb{Q}((t)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \neq \mathbb{R}((t))$ であることはすぐにわかる. 一方で $\mathbb{Q}((t)) = \varinjlim_n \varprojlim_{m:m \leq n} t^n \mathbb{Q}[[t]]/t^m \mathbb{Q}[[t]]$ と書けるので, $\mathbb{Q}((t)) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \varinjlim_n \varprojlim_{m:m \leq n} (t^n \mathbb{Q}[[t]]/t^m \mathbb{Q}[[t]]) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \varinjlim_n \varprojlim_{m:m \leq n} t^n \mathbb{R}[[t]]/t^m \mathbb{R}[[t]] = \mathbb{R}((t))$ である. ここで, $t^n \mathbb{Q}[[t]]/t^m \mathbb{Q}[[t]]$ が有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であることに注意しよう.

∞ -アデール環は X_F のアデール環を用いることで, X_F の点に付随する無限素点の情報を非常にうまく取り出している. この定義に動機づけられて, 我々は以下のように算術的多様体に対する ∞ -アデリック群を構成した. 再び X は次元 $n+1$ の正則な算術的多様体であるとする.

命題 3.2 (Weng-Sugahara, [12]). 部分集合 $K \subset S(X_F)_m$ に対し, 性質 (i), (ii), (iii) によって一意的に定まる加法的かつ完全な関手

$$\mathbb{A}_\infty(K, \cdot) : QC(X_F) \rightarrow AbGp$$

が存在する.

(i) $\mathbb{A}_\infty(K, \cdot)$ は順極限と可換である.

(ii) $m = 0$ と X_F 上の接続層 $\mathcal{G}$ に対して,

$$\mathbb{A}_\infty(K, \mathcal{G}) = \prod_{p \in K} \varprojlim_l (\mathcal{G}_p / m_p^l \mathcal{G}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

である.

(iii) $m > 0$ と X_F 上の接続層 $\mathcal{G}$,

$$\mathbb{A}_\infty(K, \mathcal{G}) = \prod_{p \in P(X)} \varprojlim_l \mathbb{A}_\infty({}_p K, [\mathcal{G}_p / m_p^l \mathcal{G}_p]_p)$$

である.

この ∞ -アデリック関手から得られた ∞ -アデリック群を使って以下のような型の算術的アデリック群を我々は定義している.

定義 3.3 (Weng-Sugahara, [12]). $\mathcal{F}$ を X 上の準接続層, $\mathcal{F}_F$ を X_F 上 $\mathcal{F}$ に対応する準接続層とする. このとき, $(i_0, \dots, i_m)$ -型有限アデリック群 $\mathbb{A}_{\text{fin}, i_0, \dots, i_m}(\mathcal{F})$ と $(i_0, \dots, i_m)$ -型 ∞ -アデリック群 $\mathbb{A}_{\infty, i_0, \dots, i_m}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{\text{fin}, i_0, \dots, i_m}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_X(K_{X, i_0, \dots, i_m}, \mathcal{F}), \quad \mathbb{A}_{\infty, i_0, \dots, i_m}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_\infty(K_{X_F, i_0, \dots, i_m}, \mathcal{F}_F),$$

と定義する. 但し, $Z = X, X_F$ に対して,

$$K_{Z, i_0, \dots, i_m} = \left\{ (p_0, \dots, p_m) \in S(Z)_m \mid 0 \leq t \leq m \text{ に対して, } \text{codim} \overline{\{p_t\}} = i_t \right\},$$

としている. これらを使って各型の算術的アデリック群を以下の (1), (2), (3) で定義する.

(1) $\mathbb{A}_{\text{ar}; 0, 1, \dots, n+1}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{\text{ar}; 0, 1, \dots, n+1}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_{\text{fin}; 0, 1, \dots, n+1}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{\infty; 0, 1, \dots, n}(\mathcal{F}_F)$$

と定義する.

(2) $\mathbb{A}_{\text{ar}; 0, 1, \dots, n}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{\text{ar}; 0, 1, \dots, n}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_X(K_{X, 0, 1, \dots, n}^{\text{nh}}, \mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_X^{\text{fin, inf}}(K_{X, 0, 1, \dots, n}^{\text{h}}, \mathcal{F})$$

と定義する. 但し,

$$K_{X,0,1,\dots,n}^h := \{ (P_0, \dots, P_n) \in K_{X,0,1,\dots,n} \mid (P_0, \dots, P_n) \in S(X_F)_n \}$$

$$K_{X,0,1,\dots,n}^{\text{nh}} := K_{X,0,1,\dots,n} \setminus K_{X,0,1,\dots,n}^h$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_X^{\text{fin,inf}}(K_{X,0,1,\dots,n}^h, \mathcal{F}) \\ &:= \left\{ (f_{E_{P_0}, \dots, E_{P_n}}) \times (f_{P_0, \dots, P_n}) \in \mathbb{A}_X(K_{X,0,1,\dots,n}^h, \mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{\infty,0,1,\dots,n}(\mathcal{F}_F) \mid f_{E_{P_0}, \dots, E_{P_n}} = f_{P_0, \dots, P_n} \right\} \end{aligned}$$

である.

(3) 任意の $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して, $\mathbb{A}_{\text{ar};0,1,\dots,\hat{i},\dots,n+1}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{\text{ar};0,1,\dots,\hat{i},\dots,n+1}(\mathcal{F}) := \mathbb{A}_{\text{fin};0,1,\dots,\hat{i},\dots,n+1}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{\infty;0,1,\dots,\hat{i},\dots,n}(\mathcal{F}_F)$$

と定義する.

注意. 任意の $P \in X_F$ に対して, $O_{X,P} = O_{X_F,P}$ であることに注意すれば, $(P_0, \dots, P_n) \in S(X_F)_n$ に対して自然な写像 $\mathbb{A}((P_0, \dots, P_n), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_{\infty}((P_0, \dots, P_n), \mathcal{F}_F)$ を持つことがわかる. ゆえに $\mathbb{A}_{\text{ar};0,1,\dots,n}(\mathcal{F})$ の定義における条件 $f_{E_{P_0}, \dots, E_{P_n}} = f_{P_0, \dots, P_n}$ はこの写像の下意味を持つ.

注意. $n = 0$ に対して, $\mathbb{A}_{\infty;0,1,\dots,\hat{i},\dots,n}(\mathcal{F}_F)$ は意味をなさない. これを改善するために, 開集合 $U \subset X$ に対して (-1) -単体 $\underline{1}_U$ を形式的に導入し, X_F 上の (-1) -単体の集合を $S(X_F)_{-1} = S(X_F)_{-1}^{\text{red}} = \{\underline{1}_U \mid U \subset X \text{ は開集合}\}$ とおく ((-1) -単体の定義については [16], Subsection 3.1 も参照してほしい). 部分集合 $K \subset S(X_F)_{-1}$ に対して,

$$\mathbb{A}_{\infty;\hat{0}}(K, \mathcal{F}_F) := \{s_{\infty} \in \mathcal{F}_F(U_{K,F}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mid s \in \mathcal{F}(U_K)\}$$

とする. 但し, $U_K = \bigcup_{\underline{1}_U \in K} U$ であり, s_{∞} は s に対応する $\mathcal{F}_F(U_{K,F}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の元を表す.

さらに次のような型の算術的アデリック群を定義する.

定義 3.4 (Weng-Sugahara, [12]). $\mathcal{F}$ を X 上の局所自由層とする.

もし $I = \bigcap_{i_{\alpha_1} < \dots < i_{\alpha_k}} \{i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_k}\}$ ならば, I -型算術的アデリック群 $\mathbb{A}_{\text{ar};I}(\mathcal{F})$ を

$$\mathbb{A}_{\text{ar};I}(\mathcal{F}) := \bigcap_{i_{\alpha_1} < \dots < i_{\alpha_k}} \mathbb{A}_{\text{ar};i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_k}}(\mathcal{F})$$

とおく. また, $m \geq 0$ に対して m -算術的アデリック群を $\mathbb{A}_{\text{ar}}^m(X, \mathcal{F}) := \bigoplus_{I: |I|=m+1} \mathbb{A}_{\text{ar};I}(\mathcal{F})$ と定義する.

例 3.5. $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_Y)$ を計算してみる. まず $\mathbb{A}_{\text{fin},01}(\mathcal{O}_Y)$ だが, これは例 2.10 の $\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{O}_X(D))$ と全く同様の計算を行えば,

$$\mathbb{A}_{\text{fin},01}(\mathcal{O}_Y) = \left\{ (a_v) \in \prod_{v \in S_{\text{fin}}} F_v \mid \text{ほとんどすべての有限素点 } v \text{ に対して, } a_v \in \mathcal{O}_v \right\}$$

であることがわかる. 次に, $\mathbb{A}_{\infty,0}(\mathcal{O}_Y)$ を計算する. Y の生成点を η とする.

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{\infty,0}(\mathcal{O}_Y) &= \varprojlim_l (\mathcal{O}_{Y_F,\eta} / m_\eta^l \mathcal{O}_{Y_F,\eta} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \text{ (命題 3.2(ii) より)} \\ &= \varprojlim_l (F/\{0\}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ &= F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ &= \prod_{v \in S_\infty} F_v.\end{aligned}$$

したがって, $\mathbb{A}_{Y,01}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_Y)$ は

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{Y,01}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_Y) &= \mathbb{A}_{\text{fin},01}(\mathcal{O}_Y) \oplus \mathbb{A}_{\infty,0}(\mathcal{O}_Y) \\ &= \left\{ (a_v) \in \prod_{v \in S} F_v \mid \text{ほとんどすべての有限素点 } v \text{ に対して, } a_v \in \mathcal{O}_v \right\}\end{aligned}$$

と計算される. よって, $\mathbb{A}_{Y,01}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_Y)$ はよく知られた代数体 F のアデル環 $\mathbb{A}_F$ と一致することがわかる.

§ 3.3. 算術的コホモロジー群

この部分節で算術的多様体上のアデリックコホモロジー群を導入する.

定義 3.6 (Weng-Sugahara, [12]). $m \geq 0$ と局所自由層 $\mathcal{F}$ に対して, 境界写像 d^m を

$$d^m : \mathbb{A}_{\text{ar}}^m(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_{\text{ar}}^{m+1}(X, \mathcal{F}); (f_{p_0, \dots, p_m}) \mapsto (\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i f_{q_0, \dots, \check{q}_i, \dots, q_{m+1}})$$

とおく.

命題 3.7 (Weng-Sugahara, [12]). $\mathcal{F}$ を X 上の局所自由層とする. $(\mathbb{A}_{\text{ar}}^*(X, \mathcal{F}), d^*)$ はアーベル群の複体をなす.

この複体を算術的アデリック複体と呼ぶ. この複体を使って, 次の算術的コホモロジー群を定義する.

定義 3.8 (Weng-Sugahara, [12]). $\mathcal{F}$ を X 上の局所自由層とする. $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ に対し, i 次算術的コホモロジー群 $H_{\text{ar}}^i(X, \mathcal{F})$ を

$$H_{\text{ar}}^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\mathbb{A}_{\text{ar}}^*(X, \mathcal{F}))$$

とおく.

算術的コホモロジー群に対して以下の双対性の予想をしている.

予想 3.9 (Weng-Sugahara). $\mathcal{F}$ を算術的多様体 X 上の局所自由層とするとき, 任意の $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ に対し, 同型

$$H_{\text{ar}}^i(\widehat{X}, \mathcal{F}) \simeq H_{\text{ar}}^{n+1-i}(X, \omega_X \otimes \mathcal{F}^\vee)$$

が成り立つ. 但し, ω_X は X の双対化層, $\mathcal{F}^\vee$ は $\mathcal{F}$ の双対層である.

§ 4. 算術的曲線上の双対定理

この節ではアデール環 $\mathbb{A}_F$ に対する留数ペアリングの定義と留数ペアリングを使って導出される算術的コホモロジー群の双対定理を紹介する.

定義 4.1 (Tate, [13], Subsection 2.2). 留数写像 $\lambda_\infty, \lambda_p$ (p は素数) を

$$\begin{aligned} \lambda_\infty : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; x \mapsto -x \bmod 1, \\ \lambda_p : \mathbb{Q}_p &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; \sum_n a_n p^n \mapsto \sum_{n < 0} a_n p^n \bmod 1, \end{aligned}$$

と定義する.

上の留数写像を使った以下のような留数公式がある.

定理 4.2 (Tate, [13], Lemma 4.1.5). 任意の $x \in F$ に対し, 留数公式

$$\sum_{v \in S} \lambda_v(\text{Tr}_{F_v/\mathbb{Q}_v}(x)) = 0$$

が成り立つ.

アデール環 $\mathbb{A}_F$ に対するペアリングの定義について述べる.

定義 4.3 (Tate, [13], Subsection 4.1). アデール環 $\mathbb{A}_F$ に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{A}_F \times \mathbb{A}_F \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; ((x_v), (y_v)) \mapsto \sum_{v \in S} \lambda_v(\text{Tr}_{F_v/\mathbb{Q}_v}(x_v y_v))$$

と定義する.

このペアリングに関して次の結果が知られている.

定理 4.4 (Tate, [13], Theorem 4.1.1, Theorem 4.1.4). アデール環 $\mathbb{A}_F$ に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle$ について次の (i)-(iv) が成り立つ.

- (i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は非退化である.
- (ii) $\widehat{\mathbb{A}_F} = \mathbb{A}_F$ である. 但し, $\widehat{X}$ は X の Pontryagin 双対を表す.
- (iii) $F^\perp = F$ が成り立つ.
- (iv) (Weng, [15], 1.3) Y 上の因子 D に対し, $\mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{O}_Y(D))^\perp = \mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{O}_Y(K_F - D))$ が成り立つ.

ここで $L^\perp$ はこのペアリングに対する $L \subset \mathbb{A}_F$ の annihilator を表し, K_F は $\mathbb{Q}$ 上 F の codifferent に付随する因子を表す.

この結果から以下のような算術的コホモロジー群の双対関係が得られる.

定理 4.5 (Weng, [15], Proposition 3). Y 上の因子 D に対して, 位相群としての同型

$$H_{\text{ar}}^1(\widehat{F, \mathcal{O}_Y(D)}) \simeq H_{\text{ar}}^0(F, \mathcal{O}_Y(K_F - D))$$

が成り立つ.

局所自由層に対してもこの定理と同様のことが成り立つ ([15], Proposition 3).

§ 5. 算術的曲面上の算術的コホモロジー群に対する諸結果

この節では主に翁林先生との共同研究 [12] の中で得られた算術的コホモロジー群に対する諸結果について概説する. その他, 算術的アデール環上の位相構造や算術的アデール環の留数ペアリングについても触れる. 以下 X は正則な算術的曲面とする.

§ 5.1. 算術的コホモロジー群の帰納的構造

命題 5.1 (Weng-Sugahara, [12]). 因子 D に付随する可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ の算術的コホモロジー群は

$$\begin{aligned} H_{\text{ar}}^0(X, \mathcal{O}_X(D)) &= \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)), \\ H_{\text{ar}}^1(X, \mathcal{O}_X(D)) &\simeq ((\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))) / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))) + (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))) \\ &\simeq ((\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))) \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) + (\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)) \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) \\ &\simeq (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))) \cap \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}) + (\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)) \cap \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}), \\ H_{\text{ar}}^2(X, \mathcal{O}_X(D)) &= \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))), \end{aligned}$$

によって与えられる.

命題 5.1 は定義から直接計算することで示せる.

$\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)), \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)), \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D))$ は因子 D に依存しないアーベル群なので単に $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}, \mathbb{A}_{X,012}^{\text{ar}}$ と書く.

算術的曲面 X には次の 2 種類のタイプの既約曲線がある. 1 つは水平曲線, もう 1 つは垂直曲線と呼ばれるものである:

- (i) $H \subset X$ が水平曲線であるというのは, X_F のある閉点 P に対し, X の中で $H = \overline{\{P\}}$ であるときをいう ($H = E_P$ と書く).
- (ii) $V \subset X$ が垂直曲線であるというのは, Y 上のある閉点 v に対し, V が X の既約曲線かつ $\pi(V) = \{v\}$ であるときをいう.

算術的コホモロジー群に対して次の帰納的構造がある.

命題 5.2 (Weng-Sugahara, [12]). $V \subset X$ を垂直曲線とする. このとき以下のようなコホモロジー群の長完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{ar}}^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H_{\text{ar}}^0(X, \mathcal{O}_X(D+V)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_X(D+V)|_V) \\ \rightarrow H_{\text{ar}}^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H_{\text{ar}}^1(X, \mathcal{O}_X(D+V)) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_X(D+V)|_V) \\ \rightarrow H_{\text{ar}}^2(X, \mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H_{\text{ar}}^2(X, \mathcal{O}_X(D+V)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

がある.

命題 5.2 を証明するためには複体の列

$$0 \rightarrow \mathbb{A}_{\text{ar}}^*(\mathcal{O}_X(D)) \rightarrow \mathbb{A}_{\text{ar}}^*(\mathcal{O}_X(D+V)) \rightarrow \mathbb{A}_{\text{ar}}^*(\mathcal{O}_X(D+V)|_V) \rightarrow 0$$

が完全列であることを示せばよい. コホモロジー群の長完全列はこの複体の完全列から得られる.

注意. 水平曲線の場合, 垂直曲線に対して成り立っていた上のような長完全列は成り立たない. これは以下のことが理由にあると思われる. Arakelov 理論の中, 次のような関係式が存在する:

(i) ([4], V, § 3, Proof of Lemma 3.8) 任意の垂直曲線 V に対して,

$$\chi_{X/Y}(\mathcal{O}_X(D+V)) - \chi_{X/Y}(\mathcal{O}_X(D)) = \chi(\mathcal{O}_X(D+V)|_V)$$

が成り立つ.

(ii) ([4], V, § 3, Theorem 3.4) 任意の水平曲線 E_P に対して,

$$\chi_{X/Y}(\mathcal{O}_X(D+E_P)) - \chi_{X/Y}(\mathcal{O}_X(D)) = \chi_{E_P/Y}(\mathcal{O}_X(D+E_P)|_{E_P}) - \frac{1}{2}d_\lambda(E_P)$$

が成り立つ. 但し, $\lambda = \frac{1}{2}g$ を Green 関数 g から生じる Neron 関数とし, $d_\lambda(E_P)$ を logarithmic λ -discriminant, χ を Euler 標数とする (これらの定義を見るために, Neron 関数に対しては [4], p.3, Green 関数に対しては [4], p.21, logarithmic λ -discriminant に対しては [4], p.99, Euler 標数に対しては [4], p.112 を参照してほしい).

このように垂直曲線に対してはコホモロジー群を数えている Euler 標数のみを使った関係式があるが, 一方で水平曲線に対しては Euler 標数と合わせて logarithmic λ -discriminant が関係式の中に出てくる. このずれが水平曲線に対してコホモロジー群の長完全列が成り立たない要因になっていると考えられる.

§ 5.2. 算術的アデル環の位相

算術的アデル環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ への位相の入れ方について述べる (Weng-Sugahara, [12]).
まず有限アデル環 $\mathbb{A}_X^{\text{fin}}$ への位相の入れ方をみる.

$\mathbb{A}_X^{\text{fin}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ と書けるが, $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ は自然な局所コンパクト群としての位相が入ることに注意する. 実際, 命題 2.4 のアデリック群の構成に立ち返れば, アデリック群はアーベル群の逆極限や順極限を繰り返して構成されているので, $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ はある有限群 I たちを使って $\varinjlim \varprojlim I$ という形で書ける. この有限群に離散位相を入れ射影的位相, 帰納的位相をとることで $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ は局所コンパクト群となる. $\mathbb{A}_X^{\text{fin}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2)$ に位相を入れるにはさらに射影的位相, 帰納的位相をとればよい.

今度は ∞ -アデール環 $\mathbb{A}_X^\infty$ への位相の入れ方をみる.

$\mathbb{A}_X^\infty = \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} ((\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ と定義されていたが, 定義 3.1 の注意からわかるように $(\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間である. したがって, $\mathbb{R}$ は自然な局所コンパクト群の位相を持っているので, $\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ にも自然な局所コンパクト群の位相が入る. よって有限アデール環の場合と同様に $\mathbb{A}_X^\infty = \varinjlim_{C_1} \varprojlim_{C_2: C_2 \leq C_1} ((\mathbb{A}_{X_F,1}(C_1)/\mathbb{A}_{X_F,1}(C_2)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ に位相を入れるために射影的位相と帰納的位相をとってやればよい.

最後に $\mathbb{A}_X^{\text{ar}} = \mathbb{A}_X^{\text{fin}} \oplus \mathbb{A}_X^\infty$ に直積位相を入れることで $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ は位相群になる.

次に $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ の Pontryagin 双対 $\widehat{\mathbb{A}_X^{\text{ar}}}$ への位相の入れ方について述べる. $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ は上で位相群にしたので Pontryagin 双対が取れることに注意する.

$\widehat{\mathbb{A}_X^{\text{fin}}}$ への位相の入れ方を考えてみる. 簡単のため, $\mathbb{A}_{X,12}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}(D_2) = A_{D_1/D_2}$ とおく. 因子 D_1 を固定する. 次の写像

$$f: \varinjlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}} \rightarrow (\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}); [\chi_{D_2}] \mapsto \chi,$$

は群同型である. 但し, $\chi: \varinjlim_{D_2: D_2 \leq D_1} A_{D_1/D_2} \rightarrow S^1; (a_{D_2}) \mapsto \chi_{D_2}(a_{D_2})$ である. χ の値は D_2 の選

び方によらないことに注意する. $\widehat{A_{D_1/D_2}}$ は A_{D_1/D_2} が局所コンパクト群であったことから自然な局所コンパクト群位相が入る. よって $\varinjlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}$ は帰納的位相をとることで位相

群となる. したがって, $(\varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}})$ にもこの同型 f を通して位相を入れることで位相群にする.

次の写像

$$g: \varprojlim_{D_1} (\varinjlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}) \rightarrow \widehat{\mathbb{A}_X^{\text{fin}}} = (\varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}}); (\varphi_D) \mapsto \varphi,$$

は群同型になる. 但し, $\varphi: \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} A_{D_1/D_2} \rightarrow S^1; [a_{D_1}] \mapsto \varphi_{D_1}(a_{D_1})$ である. φ の値

は D_1 の選び方によらないことに注意する. 先ほど, $(\varinjlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}})$ に位相を入れたので

$\varprojlim_{D_1} (\varinjlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \widehat{A_{D_1/D_2}})$ には射影的位相を入れることで位相群にする. これにより同型写像 g

を通して $\widehat{A_X^{\text{fin}}}$ に位相を入れることができる.

$\widehat{A_X^\infty}$ にも同様の議論で位相を入れることができる.

したがって $\widehat{A_X^{\text{ar}}} = \widehat{A_X^{\text{fin}}} \oplus \widehat{A_X^\infty}$ に直積位相を入れることで $\widehat{A_X^{\text{ar}}}$ は位相群になる. この位相は Pontryagin 双対群に通常入る位相と一致する.

$\widehat{A_X^{\text{ar}}}$ にも同様の議論を繰り返して位相群にすることができる. そのとき, 局所コンパクト群 V が $\widehat{V}$ と位相群として同型であることに注意すれば, $\widehat{A_X^{\text{ar}}}$ が A_X^{ar} と位相群として同型であることも示せる.

§ 5.3. 留数写像と留数ペアリング

この部分節では 2 次元局所体に対する留数写像や算術的アデール環 A_X^{ar} の留数ペアリングの定義について述べる.

算術的アデール環の留数ペアリングを定義するには以下のことに注目すればよい.

注意. 包含 $A_X^{\text{fin}} \subset \prod_{\{P_0, P_1, P_2\} \in S(X)^{\text{red}}} A(\{P_0, P_1, P_2\}, O_X)$ が成り立ち, $A(\{P_0, P_1, P_2\}, O_X)$ は

2 次元局所体の有限個の直和となることが知られている ([1], 2; [10], Proposition 1). よって A_X^{fin} は 2 次元局所体の直積の中の部分群となる.

同様に, 包含 $A_X^\infty \subset \prod_{P \in X_K: \text{closed}} A(\{P\}, O_{X_F}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ が成り立ち, $A(\{P\}, O_{X_F}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}((t))$ または $\mathbb{C}((t))$ という形の体の有限個の直和である. したがって, A_X^∞ は $\mathbb{R}((t))$ または $\mathbb{C}((t))$ という形の体の直積の部分群となる.

この注意によって, 算術的アデール環 A_X^{ar} に対する留数ペアリングを定義するためには, 局所的に 2 次元局所体や $\mathbb{R}((t))$ または $\mathbb{C}((t))$ という形の体の留数写像を定義すればよいということがわかる.

$\mathbb{R}((t))$ または $\mathbb{C}((t))$ という形の体の留数写像は通常のローラン級数体の留数写像のように $\text{res}_{K((t))} : K((t)) \rightarrow K; \sum_n a_n t^n \mapsto a_{-1}$ (K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である) と定義すればよい.

記号. (A, m_A) をネーター局所環, N を A -加群とする. そのとき, N の極大 Hausdorff 商 N^{sep} を

$$N^{\text{sep}} := N / \bigcap_{n \geq 1} m_A^n N$$

と定義する ([5], Subsection 2.1).

F を完備離散付値体, O_F をその付値環, K を $K = \text{Frac}(O_F \cap K)$ となるような F の部分体とする. そのとき微分加群 $\Omega_{O_F/K \cap O_F}$ に対して, 連続微分加群 $\Omega_{F/K}^{\text{cts}}$ は

$$\Omega_{F/K}^{\text{cts}} := \Omega_{O_F/K \cap O_F}^{\text{sep}} \otimes_{O_F} F$$

と定義される ([5], Definition 2.5).

2 次元局所体の留数写像については以下のような Morrow の定義がある. まず, 等標数の場合の結果は以下の通りである.

定義 5.3 (Morrow, [5], Subsection 2.2). N を等標数 0 の 2 次元局所体とする. N が局所体 L を含んでいると仮定する. そのとき, (1)-(4) が成り立つ.

- (1) N は L を含む一意的な係数体 k_N を持つ,
- (2) k_N/L は有限次拡大である,
- (3) k_N は N の中 L の代数的閉包である,
- (4) $N \simeq k_N((t))$ となるような uniformizer $t \in N$ が存在する.

L に関する N の留数写像を

$$\text{res}_N : \Omega_{N/L}^{\text{cts}} = Ndt \rightarrow k_N, \left(\sum_n a_n t^n \right) dt \mapsto a_{-1}$$

と定義する.

混標数の場合の結果は以下の通りである.

定義 5.4 (Morrow, [5], Subsection 2.3). N を標数 p の剰余体を持ち, 局所体 L を含む混標数の 2 次元局所体とする. そのとき, (1)-(3) が成り立つ.

- (1) $N \supset \mathbb{Q}_p$ である.
- (2) k_N を N の中の $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包とすると, それは N の係数体となる.
- (3) 条件 (i)-(iv) を満たすような 2 次元局所体 $M \subset N$ が存在する:
 - (i) N/M は有限次拡大である.
 - (ii) $\overline{M} = \overline{N}$ である. 但し, $\overline{M}, \overline{N}$ はそれぞれ M, N の剰余体を表す.
 - (iii) $k_M = k_N$ である.
 - (iv) M は $k_M\{\{t\}\}$ と k_M -同型である, 但し,

$$k_M\{\{t\}\} := \{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n \mid a_n \in k_M; \inf_i v_{k_M}(a_i) > -\infty; n \rightarrow -\infty \text{ として, } a_n \rightarrow 0 \text{ となる} \}$$

である.

L に関する N の留数写像を

$$\begin{aligned} \text{res}_N : \Omega_{N/L}^{\text{cts}} &= \Omega_{M/L}^{\text{cts}} \otimes_M N \xrightarrow{\text{Tr}_{N/M}} \Omega_{M/L}^{\text{cts}} \xrightarrow{\text{res}_M} k_M = k_N, \\ \text{res}_M : \Omega_{M/L}^{\text{cts}} &= Mdt \rightarrow k_M, \left(\sum_n a_n t^n \right) dt \mapsto -a_{-1}, \end{aligned}$$

と定義する.

記号. $\text{Res}_N := \lambda_v \circ \text{Tr}_{k_N/\mathbb{Q}_v} \circ \text{res}_N$ と定義する.

本部分節のはじめの注意で触れたように $\mathbb{A}(\{P_0, P_1, P_2\}, \mathcal{O}_X)$ は 2 次元局所体の有限個の直和 $\bigoplus_N N$ で書けるので $\text{Res}_{C,x} := \sum_N \text{Res}_N$ とおく. 但し, $C = \overline{\{P_1\}}$, $x = P_2$ とする. また $\mathbb{A}(\{P\}, \mathcal{O}_{X_F}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は $L = \mathbb{R}((t))$ または $L = \mathbb{C}((t))$ という形の体の有限個の直和 $\bigoplus_L L$ で書けるので $\text{Res}_P := \sum_L \text{Res}_L$ とおく.

留数写像を使った Morrow による次の留数公式の結果がある.

定理 5.5 ([5]; [6]). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) ([5], Theorem 4.1) 固定した閉点 $x \in X$ に対して,

$$\sum_{C:x \in C} \text{Res}_{C,x}(\omega) = 0$$

が成り立つ.

(ii) ([6], Theorem 5.4) 固定した水平曲線 $E_P \subset X$ に対して,

$$\sum_{x:x \in E_P} \text{Res}_{E_P,x}(\omega) + \sum_P \text{Res}_P(\omega) = 0$$

が成り立つ.

(iii) ([6], Theorem 5.4) 固定した垂直曲線 $V \subset X$ に対して,

$$\sum_{x:x \in V} \text{Res}_{V,x}(\omega) = 0$$

が成り立つ.

留数写像を使った算術的アデル環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対するペアリングの定義について述べる.

定義 5.6 (Weng-Sugahara, [12]). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. 算術的アデル環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ を

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \mathbb{A}_X^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_X^{\text{ar}} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}; \quad ((f_{C,x}) \times (f_P)), (g_{C,x}) \times (g_P)) \\ &\mapsto \sum_{(C,x)} \text{Res}_{C,x}(f_{C,x}g_{C,x}\omega) + \sum_P \text{Res}_P(f_Pg_P\omega) \end{aligned}$$

と定義する.

§ 5.4. 主結果

この部分節で翁林先生との共同研究の結果得られた [12] の主結果について述べる. 定理 5.7 は算術的コホモロジー群の双対性を示すために用意された.

定理 5.7 (Weng-Sugahara, [12]). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. 算術的アデル環 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対するペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ について, 次の (i)-(iv) が成り立つ.

- (i) ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ は非退化である.
- (ii) X 上の因子 D に対して, $(\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp = \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$ が成り立つ.
- (iii) $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp = \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ が成り立つ.
- (iv) $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^\perp = \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ が成り立つ.

以下定理 5.7 の証明を概略する.

- (i) これは局所留数ペアリング $F \times F \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の非退化性から従う. 但し, F は 2 次元局所体もしくは $\mathbb{R}((t))$, $\mathbb{C}((t))$ である.
- (ii) $\tilde{\pi} : X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_F \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ とおく. $\tilde{\pi}$ の双対化層 $\omega_{\tilde{\pi}}$ は開集合 $U \subset X$ に対し,

$$\omega_{\tilde{\pi}}(U) = \{\omega \in \Omega_{k(X)/\mathbb{Q}} \mid \text{任意の } x \in C(\subset U) \text{ と } f \in \mathcal{O}_{X,C} \text{ に対して, } \text{Res}_{C,x}(f\omega) = 0\}$$

によって与えられる ([5], Theorem 5.7). これを使って, 我々は固定した (C_0, x_0) に対し, 次の (1) と (2) が同値であることを示すことができる.

- (1) 任意の $f \in \mathcal{O}_{X,C_0}$ に対して, $\text{Res}_{C_0,x_0}(f\omega) = 0$ である.
- (2) $\text{ord}_{C_0}((\omega)) \geq 0$.

また固定した P_0 に対し, 次の (3) と (4) は同値である.

- (3) 任意の $f \in \mathcal{O}_{X_F,P_0}$ に対して, $\text{Res}_{P_0}(f\omega) = 0$ である.
- (4) $\text{ord}_{P_0}((\omega)) \geq 0$.

$(\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X(D)))^\perp = \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(\mathcal{O}_X((\omega) - D))$ は (1)-(4) を使って示すことができる.

- (iii) $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp$ であることは Morrow の留数公式を使って示せる. 実際, $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} = \mathbb{A}_{X,02} \oplus k(X_F) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ なので, $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ の元は X の既約曲線 C や X_F の閉点 P に依存しないことがわかる. よって, $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ の元 $f = (f_{C,x}) \times (f_P)$ の各成分は $f_{C,x} = f_x, f_P = f_\infty$ と C や P に依存しない形で書き直してよい. $f, g \in \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ とする. $\langle f, g \rangle_\omega = \sum_x \sum_{C:x \in C} \text{Res}_{C,x}(f_x g_x \omega) + \sum_P \text{Res}_P(f_\infty g_\infty \omega) = 0$ であることを示す必要がある. 任意の x に対して, $\sum_{C:x \in C} \text{Res}_{C,x}(f_x g_x \omega) = 0$ であることを示すには定理 5.5 の (i) を使えばよい. 一方 $\sum_P \text{Res}_P(f_\infty g_\infty \omega) = 0$ であることを示すには曲線 X_F/F に対する標準的な留数公式を使えばよい. したがって $\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp$ であることがわかる. 他方, $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp \subset \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ であることを示すために, [9], §2, Proposition 1 の証明と同様の議論を行う. 我々は中国剰余定理を使って $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^\perp$ の元が X の既約曲線 C に依存しないことを示せる. 実際, X の閉点 x に付随する局所環 $\mathcal{O}_x$ と超平面 H に対し $V = \text{Spec } \mathcal{O}_x \setminus H = \text{Spec } A$

とおくと, V 上の相異なる任意の曲線 $C_1, \dots, C_n$, V 上の任意の有理関数 $f_1, \dots, f_n$, そして台が $\{C_1, \dots, C_n\}$ の部分集合となる任意の因子 D に対して,

$$\begin{cases} \text{ord}_{C_i}(f_i - g) \geq \text{ord}_{C_i}(D) (i = 1, \dots, n) \\ \text{ord}_C(g) \geq \text{ord}_C(D) (C \neq C_1, \dots, C_n) \end{cases}$$

となるような有理関数 g が存在することを中国剰余定理を使って示すことができる (V がアフィンであることに注意). $(\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}}$ はこの近似定理から従う.

(iv) $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \subset (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp}$ であることを証明するために定理 5.5 の (ii), (iii) を使う. この際 定義 3.3 の $f_{E_{P_0}, \dots, E_{P_n}} = f_{P_0, \dots, P_n}$ という条件が決定的な役割を果たすことに注意する.

$(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ であることは次の事実を使う. X 上の任意の既約曲線 C に対して, 完全ペアリング $\mathbb{A}_{C,01}^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_{C,01}^{\text{ar}} \rightarrow S^1$ で $\mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}} \times \mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}}$ が消えているならば, $(\mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}})^{\perp} = \mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}}$ である. この事実を使うことで, $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ を示せる.

つまり, $\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)/\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D-C) \simeq \mathbb{A}_{C,01}^{\text{ar}}$ であることと $\mathbb{A}_X^{\text{ar}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D_1)/\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D_2)$

$= \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}((\omega) - D_2)/\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}((\omega) - D_1)$ と書けることを使って, 議論を完全ペア

リング $\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D)/\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(D-C) \times \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}((\omega) - D + C)/\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}((\omega) - D) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対する $\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D)/\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D-C) \simeq \mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}}$ の annihilator が $\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(O_X((\omega) - D + C)/\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(O_X((\omega) - D))) \simeq \mathbb{A}_{C,0}^{\text{ar}}$ であることを示す問題に帰着させる. 最後に $\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D_1)/\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}(D_2) =$

$\varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2: D_2 \leq D_1} \mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}((\omega) - D_2)/\mathbb{A}_{X,1}^{\text{ar}}((\omega) - D_1)$ と書けることに注意することで $(\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp} \subset \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}}$ であることを得る.

最後に, 算術的コホモロジー群の位相的双対性に対する結果を述べる.

定理 5.8 (Weng-Sugahara, [12]). 零でない $\omega \in \Omega_{k(X)/F}$ をとる. 任意の $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して, 位相群としての同型

$$H_{\text{ar}}^i(\widehat{X}, \widehat{O_X(D)}) \simeq H_{\text{ar}}^{2-i}(O_X((\omega) - D))$$

がある.

定理 5.8 は定理 5.7 の結果を使って比較的容易に証明できる. 定理の証明のために閉部分群 $W \subset V \subset \mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対して, $\widehat{V/W} \simeq W^{\perp}/V^{\perp}$ であることを使う. 例えば, $H_{\text{ar}}^0(\widehat{X}, \widehat{O_X(D)}) \simeq H_{\text{ar}}^2(O_X((\omega) - D))$ は次のように示せる.

$$\begin{aligned} H_{\text{ar}}^0(\widehat{X}, \widehat{O_X(D)}) &= (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \widehat{\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(O_X(D))}) \\ &\simeq \mathbb{A}_X^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} \cap \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(O_X(D)))^{\perp} \\ &= \mathbb{A}_X^{\text{ar}} / (\mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}})^{\perp} + (\mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}})^{\perp} + (\mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(O_X(D)))^{\perp} \\ &= \mathbb{A}_X^{\text{ar}} / \mathbb{A}_{X,01}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,02}^{\text{ar}} + \mathbb{A}_{X,12}^{\text{ar}}(O_X((\omega) - D)) \\ &= H_{\text{ar}}^2(X, O_X((\omega) - D)). \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ に対しても同様の議論を行うことで定理を示すことができる.

注意. 定理 5.8 の証明を正当化するためには写像 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}_X^{\text{ar}}}; f \mapsto \langle f, \cdot \rangle_\omega$ が同型であることが必要とされる. ここで, この写像が well-defined であることをいうために, $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ は位相環にはならないが, 固定した $f \in \mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ に対して f 倍写像 $\mathbb{A}_X^{\text{ar}} \rightarrow \mathbb{A}_X^{\text{ar}}; g \mapsto fg$ が連続写像であることに注意しておく.

References

- [1] A. A. Beilinson, Residues and Adeles, *Funct. Anal. Pril.*, **14**, no. 1 (1980), 44-45; English transl. in *Func. Anal. Appl.*, **14**(1980), 34-35.
- [2] G. van der Geer and R. Schoof, Brown, effectivity of Arakelov divisors and the theta divisor of a number field. *Selecta Math. (N.S.)* **6**(2000), no. 4, 377-398.
- [3] A. Huber, On the Parshin-Beilinson Adeles for Schemes. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61**(1991), 249-273.
- [4] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory*, 1988, Springer Verlag.
- [5] M. Morrow, An explicit approach to residues on and dualizing sheaves of arithmetic surfaces. *New York J. Math.*, **16** (2010), 575-627.
- [6] M. Morrow, Grothendieck's trace map for arithmetic surfaces via residues and higher adeles, arXiv:1101.1883.
- [7] D. V. Osipov, Adeles on n -dimensional schemes and categories C_n . *Inter J of Math.*, Vol. 18, No. 3 (2007), 269-279.
- [8] D. V. Osipov and A. N. Parshin, Harmonic analysis on local fields and adelic spaces. II. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, **75** (2011), no. 4, 91-164.
- [9] A. N. Parshin, On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and residues. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **40** (1976), no. 4, 736-773.
- [10] A. N. Parshin, Chern classes, adeles and L -functions. *J. Reine Angew. Math.* **341**(1983), 174-192.
- [11] J. P. Serre, Algebraic groups and class fields, GTM 117, 1988, Springer-Verlag.
- [12] K. Sugahara and L. Weng, Arithmetic Cohomology Groups, preprint, 2014 (submitted) available at <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/AriCohRes.pdf>
- [13] J. Tate, Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions. 1967 Algebraic Number Theory (*Proc. Instructional Conf.*, Brighton, 1965) pp. 305-347 Thompson, Washington, D.C.
- [14] A. Weil, Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **179**(1938), 129-133.
- [15] L. Weng, Geometry of numbers, arXiv:1102.1302.
- [16] A. Yekutieli, *An Explicit Construction of the Grothendieck Residue Complex*, With an appendix by Pramathanath Sastry. *Asterisque* No. 208 (1992)