

S^1 作用をもつ単連結 4 次元 多様体

岡山大. 理 吉田 朋好

S^1 を絶対値 1 の複素数のなす乗法群とする。
 S^1 の 4 次元 C^∞ 閉多様体の上の C^∞ 作用を考える。

定理

M^4 を 4 次元 C^∞ 閉多様体とする。 M^4 の上に自
明でなく S^1 の C^∞ 作用がある。 M^4 は連結和

$$\Sigma^4 \# kCP^2 \# l(-CP^2) \# m(S^2 \times S^2)$$

(k, l, m : 整数)

に微分同相である。 ここで Σ^4 はホストの 4 球面
、 CP^2 は複素射影平面 (自然な向きをもつ) 、
 $-CP^2$ は逆に向きつけられた CP^2 、 S^2 は 2 次元球
面をあらわす。 3 次元又は 4 次元ホッジ予想
が正しいことは、 $\Sigma^4 = S^4$ ととれる。

とくに上の定理で M^4 を $Spin$ -多様体と仮定す

これは M^4 は連結和 $\Sigma^4 \# m(S^2 \times S^2)$ に微分同相である。故に

系 4次元 C^∞ 閉 Spin 多様体 M^4 が自明でない S^1 作用をもつならば、それは $\Sigma^4 \# m(S^2 \times S^2)$ に微分同相で $\text{index} = 0$ である。

例. CP^3 の中の hypersurface $\{z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^d \neq 0\}$ には $d: \text{even} \geq 4$ のとき自明でない $C^\infty S^1$ 作用をもたない。

定理の証明

M^4 を orbit space M/S^1 とし、 $\pi: M \rightarrow M^4$ を自然な射影とする。微分可能 slice 定理より、 $\mathbb{R}^3$ 上の有限巡回群の線形表現をみることにより M^4 は 3次元位相多様体になる。 F を固定点集合とすれば、 F の各連結成分は余次元が偶数の C^∞ 閉多様体となるから、それは離散点と 2次元 orientable 曲面となる。

π は基本群の全射をもたらし M が単連結だから M^4 は単連結となる。さらに $\partial M^4 (= M^4$ の境界) の各連結成分は、 F の 2次元連結成分と 1対1に対応する。従って Poincaré duality

と M^4 の単連結性から、 F の 2次元連結成分はすべて単連結。ゆえに S^2 となる。従って F はいくつかの離散点といくつかの S^2 の disjoint union となる。

$m \geq 2$ を 2以上の整数とし、 $Z_m \subset S^1$ を位数 m の有限巡回群とする。 $F(m)$ で M の Z_m による固定点集合をあらわす。すると $F(m) = \{x \in M \mid G_x \supset Z_m\}$, (G_x は x の isotropy 群)。 $F \subset F(m)$ であり、 $F(m)$ の F は含まない連結成分は、2次元 orientable 閉曲面で自明でない S^1 作用をもつ。故にそれは S^2 の、 T^2 (2次元トーラス) となるが、 T^2 の場合は γ の上に S^1 の固定点がないことから、もし $T^2 \subset F(m)$ ならば、基本類 $[T^2]$ は $H_2(M; \mathbb{Z})$ の trivial である。torsion element をあらわすことになる。よって M^4 の単連結性から $H_2(M; \mathbb{Z})$ は torsion をもたず、これは不可能である。故に $F(m)$ はやはり、離散点と S^2 の disjoint union となる。

2次元球面 $S_1 = S^2 \subset \overline{F(m) - F}$ をとれば、 S_1 の上には S^1 は 2つの固定点をもつから、それを p_1, p_2 とあらわし、 p_1, S_1, p_2 とおくことになる。もし $S_2 = S^2 \subset \overline{F(m) - F}$

が、あって、 S_2 の固定点 p_2 と p_3 とはつながる。これを p_1, S_1, p_2, S_2, p_3 とあらわすことにする。ここで $p_1 = p_3$ とする場合もある。こうして、列 $p_1, S_1, p_2, S_2, \dots, p_{k-1}, S_{k-1}, p_k$ ($p_i \neq p_j$ $1 \leq i \leq k-1$) を得る (ただし各 S_i について $S_i \subset \overline{F(m_i) - F}$ $m_i \geq 2$ とする)。このとき $p_1 = p_k$ ならば、これを cycle とよびことにする。
 $p_1 \neq p_k$ で列 $p_1, S_1, p_2, S_2, \dots, p_{k-1}, S_{k-1}, p_k$ の極大のとき、 p_1 と p_k を invariant の semi-free S^1 作用をもつ 2次元球面 S^2 で結んで、これを S_k とおけば、 $p_1, S_1, p_2, S_2, \dots, p_k, S_{k+1}, p_1$ は cycle となる。

補題

$p_1, S_1, p_2, S_2, \dots, p_{k-1}, S_{k-1}, p_k, S_k, p_1$ は cycle とし、多(くとも)一つの S_i を除いて各 $S_j \subset \overline{F(m_j) - F}$ ($m_j \geq 2$) とする。もし、 $k \geq 3$ ならば、ある S_ℓ ($1 \leq \ell \leq k$) は自己交点数 $= \pm 1$ 或 0 である。

証明 略

ここで S_ℓ の自己交点数を ± 1 とおければ、 S_ℓ の invariant 法バンドル ν_ℓ は S^2 上の Hopf 8バンドル又はその共役バンドルに同値である。 $D(\nu_\ell)$, $S(\nu_\ell)$ は ν_ℓ の球体バンドル、球面バンドルとする。 $S(\nu_\ell)$ は 3次元球面 S^3 に微分同相である。

S^3 の上の C^∞ S^1 作用は 3 次元線形作用に同値であるから ([1]), $S(U_2)$ の作用は 4 次元球体 D^4 の上に線形に拡張でき、これは D^4 の中心を固定点にもつ。そこで 2 つの多様体、

M', K を $M' = \overline{M - D(U_2)} \cup D^4$, $K = D(U_2) \cup D^4$ (同変微分同相ではりあわせられている) とおく。 M は M' と K の同変連結和 $M' \# K$ と同変微分同相になる。 K は S_2 の自己交点数が $+1$ また -1 になる CP^2 また $-CP^2$ に微分同相だから $M \approx M' \# (\pm CP^2)$ となり、 M' は M より 離散固定点の個数が一つだけ少ない。

次に S_2 の自己交点数 $= 0$ とする。 $k \geq 3$ ならば S_{2k-1} (または S_{2k}) をとるとともに $S_{2k-1} \cap S_{2k} = P_{2k}$ で S_{2k-1} と S_{2k} は P_{2k} で横断的に交わる。 S_{2k-1}, S_{2k} の球体バンドルを $D(U_{2k-1}), D(U_{2k})$ とし、 $D(U_{2k-1}) \cup D(U_{2k})$ を考えると、 S_{2k} の自己交点数 $= 0$ なら $\partial(D(U_{2k-1}) \cup D(U_{2k}))$ は 3 次元球面 S^3 に微分同相である。そこで上と同じ操作により $M' \# = \overline{M - D(U_{2k-1}) \cup D(U_{2k})} \cup D^4$, $K = (D(U_{2k-1}) \cup D(U_{2k})) \cup D^4$ をつくれば、 M は同変連結和 $M' \# K$ と同変微分同相である。 K は

S^2 の自己交点数が偶数か奇数かに応じて $S^2 \times S^2$ か $CP^2 \# (-CP^2)$ に微分同相であるから、このとき $M \simeq M' \# (S^2 \times S^2)$ 或 $M' \# (CP^2 \# -CP^2)$ となる。 M' の離散固定点の数は M の離散固定点の数より 2 つ少くない。

以上のようにより $k \geq 3$ の cycle が M の中にあれば $\pm CP^2$ または $S^2 \times S^2$, $CP^2 \# -CP^2$ を出さすことができるから、この操作を繰り返すことにより M' の中には $k \geq 3$ の cycle が存在しなくなるまで reduce することができ、

補題

M' の中には $k \geq 3$ の cycle が存在しないとする。このとき M' は semi-free S^1 作用をもつ。

証明 略

上の補題により semi-free S^1 作用をもつ M' を考えればよい。

補題

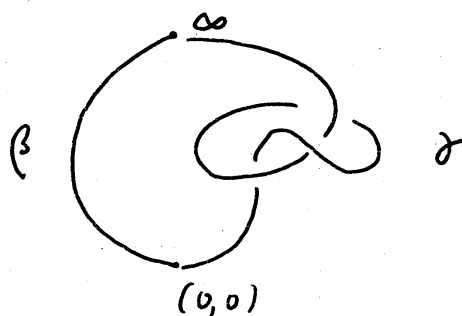
M' は semi-free S^1 作用をもつとする。このとき、固定点集合下の連結成分の個数が ≥ 2 ならば、 M' の中には invariant 2次元球面 S^2 で、その自己交点数が ± 1 或 0 であるものが存在する。

証明 略

この補題により, 先にしたのと同じ操作を続けるとして, M' を $M'' \# k\mathbb{C}P^2 \# l(-\mathbb{C}P^2) \# m(S^2 \times S^2)$ の形に reduce できる. したがって M' は S^1 -多様体で, その固定点集合は 2 個の離散点からなるか, 又は一つの S^2 からなる. したがって M' は単純連結 4 次元多様体で $\chi(M') = 2$ だからホーミトピー球面である.

S^4 の上の exotic S^1 action の構成

$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ を 2 次元複素ベクトル空間とし, one-compactification $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^c$ を S^4 とみなす. $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の上は S^1 -作用を $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda y)$, $(x, y) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\lambda \in S^1$ と与え, これを $S^4 = (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^c$ に拡張する. この作用の orbit space は 3 次元球面 S^3 である. $\pi: S^4 \rightarrow S^3$ を orbit map とする. $(0, 0)$ と ∞ は固定点集合であり, $\beta = \pi((\mathbb{C} \oplus 0)^c)$ は $F(2)$ の orbit であり, $(0, 0)$ と ∞ を結ぶ arc である. S^3 の中には $(0, 0)$ と ∞ を結ぶ arc γ を次のようにとる.



ただし γ は $\pi^{-1}(\gamma)$ の smooth に embed された
 2次元球面 で $F(2) = \pi^{-1}(\beta)$ と $(0,0), \infty$ で横断的
 に交わっているようにえらぶ。2次元球面 $\pi^{-1}(\gamma)$
 の法バンドルは自明でこれを ν とおく。 $D(\nu)$ を
 ν の球体バンドルとする。 $D(\nu) \approx S^2 \times D^2$ である。
 $D(\nu)$ 上の S^1 作用は、 $S^2 \times D^2$ 上の $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha^2 v)$
 $\alpha \in S^1, (u, v) \in S^2 \times D^2$ で定義される S^1 作用と
 同一視できる。 $(S^2 \times D^2)'$ と $\alpha(u, v) = (\alpha^5 u, \alpha^2 v)$
 $\alpha \in S^1, (u, v) \in S^2 \times D^2$ で S^1 作用を与えた $S^2 \times D^2$
 とする。このとき同変微分同相 $f: 2(S^2 \times D^2)' \rightarrow$
 $2(S^2 \times D^2)$ で恒等写像に isotopic なものがあると
 する。よって $M = (S^* - D^2(\nu)) \cup_f (S^2 \times D^2)'$ とおけ
 る。 M は S^* に微分同相な S^1 多様体となる。
 この S^1 作用は線形作用に同値でなく、 $F(2),$
 $F(5)$ は各々 S^* の knotted 2-sphere となる。

[1] P. Oslak , F. Raymond : Actions of $SO(2)$
on 3-Manifolds , Proc. of the
Conference on Transformation Groups,
Springer 1967.

[2] T. Yoshida : Simply connected smooth
4-manifolds which admit non-trivial
circle actions.