

On symplectic Euler factors of genus two

九大 教養部 伊吹山 知義

$SL_2(\mathbb{R})$ と $SU(2)$ の保型形式の間の Hecke algebra modules としての同型写像が Eichler [1] 以来研究されてきた。

(Shimizu [13], Jacquet-Langlands [10], Hijikata, Saito 等) 現在では, これらは $GL_2(\mathbb{Q}_A)$ と $D_A^\times$ (D は $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環, 添字 A はアデール化をあらわす。) の保型表現の間の対応という形で述べられている。さて, この問題の拡張として,

$Sp(2, \mathbb{R})$ (行列の size 4) の通常の (よくわかる離散群に関する) Siegel cusp forms と $Sp(2) = \{g \in M_2(\mathbb{H}) : g^t \bar{g} = I_2\}$ ($\mathbb{H}$: Hamilton quaternions) の保型形式 (つまり適当な球函数) の間の簡潔な同型を捜すことを目標にしたい。なおこの問題は Ihara [9] により, 1964 年頃提出された。より一般的には, Langlands により, 後に, L -groups に関する functoriality という形で問題が提出されている。(cf. [12]) さて, Ihara [9] では, もし同型があれば weight (定義は後述) が

$k = \nu + 3$ の関係にあるべきことが主張され、また、 $Sp(2)$ への $\Gamma_0(d)$ からの lift も与えられている。しかし、 L 函数の一致しそうな保型形式 (ないしは離散群) の候補については何も知られていなかった。ここでは、両者の L 函数の Euler 3-factors の一致する実例を述べ、また、離散群をはきり指差して、同型対応の予想を述べる。(なお以上の歴史のより詳しい解説は [5] を参照されたい) さて、おおざっぱに言、て、古典的に綺麗な対応は、両方の群の ($\mathbb{Q}$ -form) Q 、local completion が minimal parahoric subgroups になるような離散群に関する保型形式間で得られるであろうというのが予想の主旨である。実際、 $\mathbb{Q}_p$ 上の reductive algebraic group では、minimal parahoric は其役を除いて一つしかないものであるから、審美的観点から言えば望ましい姿であるし、また、次元公式 ([3], [4]) もこの予想を支持しているように思われる。(実際には explicit な次元公式は、未計算な群が少し残、っているが、Hashimoto [3] によって、解析的困難はすべて解決されている。詳しくは、この報告集の橋本氏自身の記事を参照されたい。また、次元の main term (最高次の項) は、群の index で書けるのが自明であり、これの「一致」が例を計算しはじめた動機であった。) なお minimal でない parahoric についても非常に、ともらしい予想が

ある。

§1. Parahoric subgroups と new forms

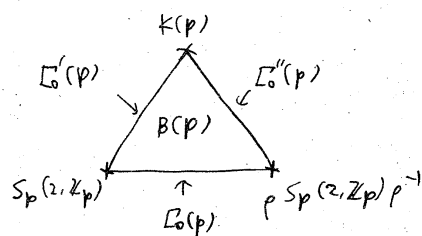
New form の概念を正確に定義するために, parahoric subgroups について簡単に復習する。

1) $S_p(2, \mathbb{R})$ の場合

$S_p(2, \mathbb{Q}_p)$ の部分群 $B(p)$ を次で定義する。

$$B(p) = \left\{ g \in S_p(2, \mathbb{Z}_p) ; g \equiv \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \pmod{p} \right\}$$

$B(p)$ は $S_p(2, \mathbb{Q}_p)$ の Iwahori subgroup (minimal parahoric) であり, $B(p)$ を含む parahoric subgroups は, $B(p)$ を入れて 7 つあり, 次の絵で与えられる。



$$\text{但し } p = \begin{pmatrix} & 1 \\ p & \end{pmatrix}$$

各頂点は maximal compact を表わし, 2 つの頂点に対応する群の共通部分は, その辺に対応する群 であり, より詳しくは,

$$S_1 = B(p) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B(p), \quad S_2 = B(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B(p), \quad S_0 = B(p) \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B(p)$$

とおくとき $\Gamma_0(p) = B(p) \cup S_1$, $\Gamma_0'(p) = B(p) \cup S_2$, $\Gamma_0''(p) = B(p) \cup S_0$.

$K(p) = B(p) \cup S_0 \cup S_2 \cup S_0 S_2$ と書ける。これらは勿論皆より具体的に書ける。たとえば、

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}_p) ; C \equiv 0 \pmod{p} \right\},$$

$$K(p) = \left\{ g \in Sp(2, \mathbb{Q}_p) ; g = \begin{pmatrix} * & * & p^{-1} * & * \\ p * & * & * & * \\ p * & p * & * & p * \\ p * & * & * & * \end{pmatrix}, * \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

である。ちなみに、 $p^{-1} \Gamma_0'(p) p = \Gamma_0''(p)$ であり、また、 $K(p)$ は $Sp(2, \mathbb{Z}_p)$ とは等しくない。

さて、 P を上のような parahoric とする時、以下では、

$Sp(2, \mathbb{Q}_A)$ 内で $Sp(2, \mathbb{R}) \cdot \prod_{i \neq p} Sp(2, \mathbb{Z}_i) \cdot P$ を考え、これと

$Sp(2, \mathbb{Q})$ との共通部分もまた P と書くことにする。(S_i も

$B(p)$ を global にとり、global な double coset と思うことにす

る。) $A_{\mathbb{R}}(P)$, $S_{\mathbb{R}}(P)$ でそれぞれ、genus 2 の Siegel 上半空間

の P に関する weight k の正則保型形式及び尖点形式の空間を

あらわす。さて、New form の空間 $S_{\mathbb{R}}^{\circ}(B(p))$ を、

$S_{\mathbb{R}}(\Gamma_0(p)) + S_{\mathbb{R}}(\Gamma_0'(p)) + S_{\mathbb{R}}(\Gamma_0''(p))$ の、Peterson metric に関する

$S_{\mathbb{R}}(B(p))$ 内での直交補空間として定義する。実は、

$$S_{\mathbb{R}}^{\circ}(B(p)) = \{ f \in S_{\mathbb{R}}(B(p)) ; S_i f = -f, i=0, 1, 2 \}$$

であり、 f に対応する local admissible rep. は special であ

る。(但し、 S_i は Hecke algebra の元とみなして作用させて

いる。)

2) $S_p(2)$ の場合.

$D_p \in \mathbb{Q}_p$ 上の division quaternion algebra とし.

$$G_p^* = \{ g \in M_2(D_p) : g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^t \bar{g} = n(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, n(g) \in \mathbb{Q}_p^\times \}$$

とおく. $\mathcal{O}_p \in D_p$ の極大整数環, $\pi \in \mathcal{O}_p$ の素元とする.

$$U_0(p) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_p & \mathcal{O}_p \\ \pi \mathcal{O}_p & \mathcal{O}_p \end{pmatrix}^\times \cap G_p^* \quad \text{とおくと, これは } G_p^* \text{ の}$$

minimal parahoric であり, $U_0(p)$ を含む parahoric は次で与えられる.

$$\begin{array}{c} U_1(p) \\ \leftarrow U_0(p) \\ U_2(p) \end{array} \quad \begin{array}{l} U_1(p) = G_p^* \cap GL_2(\mathcal{O}_p) \\ U_2(p) = G_p^* \cap \begin{pmatrix} \mathcal{O}_p & \pi^{-1} \mathcal{O}_p \\ \pi \mathcal{O}_p & \mathcal{O}_p \end{pmatrix}^\times \end{array}$$

($U_1(p), U_2(p)$ はそれぞれ principal genus, 及び non principal genus の max. lattice を fix する max. compact). 次に

$$S'_1 = U_0(p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_0(p), \quad S'_2 = U_0(p) \begin{pmatrix} 0 & \pi^{-1} \\ \pi & 0 \end{pmatrix} U_0(p)$$

とすれば $U_1(p) = U_0(p) \cup S'_1$, $U_2(p) = U_0(p) \cup S'_2$ である.

次に D を判別式素数 p の $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環とし

$$G = \{ g \in M_2(D) : g {}^t \bar{g} = n(g) 1_2 \} \quad \text{とおく.}$$

$G_{\mathbb{R}}$ の Young diagram $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ に対応する表現を (ρ, ν) とする. ρ, ν の表現空間 V は, たとえば次であたえられる.

(Ihara [9])

$\mathbb{H}^2$ 上の函数 f で、 $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^2$ と同一視した時、2次元
 齊次多項式で、 $f(ax, ay) = N(a)^{\nu} f(x, y)$ for $\forall a \in \mathbb{H}^{\times}$
 $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, かつ $\Delta f = 0$ なるもの

ここで Δ は Laplacian, $(\rho_{\nu}(g)f)(x, y) = f((x, y)g)$.

さて G_A の open compact subgroup U に関する重 $\pm \nu$ の保型
 形式とは、 $f: G_A \rightarrow V$ なる函数で、 $f(uxa) = \rho_{\nu}(u)f(a)$
 for all $a \in G, u \in U, x \in G_A$ なるものの全体である。

$G_A \supset G_{\mathbb{R}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \neq p} (GL_2(\mathbb{O}_{\mathfrak{p}}) \cap G_{\mathfrak{p}}) \cdot U_{\mathbb{C}}(p)$ ($i=0, 1, 2$) を考え、
 これをやはり $U_{\mathbb{C}}(p)$ であらわす。New forms は、

$$\mathcal{M}_{\nu}^{\circ}(U_{\mathbb{C}}(p)) = (\mathcal{M}_{\nu}(U_1(p)) + \mathcal{M}_{\nu}(U_2(p)))^{\perp} \\
= \{f \in \mathcal{M}_{\nu}(U_{\mathbb{C}}(p)) ; S'_i f = S_i f = -f\}$$

で定義される。やはり local には special rep. がある。

§2. Level 2 の graded rings

实例を調べるのには、具体的に尖形形式を与えておくことが必要である。ところで、 $Sp(2, \mathbb{Z})$ の level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ については、その次元も保型形式をなす graded ring も、Igusa [8] により完全に具体的に知られている。ここでは、 $B(2), \Gamma_0(2)$ について graded rings を計算してみよう。

$m \in \mathbb{Z}^4$ に対し $m = \begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix}$, $m' \in \mathbb{Z}^2, m'' \in \mathbb{Z}^2$ とかく。

2次元 Siegel 上半空間上の正則函数: $\theta_m(\tau)$ を、

$$\theta_m(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{O} \left[\frac{1}{2} \tau(p + \frac{m'}{2}) \tau(p + \frac{m'}{2}) + \tau(p + \frac{m'}{2}) \frac{m''}{2} \right]$$

で定義する。これは theta constant と呼ばれている。更に

$$X = (\theta_{0000}^4 + \theta_{0010}^4 + \theta_{0001}^4 + \theta_{0011}^4) / 4$$

$$Y = (\theta_{0000} \theta_{0010} \theta_{0001} \theta_{0011})^2$$

$$Z = (\theta_{0100}^4 - \theta_{0110}^4)^2 / 16384$$

$$(= (\psi_4 + 3Y - 4X^2) / 12288, \psi_4 \text{ is weight 4 Eisenstein})$$

$$T = (\theta_{0100} \theta_{0110})^4 / 256$$

$$R = (X^2 - Y - 1024Z - 64T) / 64$$

$$K = (\theta_{0100} \theta_{0110} \theta_{1000} \theta_{1001} \theta_{1100} \theta_{1111})^2 / 4096$$

$$\theta = \prod_m \theta_m \quad (m \text{ is } 1079 \text{ even characteristics } \text{Eisenstein})$$

$$\chi_{11} = (\theta_{1000}^{12} - \theta_{1001}^{12} - \theta_{1100}^{12} + \theta_{1111}^{12}) \theta$$

$$\chi_{19} = \chi_{11} \{ 8YZ - (X^2 - Y - 1024Z - 96T) / T - 8XK \}$$

とおく。

Prop. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(B(2))$ は $\mathbb{C}$ 上 X, Y, Z, K, T, χ_{11} で生成される
 の relation は次の 2 つだけ。

$$4K^2 + XKT = (YZ - 4TR)T$$

$$\begin{aligned} \chi_{11}^2 = & 4096 YKZ (X^4 - 2048 X^2 Z + 1048576 Z^2 - 64 X^2 T \\ & + 65536 TZ - 2 X^2 Y + Y^2 - 2048 YZ + 12288 TR + 64 YT \\ & - 4096 XK) \end{aligned}$$

また、cusp forms の ideal は K, YZ, TR, χ_{11} で生成される。

Prop. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(\mathbb{C}(2))$ は $X, Y, Z, K, X_{19} Z$ で生成される。

このうち X, Y, Z, K は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である。

cusp form となる ideal は $K, YZ, X_{19} Z$ である。

§3. 実例 と予想

$p=2$ で実例を与え、 p = 一般 (prime) の予想を述べる。

$p=2$ の時、weight の小さい所 2 次元を書くと

k	6	8	10	12
$S_k(B(2))$	1	3	6	12
$S_k(\mathbb{C}(2))$	1	2	4	7
$S_k(\mathbb{C}'(2))$	0	1	2	4
$S_k(K(2))$	0	1	1	2
$S_k(S_p(2, 2))$	0	0	1	1
new forms	0	0	1	1

v	3	5	7	9
$M_v(U_0(2))$	0	1	1	2
$M_v(U_1(2))$	0	0	0	0
$M_v(U_2(2))$	0	1	0	1
new forms	0	0	1	1

± 2 $\mathbb{H}$ 上の real valued function $x_i = x_i(x) \in \mathbb{R}$, $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ ($i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji = k$) で定義する。更に $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ に対し

$$f_7(x, y) = (N(y) - N(x)) (N(y)^2 - 3N(x)N(y) + N(x)^2) \prod_{i=1}^4 (\bar{y}x)_i,$$

$$f_9(x, y) = (N(y) - N(x)) (153N(x)^4 - 1122N(x)^3N(y) + 2618N(x)^2N(y)^2 - 1122N(x)N(y)^3 + 153N(y)^4 - 1292 \sum_{i=1}^4 (\bar{y}x)_i^4) \prod_{i=1}^4 (\bar{y}x)_i$$

と置く。但し N は reduced norm of $\mathbb{H}$ 。

一方.

$$F_{10} = 12XTR - 2XYZ + X^2K + YK + 1024ZK + 96RK,$$

$$\begin{aligned} F_{12} = & 36YTR + 36864ZTR + 3840TR^2 - 1920RYZ + 12X^2TR \\ & - 21Y^2Z - 21504YZ^2 + XYK + 1024XZK - 3840K^2 \\ & + 13X^2YZ + 7X^3K \quad \text{とある。} \quad \text{この時} \end{aligned}$$

Theorem

$$S_{10}^{\circ}(B(2)) = \mathbb{C} F_{10}, \quad \mathcal{M}_7^{\circ}(U_0(2)) = \mathbb{C} f_7(x, y) \quad \text{である。}$$

かつ両者の Hecke polynomial の 3-factor $L_3(T, f_7), L_3(T, F_{10})$ は

$$\text{共に} \quad T^4 + 18360T^3 + 297016970T^2 + 3^{17}18360T + 3^{34}$$

である。また,

$$S_{12}^{\circ}(B(2)) = \mathbb{C} F_{12}, \quad \mathcal{M}_9^{\circ}(U_0(2)) = \mathbb{C} f_9(x, y) \quad \text{である。}$$

$$L_3(T, F_{12}) = L_3(T, f_9)$$

$$= T^4 + 14760T^3 - 9330332490T^2 + 14760 \cdot 3^{21}T + 3^{42}$$

である。またこれらの factor は Ramanujan 予想とみたす。

実際には、これらの計算を実行するには、old forms の固有値も皆求める必要があり、そこでいくつか面白い現象があるが、ここでは略す。さて、これら及び、次元等から類推して、次の予想をあげたい。

[予想] p を素数とし, $k = 1 + 3$ とする。この時,

$S_k^\circ(B(p)) \rightarrow \mathcal{M}_U^\circ(U_0(p))$ なる Hecke algebra modules としこの同型がある。すなわち, $f \in S_k^\circ(B(p))$ の common eigen から f の image もそうで, 両者の L 函数は, (少なくとも p 以外の factor では) 一致する。

なお, $K(p)$, $\mathbb{Q}(p)$ についても類似の予想を述べることができ。たとえば, $Sp(2, \mathbb{Z})$, $pSp(2, \mathbb{Z})p^{-1}$ は $B(p)$ -double coset の union と思つて Hecke operators とみなした $T_1 \in \mathbb{Z}$ と $T_2 \in \mathbb{Z}$ と $\frac{p}{q} < 1$ とする。

$$S_k^\circ(K(p)) = \{f \in S_k(B(p)) : T_1 f = T_2 f = 0\}$$

$$S_k^\circ(\mathbb{Q}(p)) = \{f \in S_k(\mathbb{Q}(p)) : S_0 f = S_2 f = -f\}$$

とおくのが一応自然である。これは, 大抵, ばに言, 2
 $\mathcal{M}_U^\circ(U_2(p)) = \{f \in \mathcal{M}_U(U_2) : S_1 f = -f\}$, $\mathcal{M}_U^\circ(U_1(p)) = \{f \in \mathcal{M}_U(U_1) : S_0 f = -f\}$
 と対応しているのではないかと思われる。実際には, lift の部分で少し注意が必要だが, いづれにしても, 少なくとも $K(p)$ に関しては精密な予想が述べられるし, 実例もあり, また, 最近計算した $S_k(K(p))$ の次元公式からの support もある。また, genus が一般の場合も, $B(p)$ は勿論, $K(p)$ の類似も考えて定式化を書くことは一応可能だし, 次元公式の main term からの support もある。これらについて詳しいことは, 今は,

略す。

文献 (詳しくは、同題の英文論文を参照された。))

- [1] M. Eichler, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Kettenreihen, J. reine angew. Math. 195 (1956)
- [2] K. Hashimoto, On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 27 (1980)
- [3] K. Hashimoto, The dimension formula of Siegel cusp forms of genus two.
- [4] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 27 (1980), 同題の(II) ... to appear
- [5] T. Ibukiyama : 名古屋大学における総合研究集会報告集
- [6] T. Ibukiyama : The graded rings of Siegel modular forms of genus two with level two (70C20:14)
- [7] T. Ibukiyama : On symplectic Euler factors of genus two (70C20:14) の要旨は J. Acad. & Proc. 57, Ser. A No. 5 (1981)
- [8] J. Igusa : On Siegel modular forms of genus two II. Amer. J. Math. 86 (1964)
- [9] Y. Ihara : On certain arithmetical Dirichlet series,

J. Math. Soc. Japan 16 (1964)

[10] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$,

Lecture Notes in Math. 260, Springer (1972)

[11] N. Kurokawa, Examples of eigenvalues of Hecke operators

on Siegel cusp forms of degree two, Invent Math. 49 (1978)

[12] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms

Lecture Notes in Math. 170, Springer (1970)

[13] H. Shimizu, On zeta functions of quaternion algebras,

Ann. Math. 81 (1965)