

Differentiable Dynamical Systems on Noncompact Manifolds

京大 理

古池 時日規

この小論の目的は Axiom A を noncompact manifolds の場合に拡張して, compact manifolds の場合に得られた諸結果を non compact manifolds の場合に述べ直すことである.

M を noncompact で boundary をもたない manifold とし, $f: M \rightarrow M$ を次の条件をみたす C^r diffeomorphism ($r \geq 1$) とする.

(m) M の任意の compact set K に対して, $\overline{O(K)}$ は compact である.

(注) $O(K) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K)$.

$\Omega = \Omega(f)$ を f の non wandering set とする. Ω は M の closed set である. (m)-diffeomorphism f に対して, Axiom A を次のように定義する.

Axiom A(a) Ω は hyperbolic である. すなわち, Ω 上の

continuous vector bundle E^s, E^u が存在して,

$$(1) \quad T_{\Omega}M = E^s \oplus E^u$$

(2) E^s, E^u は Tf -invariant である.

(3) 任意の compact invariant set $K \subset \Omega$ に対して,
constants $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ が存在して,

$$v \in E_K^s \Rightarrow \|Tf^n(v)\| \leq C \lambda^n \|v\| \quad n=1, 2, \dots$$

$$v \in E_K^u \Rightarrow \|Tf^{-n}(v)\| \leq C \lambda^n \|v\| \quad n=1, 2, \dots$$

ここで, $E_K^s = E^s|_K$, $E_K^u = E^u|_K$ (E^s, E^u の K の上への制限) とする.

$$\text{Axiom A (b)} \quad \Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$$

(注) TM 上に Riemann metric $\|\cdot\|$ が入っているものとする.

M が compact manifold であるときと同様に (m) -diffeomorphism f が Axiom A をみたすとき, 各 $x \in \Omega$ に対して, local stable manifold $W_\varepsilon^s(x)$, local unstable manifold $W_\varepsilon^u(x)$, stable manifold $W^s(x)$, 及び unstable manifold $W^u(x)$ が定まる.

Theorem 1 (Local product structure) (m) -diffeomorphism f が Axiom A をみたすとする. そのとき, 任意の compact set $K \subset \Omega(f)$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくすると,

$$W_\varepsilon^s(K) \cap W_\varepsilon^u(K) \subset \Omega(f)$$

Proof. M が compact manifold であるときと全く同様に証

明できるので省略する.

次の Theorem は最も基本的である.

Theorem 2. (Spectral decomposition) (m) -diffeomorphism f が Axiom A をみたすとする. そのとき, $\Omega = \Omega(f)$ は次の (1°), (2°) をみたす可算個の部分集合の直和に分解される.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$$

(1°) Ω_i は compact, invariant かつ transitive である.

(2°) 任意の compact set $K \subset M$ に対して, $\Omega_i \cap K \neq \emptyset$ となる Ω_i の個数は有限個である.

Proof. 次の 2 の Lemma が証明の土台である.

Lemma 1 Theorem 2 と同じ仮定の下で. 任意の $x \in \Omega$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば, 次のことが成り立つ;
 $N_x = \bigcup \{ W_\varepsilon^s(y_1) \cap W_\varepsilon^u(y_2) ; y_1 \in W_\varepsilon^u(x) \cap \Omega, y_2 \in W_\varepsilon^s(x) \cap \Omega \}$ とおくとき,

(1) N_x は Ω の open subset である.

(2) N_x の任意の open subset U に対し, $O(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ は N_x において dense である.

Proof of Lemma 1. (1) は Theorem 1 より明らか. (2) は, Axiom A(b) と Birkoff's Theorem より容易に証明される.

Lemma 2. X を separable complete metric space とし, $h: X \rightarrow X$ を次の (a) をみたす homeomorphism とする.

(a) X の任意の non empty open set U は dense orbit をとる。すなわち, $\overline{\mathcal{O}(U)} = X$ 。
 このとき, $\{x \in X : \overline{\mathcal{O}(x)} = X\}$ は X において dense である。

Proof of Lemma 2. Z. Nitecki [6] p 196 参照。

さて, Theorem 2 を証明する。各 $x \in \Omega$ に対して, Lemma 1 のように, N_x を 1 つ定める。そして $\Omega_x = \overline{\mathcal{O}(N_x)}$ とおく。 N_x が compact であるから, Ω_x も compact である。もちろん, Ω_x は invariant である。任意の $x, y \in \Omega$ に対して $\Omega_x = \Omega_y$ か, $\Omega_x \cap \Omega_y = \emptyset$ であることを証明する。仮に $\Omega_x \cap \Omega_y \neq \emptyset$ とする。そのとき, ある $n, m \in \mathbb{Z}$ があって $f^n(N_x) \cap f^m(N_y) \neq \emptyset$ となる。 $U = f^n(N_x) \cap f^m(N_y)$ とおくと, Lemma 1 によって, $\overline{\mathcal{O}(U)} \supset N_x$, $\overline{\mathcal{O}(U)} \supset N_y$ により, $\overline{\mathcal{O}(U)} = \overline{\mathcal{O}(N_x)}$, $\overline{\mathcal{O}(U)} = \overline{\mathcal{O}(N_y)}$ をうる。すなわち, $\Omega_x = \Omega_y$ 。また, Lemma 2 より Ω_x が transitive であることが分る。また, $\{\Omega_x\}_{x \in \Omega}$ に関して, Theorem の (2°) が成り立つことは明らか。したがってまた $\{\Omega_x\}$ は可算集合である。

Theorem 3. Axiom A をみたす (m) diffeomorphism f の stable manifolds $\{W^s(x) : x \in \Omega\}$ に関して次のことが成り立つ。

(1) $x, y \in \Omega$ に対し, $W^s(x) = W^s(y)$ か $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$

$$(2) M = \bigcup_{x \in \Omega} W^s(x)$$

Proof. M が compact manifold であるときと同様である。

Def. $f: M \rightarrow M$ を Axiom A をみたす (m) -diffeomorphism とする. $\{\Omega_i\}_{i=1,2,\dots}$ を f の basic sets とする. $\tilde{W}^s(\Omega_i) = W^s(\Omega_i) - \Omega_i$, $\tilde{W}^u(\Omega_i) = W^u(\Omega_i) - \Omega_i$ とおく. そのとき, $\Omega_i < \Omega_j$ を $\tilde{W}^s(\Omega_i) \cap \tilde{W}^u(\Omega_j) \neq \emptyset$ で定義する. そして, $\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \dots < \Omega_{i_l} < \Omega_{i_1}$ ($1 \leq l < \infty$) となる列 $\{\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_l}\}$ を Ω の cycle とよぶ. Ω の cycle がまったく存在しないとき, f は no cycle condition をみたすという.

f が no cycle condition をみたすとき, $\Omega_i \leq \Omega_j$ を, " $\Omega_i = \Omega_j$ または basic sets $\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_n}$ で, $\Omega_i < \Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \dots < \Omega_{i_n} < \Omega_j$ となるものが存在する" と定義する. そのとき, $(\{\Omega_i\}_{i=1,2,\dots}, \leq)$ は順序集合になる. つぎのような無限列を ω sequence (あるいは α sequence) とよぶ.

$$\Omega_{i_1} > \Omega_{i_2} > \Omega_{i_3} > \dots$$

$$(\text{あるいは, } \Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \Omega_{i_3} < \dots)$$

Lemma 3. Ω が no cycle condition をみたし, ω sequence をもたないならば, 任意の basic set Ω_{i_0} に対し, $\Omega_i \leq \Omega_{i_0}$ となる Ω_i の個数は有限である.

Proof 省略.

Theorem 4 (Filtration) (m) -diffeomorphism $f: M \rightarrow M$
 が Axiom A をみたし, さらに, no cycle condition 及び,
 no ω sequence condition をみたすとする. そのとき, f の
 basic sets に適当に番号付 $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ すると,

$$(\star) \quad i < j \Rightarrow \Omega_j \not\subseteq \Omega_i \text{ でない.}$$

とできる.

さらに, かかる番号付 $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ に対して, M の open
 subsets の列 $M_0 = \emptyset, M_1, M_2, \dots$ で次の(1)~(5)
 をみたすものが作れる.

- (1) $\overline{M_i}$ は compact である.
- (2) $\overline{M_{i-1}} \subset M_i \quad i = 1, 2, \dots$
- (3) $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$
- (4) $f(\overline{M_i}) \subset M_i \quad i = 1, 2, \dots$
- (5) $\Omega_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \overline{M_{i-1}})$

Proof M が compact manifold であるときと同様である.

Def. (m) -diffeomorphism f が次の条件をみたすとき, f は
 (m^+) -diffeomorphism であるということにする.

(*) 任意の compact set K に対して 次のような compact
 set $\widetilde{K}$ が存在する.

- (1) $K \subset \widetilde{K}$
- (2) $\widetilde{K}$ の任意の open neighborhood U に対して, compact

set K_i で, $\widetilde{K} \subset \text{int } K_i$ かつ $\overline{\mathcal{O}^+(K_i)} \subset U$ となるものが存在する. (注) $\mathcal{O}^+(K_i) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(K_i)$

次の Lemma は容易に証明される. Axiom A をみたす (m) -diffeomorphism のことを単に (Am) diffeomorphism とよぶことにする.

Lemma 4. (Am) -diffeomorphism f が no cycle condition をみたすとき, 次の (I), (II) は同値である.

(I) (m^+)

(II) no ω sequence condition.

Proof 省略

Def M を non compact manifold とする. $f \in \text{Diff}^1(M)$ が Ω -stable であるとは, identity map $1_{\Omega(f)} \in C^0(\Omega(f), M)$ の近傍 $\mathcal{W}$ に対して, f の近傍 $\mathcal{N} \subset \text{Diff}^1(M)$ で次の条件をみたすものが存在するときをいう.

(☆) 任意の $g \in \mathcal{N}$ に対して, $\varphi(g) \in \text{Homeo}(\Omega(f), \Omega(g)) \cap \mathcal{W}$ で, $\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(g)$ となるものが存在する.

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f} & \Omega(f) \\ \downarrow \varphi(g) & & \downarrow \varphi(g) \\ \Omega(g) & \xrightarrow{g} & \Omega(g) \end{array}$$

この $\varphi(g)$ を conjugacy とよぶ.

さて, $u \in \text{Diff}(M)$ に対し, $\text{supp } u = \overline{\{x \in M; u(x) \neq x\}}$

と置く。 $f \in \text{Diff}'(M)$ に対し, $\text{supp } g^{-1}f$ が compact である $g \in \text{Diff}'(M)$ 全体を Σ_f で表わす。また, compact set $K \subset M$ に対して, $\text{supp } g^{-1}f \subset K$ となる $g \in \text{Diff}'(M)$ 全体を $\Sigma_f(K)$ で表わす。

さて, (m) -diffeomorphism $f \in \text{Diff}'(M)$ が absolutely Ω -stable とは, 任意の compact invariant set $K \subset M$ に対して, f の近傍 $\mathcal{N} \subset \text{Diff}'(M)$ と, $\mathcal{N} \cap \Sigma_f(K)$ から $C^0(\Omega(f), M)$ への map φ で次の条件をみたすものが存在する;

(1) $g \in \mathcal{N} \cap \Sigma_f(K)$ に対して, $\varphi(g) \in \text{Homeo}(\Omega(f), \Omega(g))$ であり, $\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(g)$ である。

(2) ある constant C に対して,

$$d(\varphi(g)|_{\Omega_K}, 1_{\Omega_K}) \leq C d(f, g)$$

ここで, d は mapping space の metric を表わす。また,

$$\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \text{int } K}.$$

Theorem 5 (Ω -stability) (Am) -diffeomorphism f が no cycle condition, 及び no ω -sequence condition をみたすならば, f は Ω -stable である。

Theorem 6 (m) -diffeomorphism f が, Axiom A(b) をみたし, absolutely Ω stable ならば, f は Axiom A(a) をみたす。

Theorem 7 (m^+) -diffeomorphism f が Axiom A (b) をみたし, absolutely Ω stable ならば, f は Axiom A, no cycle condition 及び no ω sequence condition をみたす. したがって, f は Ω -stable である.

(注) absolutely Ω stable であっても Ω stable とは限らない.

Proof of Theorem 5. 証明の土台は Theorem 4 である. M が compact manifold であるときと同様に証明できるので省略する.

Proof of Theorem 6 次の3つの Proposition を証明すればよい. [2], [3].

Prop 1 (m) -diffeomorphism $f: M \rightarrow M$ が Axiom A (b) をみたし, f のすべての periodic points が hyperbolic のとき, 次の条件は同値である.

(I) f は Axiom A (a) をみたす.

(II) 任意の compact invariant set K に対して, $I - f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は isomorphism である.

(注) $\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \text{int} K}$, Γ_{Ω_K} は $TM|_{\Omega_K}$ の continuous section の全体, また, $\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}$, $p \in \Omega_K$ に対して, $((I - f^{\#})\gamma)(p) = \gamma(p) - Tf \cdot \gamma \cdot f^{-1}(p)$ とおく.

Prop 2 (m) -diffeomorphism f が absolutely Ω stable

ならば, 任意の compact invariant set K に対して, $I-f^\# : \Gamma_{\Omega_K} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は injective である.

Prop 3 (m)-diffeomorphism f が absolutely Ω stable ならば, $I-f^\# : \Gamma_{\Omega_K} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は surjective である.

Proof of Prop 1. (I) $\Rightarrow$ (II) は容易に証明できるので, (II) $\Rightarrow$ (I) を証明する. Banach space Γ_{Ω_K} の複素化を $\Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$ で表わす. $I-f^\# : \Gamma_{\Omega_K} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は自然に linear map $I-f^\# : \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$ に拡張できる. 後者は isomorphism であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して,

$$\|(I-f^\#)\gamma\| \geq 3\varepsilon\|\gamma\| \quad \text{for all } \gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$$

となる. まず次の事を証明する.

(Claim) ある $\varepsilon' > 0$ が存在して, すべての $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|=1$ に対して, $\|(f^\# - I)\gamma\| \geq \varepsilon'\|\gamma\|$ for all $\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$

Proof of Claim. まず integer $n > 0$ を $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ととる. $\Lambda_0 = \{ \text{isolated periodic points in } \Omega_K \text{ with period } \leq 2n+1 \}$ とおき, $\Lambda = \Omega_K - \Lambda_0$ とおく. Λ は closed で, $\text{int } \Lambda$ ("int" は Ω の位相に関して) は Ω_K に属する periodic points with period $\geq 2n+2$ が dense である. 今, $B = \{ \gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}} ; \gamma(x) = 0 \text{ for all } x \in \Lambda_0 \}$ とおく. そのとき, $\|(f^\# - I)\gamma\| \geq \varepsilon\|\gamma\|$ for all $\gamma \in B$, $|\lambda|=1$ である

ことを証明する。もしそうでないとする、ある $\gamma \in B$,
 $\|\gamma\|=1$, $|\lambda|=1$ に対して, $\|(f^\# - \lambda I)\gamma\| < \varepsilon$ となる。

Λ の periodic point p で, period が $2n+2$ 以上で, $\|\gamma(p)\| > \frac{1}{2}$ となるものが存在する。 p の近傍 W を $f^k(W) \cap f^l(W) = \emptyset$ for $-n \leq k < l \leq n$ と選ぶ。 continuous function

$\bar{\mu}: W \rightarrow [0; 1]$ を, $\bar{\mu}(p)=1$, ∂W の近傍で $\bar{\mu}(x)=0$ となるものとする。そのとき, continuous function $\mu: M \rightarrow [0; 1]$ を

$$(1^\circ) \quad \mu(x)=0 \quad \text{if } x \notin \bigcup_{i=-n}^n f^i(W)$$

$$(2^\circ) \quad \mu(x) = (1-|i|/n) \lambda^i \bar{\mu} \circ f^{-i}(x) \quad \text{if } x \in f^i(W)$$

for some i , $-n \leq i \leq n$.

とおく。そして, $\eta = \mu\gamma \in B$ とおく。そのとき,

$$\|\eta\| \geq \|\eta(p)\| = |\mu(p)| \|\gamma(p)\| > \frac{1}{2}$$

そして,

$$\begin{aligned} \|f^\#(\eta) - \eta\| &= \|(\mu \circ f^{-1}) f^\#(\gamma) - \mu\gamma\| \\ &= \|(\mu \circ f^{-1})(f^\#(\gamma) - \lambda\gamma) + \lambda(\mu \circ f^{-1})\gamma - \mu\gamma\| \\ &\leq \|f^\#(\gamma) - \lambda\gamma\| + \|\gamma\|/n \leq \frac{3}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

$\|\eta\| > \frac{1}{2}$ だから, $\|f^\#(\eta) - \eta\| \leq 3\varepsilon \|\eta\|$ これは ε に対する仮定に反する。したがって, $\gamma \in B$, $|\lambda|=1$ に対して,

$$\|(f^\# - \lambda I)\gamma\| \geq \varepsilon \|\gamma\| \quad \text{となる。次に } B_0 = \{\gamma \in \Gamma_{\Omega_k}^0;$$

$$\gamma(x)=0 \quad \text{for all } x \in \Lambda\} \text{ とおくと, } \Gamma_{\Omega_k}^0 = B \oplus B_0.$$

Λ_0 は有限個の hyperbolic periodic points からなるから、 $f^\# : B_0 \rightarrow B_0$ は hyperbolic である。したがって、 $f^\# - \lambda I$ ($|\lambda|=1$) は isomorphism である。よって、ある $\varepsilon_1 > 0$ に対して、
 $\|(f^\# - \lambda I)\gamma\| \geq \varepsilon_1 \|\gamma\|$ for all $\gamma \in B_0$.
 ここで $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$ とおくと Claim をうる。(Claim の証明終)、この Claim から $f^\#$ の spectrum $\sigma(f^\#)$ は $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda|=1\}$ と交わらないことが次のようにして示めされる、仮に $\sigma(f^\#) \cap S^1 \neq \emptyset$ とすると、 $\sigma(f^\#) \not\subset 1$ であるから、 $\lambda \in S^1$ で $\sigma(f^\#)$ の境界点であるものが存在する。
 $\|(f^\# - \lambda I)\gamma\| \geq \varepsilon' \|\gamma\|$ であるから、 $(f^\# - \lambda I)\Gamma_{\Omega_k}^{\mathbb{C}}$ は $\Gamma_{\Omega_k}^{\mathbb{C}}$ の proper closed subspace である。それゆえ、 $\gamma_0 \in \Gamma_{\Omega_k}^{\mathbb{C}}$ で $(f^\# - \lambda I)\Gamma_{\Omega_k}^{\mathbb{C}}$ との距離 δ が > 0 であるものが存在する。いま、 $Q = \{\gamma \in \Gamma_{\Omega_k}^{\mathbb{C}} ; \|\gamma\| \leq 2\|\gamma_0\|/\varepsilon'\}$ とおく。そのとき、

(1) もし $|\beta| < \varepsilon'/2$ ならば、

$$\gamma_0 \notin (f^\# - (\lambda + \beta)I)(\Gamma_{\Omega_k}^{\mathbb{C}} - Q)$$

(2) もし $|\beta| < \delta\varepsilon'/2\|\gamma_0\|$ ならば、

$$\gamma_0 \notin (f^\# - (\lambda + \beta)I)Q$$

したがって、 $|\beta| < \min(\varepsilon'/2, \delta\varepsilon'/2\|\gamma_0\|)$ ならば、 $\lambda + \beta \notin \sigma(f^\#)$ 。これは λ が $\sigma(f^\#)$ の境界点であることに反する。よって、 $\sigma(f^\#) \cap S^1 = \emptyset$ 。すなわち、 $f^\#$ は hyperbolic であ

る。ここで次の Theorem を必要とする。この Theorem は本質的には Mather [4] によって証明された。

Theorem 8. $\pi: E \rightarrow \Lambda$ を compact Hausdorff space Λ 上の finite dimensional vector bundle とし, $L: E \rightarrow E$ を bundle map covering a homeomorphism $g: \Lambda \rightarrow \Lambda$ とする. $\Gamma(E)$ を E の C^0 sections 全体とする. linear transformation $L^*: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ を $L^*(\gamma)(x) = L \circ \gamma \circ f^{-1}(x)$ $\gamma \in \Gamma(E)$, $x \in \Lambda$ で定義する. そのとき, L^* が hyperbolic ならば, E の subbundle E^s, E^u で次の条件をみたすものが存在する.

$$(1) \quad E = E^s \oplus E^u$$

$$(2) \quad E^s, E^u \text{ は } L\text{-invariant}$$

$$(3) \quad \text{constants } 0 < \lambda < 1, \quad C > 0 \text{ が存在して,}$$

$$v \in E^s \Rightarrow \|L^n(v)\| \leq C \lambda^n \|v\| \quad n=1, 2, \dots$$

$$v \in E^u \Rightarrow \|L^{-n}(v)\| \leq C \lambda^n \|v\| \quad n=1, 2, \dots$$

Proof 省略

さて, Prop1 の証明を完結させる. $f^*: \Omega_K \rightarrow \Omega_K$ は hyperbolic であるから, Theorem 8 より, $TM|_{\Omega_K} = E_{\Omega_K}^s \oplus E_{\Omega_K}^u$ と分解される. いま, K' を他の任意の compact invariant set とするとき, $\Omega_K \cap \Omega_{K'}$ において, $E_{\Omega_K}^s, E_{\Omega_K}^u$ と $E_{\Omega_{K'}}^s, E_{\Omega_{K'}}^u$ がそれぞれ一致することは, hyperbolic

splitting の一意性より容易に分る。そこで $TM|_{\Omega}$ の sub-bundles E^s, E^u を $E^s = \bigcup \{E_{\Omega_K}^s; K \text{ は compact invariant set}\}$, $E^u = \bigcup \{E_{\Omega_K}^u; K \text{ は compact invariant set}\}$ と定義すれば, この E^s, E^u に関して Axiom A (a) が成り立つ. (Prop 1 の証明終)

Proof of Prop 2. J. Franks [1] より. f の periodic point はすべて hyperbolic であることが分る. いま仮に, ある $\gamma \neq 0 \in \Gamma_{\Omega_K}$ に対して $(I - f^\#)\gamma = 0$ となったとする. $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$ であり, $\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \text{int } K}$ であるから, ある periodic point $p \in \Omega_K$ に対して, $\gamma(p) \neq 0$ となる. 前述より, p は hyperbolic periodic point である. Γ_p を $O(p)$ 上の section 全体とする. $f^\# : \Gamma_p \rightarrow \Gamma_p$ は hyperbolic である. ところが $\gamma_0 = \gamma|_{O(p)}$ とすると, 仮定より $(I - f^\#)\gamma_0 = 0$ ゆえに $\gamma_0 = 0$ これは $\gamma_0(p) = \gamma(p) \neq 0$ に矛盾する. すなわち, $f^\# : \Gamma_{\Omega_K} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は injective である. (Prop 2 の証明終)

Proof of Prop 3. $K \subset M$ を任意の compact invariant set とする. $\mathcal{N} \subset D, H^1(M)$ を f の十分小さい近傍とし, $\varphi : \mathcal{N} \cap \Sigma_f(K) \rightarrow C^0(\Omega(f), M)$ を absolute Ω stability の定義における conjugacy とする. $g \in \mathcal{N} \cap \Sigma_f(K)$ に対して, TM の C^1 section η で, $\text{supp } \eta \subset K$,

$g = \exp \eta \circ f$ となるものがとれる。また, $TM|_{\Omega_K}$ における C^0 section 全体を Γ_{Ω_K} とおくとき, $\xi \in \Gamma_{\Omega_K}$ で, $\varphi(g)|_{\Omega_K} = \exp \xi$ となるものが存在する. $\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(f)$ であるから, Ω_K において,

$$(*) \quad \exp \xi = \exp \eta \circ f \circ \exp \xi \circ f^{-1}$$

となる.

次の Lemma は容易に証明できる. [5]

Lemma 5. $f \in \text{Diff}^1(M)$ とし, K を f の compact invariant set とする. そのとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の条件を満たす $\delta > 0$ がとれる; Λ を K に含まれる任意の compact invariant set とし, ξ を $TM|_{\Lambda}$ の C^0 section とする. また η を TM の C^1 section で $\text{supp } \eta \subset K$ となるものとする. そのとき, $\|\xi\|_0 < \delta$, $\|\eta\|_1 < \delta$ ならば,

$$(1) \quad \|f \circ \exp \xi \circ f^{-1} - \exp(f^{\#} \xi)\|_0 < \varepsilon \|\xi\|_0.$$

$$(2) \quad \|\exp \eta \circ \exp \xi - \exp(\xi + \eta)\|_0 < \|\eta\|_1 \|\xi\|_0 + \varepsilon \|\xi\|_0 + \varepsilon \|\eta\|_0.$$

さて, この Lemma を (*) に適用すると,

$$(\star) \quad \eta = (I - f^{\#}) \xi + P(\xi, \eta)$$

ここで, 定義域は Ω_K であり, $\|P(\xi, \eta)\| < \varepsilon (\|\xi\|_0 + \|\eta\|_0) + \|\eta\|_1 \|\xi\|_0$ である. $(I - f^{\#}) \Gamma_{\Omega_K}$ が Γ_{Ω_K} において, dense であることをいえば, Open mapping theorem (Loomis []

p17, Lemma 1) より $I-f^\# : \Gamma_{\Omega_K} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ が surjective であることが分る. さて, compact invariant set K' を, $K \subset \text{int } K'$ ととり, これまで K に対して行なった議論を K' に対して行なう. とくに, 評価式(☆) は K' に対するものとする. いま, $\Gamma_{K'} = \{ \text{TM の } C^1 \text{ section } \eta \text{ で } \text{supp } \eta \subset K' \}$ となるものの全体} とおく. $R : \Gamma_{K'} \rightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ を $R(\eta) = \eta|_{\Omega_K}$ ($\eta \in \Gamma_{K'}$) で定義する. R の image は Γ_{Ω_K} において dense である. そこで, Γ_{Ω_K} の任意の open set $\mathcal{U}$ に対して, $\eta \in \Gamma_{K'}$ $R(\eta) \in \mathcal{U}$ となるものが存在する. $t > 0$ を十分小さくとると, $\xi_t \in \Gamma_{\Omega_K}$ が存在して

$$t\eta = (I-f^\#) \xi_t + P(\xi_t, t\eta)$$

absolute Ω stability の定義より, $\|\xi_t\|_0 < C \|t\eta\|_0$.

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \|P(\xi_t, t\eta)\|_0 &\leq \frac{1}{t} (\varepsilon \|\xi_t\|_0 + \varepsilon t \|\eta\|_0 + \|t\eta\|_1 \|\xi_t\|_0) \\ &\leq \frac{1}{t} (\varepsilon t C \|\eta\|_0 + \varepsilon t \|\eta\|_0 + t^2 C \|\eta\|_1 \|\eta\|_0) \\ &= \varepsilon C \|\eta\|_0 + \varepsilon \|\eta\|_0 + t C \|\eta\|_1 \|\eta\|_0. \end{aligned}$$

それゆえ, $t \rightarrow 0$ のとき, $(I-f^\#)(1/t \xi_t') \rightarrow R(\eta)$

ここで, $\xi_t' = \xi_t|_{\Omega_K}$ とおく. したがって, t が十分小さいとき, $(I-f^\#)(1/t \xi_t') \in \mathcal{U}$, $\|1/t \xi_t'\| < C \|\eta\|_0$ をうる. これをもって, Prop 3 の証明は完成する.

Proof of Theorem 7. Theorem 6, [7], Lemma 4 より自明.

References

- [1] J. Franks Necessary Conditions for Stability
of Diffeomorphisms Trans. Amer. Math. Soc.
vol 158 1971 301-308
- [2] J. Franks Differentiably Ω -Stable Diffeo-
morphisms. Topology vol 11 1972 107-113
- [3] J. Guckenheimer Absolutely Ω Stable Diff-
eomorphisms Topology vol 11 1972 159-197
- [4] J. Mather Characterization of Anosov
Diffeomorphisms Indag Math 30 1968
- [5] J. Moser On a Theorem of Anosov. J.
Diff. Equations 5 1969 411-440
- [6] Z. Nitecki Differentiable Dynamics MIT
- [7] J. Palis A Note on Ω -Stability in
Global Analysis Pure Symp Pure Math 14
- [8] S. Smale Differentiable Dynamical Systems
Bull. Amer. Math. Soc. 73 1967 747-817
- [9] S. Smale The Ω Stability Theorem in Glob-
al Analysis. Proc. Symp. Pure Math 14
- [10] Loomis Abstract Harmonic Analysis