

Yoccoz の不等式

東京大学大学院数理科学研究科 神 貞介 (Jin Teisuke)

概要

1 次元および高次元の多項式力学系における Yoccoz の不等式を証明する. 従来の Yoccoz の不等式は Julia 集合の連結性を仮定していたが, 以下では, 対象点を含む成分が一点でなければ成り立つことを示す.

1 1 変数多項式力学系のとき

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\deg d > 1$ の多項式とし, $K = \{z \in \mathbb{C}; \{f^n(z); n \in \mathbb{N}\} \text{ が有界} \}$ を filled Julia 集合とする. また, $a \in \mathbb{C}$ を f の repelling な固定点, $\lambda = f'(a)$ ($|\lambda| > 1$) を multiplier とする.

定理 1.1 (Yoccoz の不等式). $K(a)$ (a を含む K の成分) が一点でないとき,

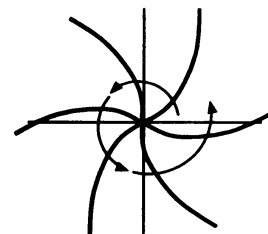
$$\frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi i p/q|^2} \geq \frac{Nq}{2 \log d}$$

が成り立つ.

以下, q, p, N について説明する. a において, Schröder 方程式:

$$\begin{aligned} f \circ \phi(t) &= \phi(\lambda t), \quad (t \in \mathbb{C}), \\ \phi(0) &= a, \quad \phi'(0) \neq 0 \end{aligned}$$

の解 $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ が存在することが知られている. K は f で不変だから, $\tilde{K} = \phi^{-1}(K)$ は $t \mapsto \lambda t$ で不変である. ϕ は 0 で locally conformal だから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tilde{K} = \lambda^n \tilde{K}$ であることを考えると, $\tilde{K}(0)$ は非有界となる. 右の図は $\tilde{K}$ のモデルである. $q(=3)$ は $\mathbb{C} \setminus \tilde{K}$ の成分の周期である. 各成分はサイクルを左回りに $p(=1)$ 番目に移動するとする ($0 \leq p < q$). サイクルは全部で $N(=2)$ 個である.



$f(z)$ に対し, $G(z)$ を次のように定める.

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z)|.$$

すると, G は $\mathbb{C}$ 上の連続な非負の劣調和関数で,

$$\begin{aligned} G(z) &= 0 \Leftrightarrow z \in K, \\ G \circ f(z) &= d \cdot G(z) \end{aligned}$$

を満たす. さらに, $u(t) = G \circ \phi(t)$ とおくと, u は $\mathbb{C}$ 上の連続な非負の劣調和関数で,

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \Leftrightarrow t \in \tilde{K}, \\ u(\lambda t) &= d \cdot u(t) \end{aligned}$$

を満たす. すると,

$$\rho = \text{ord } u = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \max_{|t|=r} u(t)}{\log r} = \frac{\log d}{\log |\lambda|}$$

が成り立つ. 実際, 最大値の原理により

$$\begin{aligned} \text{ord } u &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max_{|t|=|\lambda|^{n+1}} u(t)}{\log |\lambda|^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max_{|t|=1} d^{n+1} u(t)}{\log |\lambda|^n} = \frac{\log d}{\log |\lambda|}, \\ \text{ord } u &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max_{|t|=|\lambda|^n} u(t)}{\log |\lambda|^{n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max_{|t|=1} d^n u(t)}{\log |\lambda|^{n+1}} = \frac{\log d}{\log |\lambda|}. \end{aligned}$$

さて, q, p, N が適切に定義できるためには, 次の性質が必要である.

命題 1.2. $\mathbb{C} \setminus \widetilde{K}$ の成分の個数は $\max\{1, 2\rho\}$ 以下である.

この主張はすでに [EL] で示されているが, Yoccoz の不等式の証明の案内として, 証明しておくことにする. そのため, Tsuji の不等式を引用する.

定理 1.3 (Tsuji の不等式 [H, Theorem 8.3]). u を $\mathbb{C}$ 上の非負の劣調和関数とする. $D = \{t \mid u(t) > 0\}$ とおき,

$$\theta(r) = \begin{cases} \infty, & \{|t|=r\} \subset D \text{ または } u|_{\{|t|=r\}} \equiv 0 \text{ のとき,} \\ \frac{1}{r} (D \cap \{|t|=r\} \text{ の各成分の長さの最大値}), & \text{その他のとき,} \end{cases}$$

と定義する. このとき任意の $1/e \leq \kappa < 1$, $r_0 \leq \kappa^2 r$ に対し,

$$\log \max_{|t|=r} u(t) \geq \pi \int_{r_0/\kappa}^{\kappa r} \frac{dr}{r\theta(r)} + \log \max_{|t|=r_0} u(t) + \log \frac{(1-\kappa)^{3/2}}{6}.$$

が成り立つ.

命題 1.2 の証明. 成分の個数は 1 より多いと仮定してよい. $1 < n < \infty$ に対し, n 個の成分 $U_1, \dots, U_n$ をとり, $n \leq 2\rho$ を示せば十分.

$\mathbb{C} \setminus \widetilde{K} = \{u(t) > 0\}$ に注意する. $t \in U_j$ に対し $u_j(t) = u(t)$, その他のとき $u_j(t) = 0$ と定めると, $\{u_j\}_{j=1}^n$ は劣調和関数である. $\theta_j(r)$ を各 u_j について上の定理のように定める. u_j に Tsuji の不等式を適用すると,

$$\log \max_{|t|=r} u(t) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log \max_{|t|=r} u_j(t) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{r\theta_j(r)} - \text{const.}$$

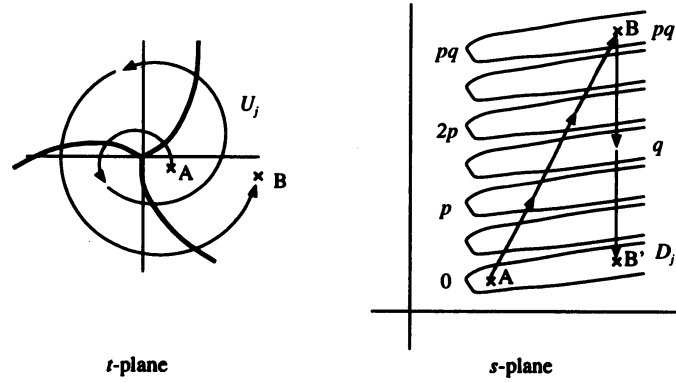
$n \geq 2$ だから, $\sum \theta_j \leq 2\pi$. Schwarz の不等式により,

$$n^2 = \left(\sum \frac{\sqrt{\theta_j}}{\sqrt{\theta_j}} \right)^2 \leq \left(\sum \theta_j \right) \left(\sum \frac{1}{\theta_j} \right) \leq 2\pi \sum \frac{1}{\theta_j}.$$

よって,

$$\log \max_{|t|=r} u(t) \geq \frac{n}{2} \log \kappa r - \text{const.}$$

を得る. ρ の定義により, $\rho \geq n/2$ が容易に計算できる. □

図 1: t -平面と s -平面.

定理 1.1 の証明. 証明法は, t -平面から s -平面へ対数で変換し, s -平面上で Tsuji の不等式を適用するというものである.

$\mathbb{C} \setminus \tilde{K}$ の各サイクルから代表元を取り, それらを $U_1, \dots, U_N$ とする.

$v(t) = \max\{u(t) - 1, 0\}$, $D = \{t \in \mathbb{C} \mid v(t) > 0\}$ と定義し, $D_1, \dots, D_N$ を D の成分で D_j が U_j の部分集合となるものとする. $t = e^s$, すなわち $s = \log t$ とおく. D_j' を各 D_j の連結像の一つとする. $\tilde{K}(0)$ が非有界だから, この変換は適切に定まっている.

このとき, $\log \lambda$ の適当な枝に対して

$$D_j' \ni s \mapsto s + q \log \lambda - 2\pi ip \in D_j' \quad (1)$$

が well-defined である. 図 1 で説明しよう. 右側には, D_j' の軌道とその枝が描かれている. t -平面で点 A を λ^q 倍すると点 B に移るとする. s -平面で点 A に $q \log \lambda$ の適当な枝を加えれば点 B に移る. 更に $2\pi ip$ を引けば, 点 B は点 B' に移り点 A を含む元の成分に戻る事がわかる.

以上の議論から, D_j' は, $\log \lambda - 2\pi ip/q$ の方向を向いている直線に沿って分布していることがわかった. すなわち,

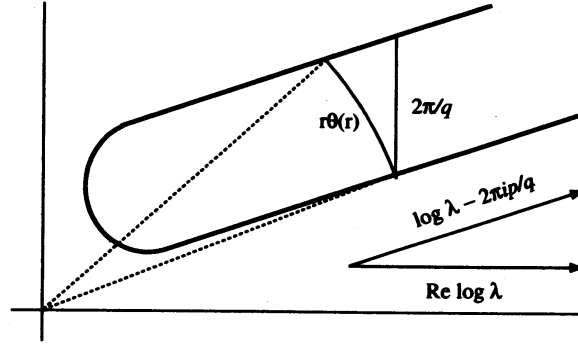
$$\left| \operatorname{Re} s - \frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi ip/q|} |s| \right| \text{ は } s \in \bigcup_j D_j' \text{ について有界.} \quad (2)$$

一方, t -平面の 0 中心の円は s -平面では虚軸に平行な長さ 2π の線分になるので, $\{\operatorname{Re} s = \text{const.}\} \cap \bigcup_j D_j'$ の長さは平均して高々 $2\pi/q$ である. 以下, 詳しく説明する. $\operatorname{len}()$ を通常の線測度とすると, $\{\lambda^n U_j\}$ は $n = 0, \dots, q-1, j = 1, \dots, N$ について互いに交わらないから, 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対し

$$\operatorname{len} \left(\{\operatorname{Re} s = \xi\} \cap \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{n=0}^{q-1} \log(\lambda^n U_j) \right) \leq 2\pi$$

が成り立つ. 更に (1) より, $\log(U_j)$ は $s \mapsto s + q \log \lambda - 2\pi ip$ で不変だから, 積分することによって次を得る.

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot q \operatorname{Re} \log \lambda &\geq \int_{\xi}^{\xi + q \operatorname{Re} \log \lambda} \operatorname{len} \left(\{\operatorname{Re} s = \xi\} \cap \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{n=0}^{q-1} \log(\lambda^n U_j) \right) d\xi \\ &= q \int_{\xi}^{\xi + q \operatorname{Re} \log \lambda} \operatorname{len} \left(\{\operatorname{Re} s = \xi\} \cap \bigcup_{j=1}^N \log(U_j) \right) d\xi \\ &\geq q \int_{\xi}^{\xi + q \operatorname{Re} \log \lambda} \operatorname{len} \left(\{\operatorname{Re} s = \xi\} \cap \bigcup_{j=1}^N D_j' \right) d\xi. \end{aligned}$$

図 2: The area of $\bigcup D'_j$

従って

$$\frac{1}{q \operatorname{Re} \log \lambda} \int_{\xi}^{\xi + q \operatorname{Re} \log \lambda} \operatorname{len} \left(\{\operatorname{Re} s = \xi\} \cap \bigcup_{j=1}^N D'_j \right) d\xi \leq \frac{2\pi}{q}.$$

さて,

$$w_j(s) = \begin{cases} v(e^s) & t \in D'_j \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定めると, $\{w_j\}_{j=1}^N$ は s -平面上の劣調和関数である. この $w_j(s)$ に対して Tsuji の不等式を適用する.

$$\sum_{j=1}^N \log \max_{|s|=r} w_j(s) \geq \sum_{j=1}^N \pi \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{r \theta_j(r)} - \operatorname{const.}, \quad (3)$$

ここで, $\theta_j(r)$ は各 D'_j ごとに定義する. $r = |s|$ に注意せよ. 十分大きな r に対しては $\theta_j(r) < \infty$ が成り立つ. まず右辺を計算しよう. Schwarz 不等式を使うと次を得る.

$$N^2 = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{r \theta_j}}{\sqrt{r \theta_j}} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^N r \theta_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{r \theta_j} \right),$$

$$(\kappa r - 1)^2 = \left(\int_1^{\kappa r} \frac{\sqrt{\sum r \theta_j}}{\sqrt{\sum r \theta_j}} dr \right)^2 \leq \left(\int_1^{\kappa r} \sum r \theta_j dr \right) \left(\int_1^{\kappa r} \frac{dr}{\sum r \theta_j} \right).$$

よって

$$\sum \pi \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{r \theta_j(r)} \geq \pi N^2 \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{\sum r \theta_j(r)} \geq \frac{\pi N^2 (\kappa r - 1)^2}{\int_1^{\kappa r} \sum r \theta_j(r) dr}.$$

性質 (2) と平均して $\operatorname{len}(\{\operatorname{Re} s = \operatorname{const.}\} \cap \bigcup D'_j) \leq 2\pi/q$ が成り立つことにより, 図 2 を見ると, $\bigcup D_j$ の半径 r までの面積は $\bigcup D_j$ の実部 $\frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi ip/q|}$ r までの面積ではおさえられることがわかる. よって次を得る.

$$\begin{aligned} \int_1^{\kappa r} \sum r \theta_j(r) dr &\leq \int_0^{\frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi ip/q|} \kappa r} \operatorname{len}(\{\operatorname{Re} s = \xi\} \cap \bigcup D'_j) d\xi + \operatorname{const.} \\ &\leq \frac{2\pi}{q} \frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi ip/q|} \kappa(r + \operatorname{const.}). \end{aligned}$$

故に, 式 (3) の右辺は次のように評価できる.

$$\sum_{j=1}^N \pi \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{r \theta_j(r)} \geq \frac{N^2 q |\log \lambda - 2\pi i p/q|}{2 \operatorname{Re} \log \lambda} \frac{(\kappa r - 1)^2}{\kappa(r + \operatorname{const.})} - \operatorname{const.} \quad (4)$$

続いて, 式 (3) の左辺を評価しよう. $|e^s| = e^{\operatorname{Re} s}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \log \max_{|s|=r} w_j(s) &\leq N \log \max_{s \in \bigcup D'_j, |s|=r} v(e^s) \\ &\leq \max_{s \in \bigcup D'_j, |s|=r} N \operatorname{Re} s \cdot \frac{\log |u(e^s)|}{\log |e^s|}. \end{aligned} \quad (5)$$

以上の不等式, (3), (4), (5) を合わせると

$$\max_{s \in \bigcup D'_j, |s|=r} N \operatorname{Re} s \cdot \frac{\log |u(e^s)|}{\log |e^s|} \geq \frac{N^2 q |\log \lambda - 2\pi i p/q|}{2 \operatorname{Re} \log \lambda} \frac{(\kappa r - 1)^2}{\kappa(r + \operatorname{const.})} - \operatorname{const.}$$

を得る. 両辺を r で割り, $r \rightarrow \infty$ とすると次を得る.

$$N \frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi i p/q|} \operatorname{ord} u \geq \frac{N^2 q |\log \lambda - 2\pi i p/q|}{2 \operatorname{Re} \log \lambda} \kappa,$$

ここで, $\operatorname{Re} s/|s|$ が $\operatorname{Re} \log \lambda/|\log \lambda - 2\pi i p/q|$ に収束することを用いた. 更に, $\operatorname{ord} u = \log d / \operatorname{Re} \log \lambda$ と, κ ($1/e \leq \kappa < 1$) が任意だったことを使うと

$$\frac{N \log d}{|\log \lambda - 2\pi i p/q|} \geq \frac{N^2 q |\log \lambda - 2\pi i p/q|}{2 \operatorname{Re} \log \lambda}.$$

が導かれる. これは Yoccoz の不等式である. □

Yoccoz の不等式と Ahlfors の Spiral 定理は深い関係があることに注意しておく. 例えば, [H, Theorem 8.21.] を参照のこと. 実際, 力学系のパラメタを無理矢理 Ahlfors の Spiral 定理に当てはめると, Yoccoz の不等式が形式的に現れる. Ahlfors の Spiral 定理の証明を丁寧に見れば, 正しく Yoccoz の不等式を導き出せると予想しているが, 著者は確認していない. なお, Ahlfors の Spiral 定理も Tsuji の不等式に基づいて証明されるが, その証明までには非常に手間がかかる.

2 多変数多項式力学系のとき

$f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ を dynamical degree $d > 1$ の多項式とする. $z \in \mathbb{C}^m$ に対し,

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|f^n(z)\|$$

が定まって

$$\begin{aligned} G &\in \operatorname{PSH}(\mathbb{C}^m), \\ G \circ f(z) &= d \cdot G(z) \end{aligned}$$

を満たすと仮定する. $E = G^{-1}(0)$ とおく. 一般には $E \supset K$ しか分らないが, $m = 2$ で f が一般 Hénon 写像のときは $E = K$ であることが知られている.

$a \in \mathbb{C}^m$ を f の固定点とし, ある $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$ に対し,

$$\begin{aligned} f \circ \phi(t) &= \phi(\lambda t), \quad (t \in \mathbb{C}), \\ \phi(0) &= a, \quad \phi'(0) \neq 0 \end{aligned}$$

を満たす正則な $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^m$ が存在すると仮定する. ϕ としては, 例えば saddle point に対する Schröder 方程式の解がある. このときの ϕ は不安定多様体を表している. [MNTU] 参照.

さて, $\tilde{E} = \phi^{-1}(E)$ とおくと, $\tilde{E}$ は $t \mapsto \lambda t$ で不変で, 次の命題を満たす.

命題 2.1. 以下は同値.

1. $\tilde{E}$ は bridged, すなわち 0 を含む成分が非有界 (bridged の定義).
2. $\tilde{E}$ の 0 を含む成分が 1 点でない.
3. $\tilde{E}$ は非有界成分を持つ.

この命題の証明のため, 以下の準備をする.

$\varepsilon > 0$ に対し, $x, y \in \mathbb{C}$ を結ぶ ε -chain とは, 順序つき有限集合 $\{c_1, \dots, c_l\} \subset \mathbb{C}$ で,

$$c_1 = x, \quad |c_{i+1} - c_i| < \varepsilon, \quad (0 < i < l), \quad c_l = y$$

を満たすもののことをいう.

補題 2.2. $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ を正数の単調減少列で 0 に収束するとする. $C_j = \{c_{j1}, \dots, c_{jl_j}\}$ を ε_j -chain の列で, c_{j1} は 0 に収束し, $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ は相対 compact とする. このとき, ω -limit set:

$$L = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcap_{j=k}^{\infty} C_j}$$

は compact で連結である.

証明. L が非連結と仮定すると, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ なる compact 集合 L_1, L_2 が存在する. $a \in L_1$ としてよい. $r = d(L_1, L_2)$ とし,

$$I = \{x \in S \mid r/3 \leq d(x, L_1) \leq 2r/3\},$$

とおくと I は compact である. すると, C_j は I と無限個の j について交わる. なぜなら, $c_{j1} \rightarrow 0$ でありかつ, $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列で L_2 に接近するものがあるからである. 従って $I \cap L \neq \emptyset$, すなわち, $L \not\subset L_1 \cup L_2 = L$. これは矛盾である. $\square$

命題 2.1 の証明. 1 と 2 が同値なのは容易にわかり, 1 から 3 が従うのも自明. 3 から 2 を示す.

$\tilde{E}_{\infty}$ を $\tilde{E}$ のある非有界成分とする. R を十分大きい正数, ε_j を 0 に収束する正值単調減少列とする. $b \in \tilde{E}_{\infty}$ をとり, $c_{j1} = \frac{1}{\lambda^j} b$ とおく. $\frac{1}{\lambda^j} \tilde{E}_{\infty}$ は非有界だから, $\frac{1}{\lambda^j} \tilde{E}_{\infty}$ 上に c_{j1} から $|t| > R$ まで延びる ε_j -chain をとり, $|t| = R$ をまたいだ瞬間に chain を切断することで, 一様に有界な ε_j -chain の列 $\{C_j\}$ を作るができる. 補題 2.2 により, ω -limit set L は連結になる. また, 明らかに $0 \in L$, $L \cap \{|t| = R\} \neq \emptyset$, $L \subset \tilde{E}$ が成り立つ. これは 2 を意味する. $\square$

定理 2.3 (Yoccoz の不等式). $\tilde{E}$ が命題 2.1 の条件を満たし, $\tilde{E} \neq \mathbb{C}$ であるとき,

$$\frac{\operatorname{Re} \log \lambda}{|\log \lambda - 2\pi i p/q|^2} \geq \frac{Nq}{2 \log d}$$

が成り立つ.

証明は 1 変数の場合と全く同じである. 一般的な設定でこの不等式が何を意味するかは不明だが, a が saddle point のときは, E を不安定多様体で切断したときの断面の構造を記述している.

参考文献

- [BuH] Buff X., Hubbard J. H., Yoccoz inequality for Hénon mappings., Cornell University.
- [BS1] Bedford E., Smillie J., Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity, *Invent. math.* 103 (1991), 69–99.
- [BS2] Bedford E., Smillie J., Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. II: Stable manifolds and recurrence, *Journal of the American Mathematical Society*, 4 (1991), 657–679.
- [EL] Erëmenko A. È., Levin G. M., Periodic Points of Polynomials, *Ukrainian Math. J.* 41 (1989), 1258–1262.
- [H] Hayman W. K., Subharmonic Functions, Volume 2, Academic Press (1989).
- [MNTU] Morosawa S., Nishimura Y., Taniguchi M., Ueda T., Holomorphic dynamics, Cambridge University Press (1999).
- [P] Petersen C. L., On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1993), 13, 785–806.
- [T] Tsuji M., Potential Theory, Maruzen (1959).