

MHD シア一流の線形安定性と構造形成

岡大工 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro Yanase)

岡大工 水口 雅博 (Masahiro Mizuguchi)

Univ. Washington J. J. Riley

I. 定式化

磁気流体中に, 図 1 に示すような $\mathbf{u} = (U(z), 0, 0) = U(z)\mathbf{i}$ で与えられる単純剪断流が存在するとする. 系全体は一定の角速度 $\mathbf{\Omega} = (0, \Omega, 0) = \Omega\mathbf{j}$ で y 軸の回りに一様回転し, さらに, 一様磁場 $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{j}$ が y 方向に存在すると仮定する.

回転系における非圧縮性磁気流体の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0\mu_0}(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} = -\nabla\tilde{p} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1)$$

である. ここで $\mathbf{u}$ は速度, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度, $\mathbf{b}$ は磁場, $\tilde{p}$ は一般化圧力である. 磁場の誘導方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \lambda\nabla^2\mathbf{b}, \quad (2)$$

となる. 基礎方程式 (1), (2) は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{b}$ に対する非圧縮条件と共に閉じた方程式系をなす.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (3)$$

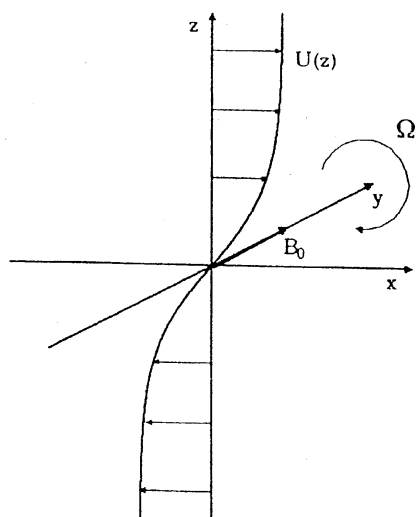


図 1 MHD シア一流の配置図

全ての変数を無次元化して取り扱う。速度 $\mathbf{u}$ は単純剪断流の代表速度 U_0 で、磁場 $\mathbf{b}$ は $U_0\sqrt{\rho_0\mu_0}$ で、一般化圧力 $\tilde{p}$ は U_0^2 で、位置ベクトル $\mathbf{x}$ は一様剪断流の代表長さ L で、磁場 $\boldsymbol{\omega}$ は U_0L で無次元化する。これにより式 (1) と (2) は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{Ro}\mathbf{j} \times \mathbf{u} - (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} = -\nabla\tilde{p} + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{Rm}\nabla^2\mathbf{b}. \quad (5)$$

ここで $Ro = U_0/2\Omega L$ はロスビー数, $Re = U_0L/\nu$ はレイノルズ数, $Rm = U_0L/\lambda$ は磁気レイノルズ数である。

本研究では定常な一様剪断流を仮定してその線形安定性を調べる。一様剪断流として次元のある形で以下のように与えられるものを採用する。

$$U(z) = U_0 \tanh(z/L). \quad (6)$$

すると定常状態は次の諸式で表現される。

$$\bar{\mathbf{u}} = U(z)\mathbf{i}, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = U'(z)\mathbf{j}, \quad \bar{\mathbf{b}} = A\mathbf{j}. \quad (7)$$

ここで $U(z) = \tanh z$, $A = B_0/U_0\sqrt{\rho_0\mu_0}$ はアルベーン数である。 $U'(z) > 0$ であるから平均渦度は y 方向である。 $Ro > 0$ の場合、平均渦度と系の一様回転は平行で、これをサイクロニック系と呼ぶことにする。 $Ro < 0$ の場合は、平均渦度と系の一様回転は反平行で、これをアンティサイクロニック系と呼ぶことにする。

微少攪乱 $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\mathbf{b}}$ を加え、方程式を線形化する。その結果得られた運動方程式の回転の z 成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\omega}_z - \left(U'(z) + \frac{1}{Ro}\right)\frac{\partial\hat{u}_z}{\partial y} - A\frac{\partial\hat{c}_z}{\partial y} = \frac{1}{Re}\nabla^2\hat{\omega}_z, \quad (8)$$

となる。ここで $\hat{c}_z$ は $\hat{\mathbf{c}} = \nabla \times \hat{\mathbf{b}}$ の z 成分である。運動方程式の回転を2度取って得られた方程式の z 成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\hat{u}_z - U''(z)\frac{\partial\hat{u}_z}{\partial x} + \frac{1}{Ro}\frac{\partial\hat{\omega}_z}{\partial y} - A\frac{\partial\Delta\hat{b}_z}{\partial y} = \frac{1}{Re}\nabla^2\Delta\hat{u}_z. \quad (9)$$

磁気誘導方程式の回転を取った式の z 成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{c}_z - A\frac{\partial\hat{\omega}_z}{\partial y} + U'(z)\frac{\partial\hat{b}_z}{\partial y} = \frac{1}{Rm}\nabla^2\hat{c}_z, \quad (10)$$

となり、磁気誘導方程式の z 成分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{b}_z - A\frac{\partial\hat{u}_z}{\partial y} = \frac{1}{R_m}\nabla^2\hat{b}_z, \quad (11)$$

である。

攪乱を x 方向と y 方向にフーリエ展開する。

$$\hat{f}(x, y, z) = f(z) \exp[i(\alpha x + \beta y - nt)]. \quad (12)$$

ここで f は任意の攪乱を表す。最後に次のような線形安定性の基礎方程式系が得られる。

$$in\omega_z = \left[i\alpha U(z) - \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)\right]\omega_z - i\beta\left(U'(z) + \frac{1}{Re}\right)u_z - i\beta A c_z, \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} in(D^2 - k^2)u_z &= \left[i\alpha U(z) - \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)\right](D^2 - k^2)u_z - i\alpha U''(z)u_z \\ &\quad + \frac{1}{Ro}i\beta\omega_z - i\beta A(D^2 - k^2)b_z, \end{aligned} \quad (13b)$$

$$inc_z = \left[i\alpha U(z) - \frac{1}{R_m}(D^2 - k^2)\right]c_z - i\beta A\omega_z + i\beta U'(z)b_z, \quad (13c)$$

$$inb_z = \left[i\alpha U(z) - \frac{1}{R_m}(D^2 - k^2)\right]b_z - i\beta A u_z. \quad (13d)$$

ここで $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $D = d/dz$ である。

II. 固有値問題の数値計算結果

2.1 固有値

系がサイクロニックである場合 ($Ro > 0$), 磁気流体の線形安定性の性質は磁場のない回転剪断流のそれと定性的に類似である。しかし、一様磁場が一様回転に加え、さらに $\beta \neq 0$ モードを抑制するため、ケルビン・ヘルムホルツ不安定の不安定領域は一層 α 軸に接近する。 $|A|$ が大きくなるにつれ、不安定モードは極端に 2 次元的 ($|\beta| \ll 1$) な構造となる。

系がアンティサイクロニックである場合 ($Ro < 0$), 磁気流体の線形安定性は磁場のない場合と比べると大きく変化する. もっとも, ケルビン・ヘルムホルツ不安定とシア・コリオリ不安定以外の新しい不安定モードは見つけられなかった. 線形増幅率 σ の $\alpha - \beta$ 平面上の等高線を, 図 2 に $A = 0.1$ に対して, 図 3 に $A = 0.5$ に対して, 図 4 に $A = 1$ に対して示す. ここでは, σ のゼロまたは正值に対応する等高線のみを示した. それぞれの図における等高線の間隔は 0.025 である.

α 軸の近くの $\sigma > 0$ となる不安定領域は, ケルビン・ヘルムホルツ不安定に対応している. β 軸の近くの不安定領域はシア・コリオリ不安定に対応している. ケルビン・ヘルムホルツ不安定はどの場合も定性的に変化しない. なぜなら $\beta = 0$ モードは一樣回転のみならず, 磁場によっても影響されないからである. しかし次の点が特徴的である. ケルビン・ヘルムホルツ不安定に対応する不安定領域と, シア・コリオリ不安定に対応する不安定領域は $|Ro|$ が小さくなるにつれ明確に分かれていき, この傾向は A が大きくなるにつれてより強調される. 図 2(c) と 3(a), 4(a) を比較すると, A が小さく $|Ro|$ が大きい場合は, 2つの不安定領域を橋渡しする不安定領域が存在することが見られる. 従って, 一樣磁場はケルビン・ヘルムホルツ不安定と, シア・コリオリ不安定の間の中間的な不安定を抑制することが分かる.

シア・コリオリ不安定に対応する不安定領域は2つの大きな特徴を持っている. 一つは不安定領域が $Ro^{-1} < -1$ であっても β 軸に接近しながら存在することで, この傾向は A が大きくなるにつれ顕著となる. 一樣磁場の存在しない場合は $-1 < Ro^{-1} < 0$ のみシア・コリオリ不安定が存在することに注意していただきたい. もう一つは不安定領域が $\beta = \beta_0 > 0$ で鋭い境界を持っていることである. これも一樣磁場のない場合には見られなかった現象である. なお, $|Ro^{-1}|$ をさらに増加させると, 図 4(f) に見られるような粘性効果に伴う新たな境界が現れる.

一樣磁場が存在しないときは ($A = 0$) 非粘性の極限では無限に大きな y 方向の波数 β に伴う不安定モードが存在したのに対して, 一樣磁場が存在する場合 ($A \neq 0$) は, $|Ro^{-1}|$ が小さいとき, y 方向の波数が比較的小さな有限値で押さえられるのは大変面白い現象である. このことはシア・コリオリ不安定によって成長する攪乱の構造が, 一樣磁場がある場合は, ない場合と比べると y 方向に比較的大きな構造を持つことを示している.

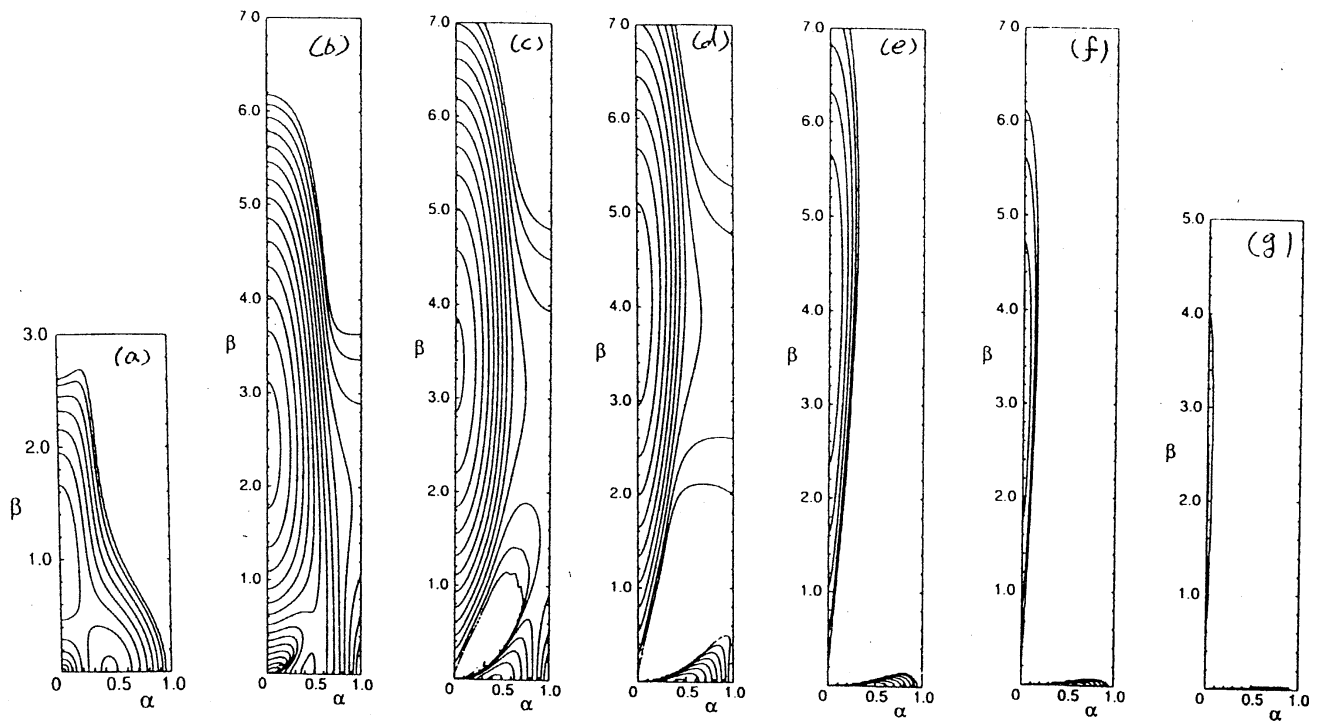


図 2 $A = 0.1$ に対する増幅率 σ の等高線. (a) $Ro = -10$, (b) $Ro = -1.67$, (c) $Ro = -1$, (d) $Ro = -0.67$, (e) $Ro = -0.33$, (f) $Ro = -0.2$ and (g) $Ro = -0.1$.

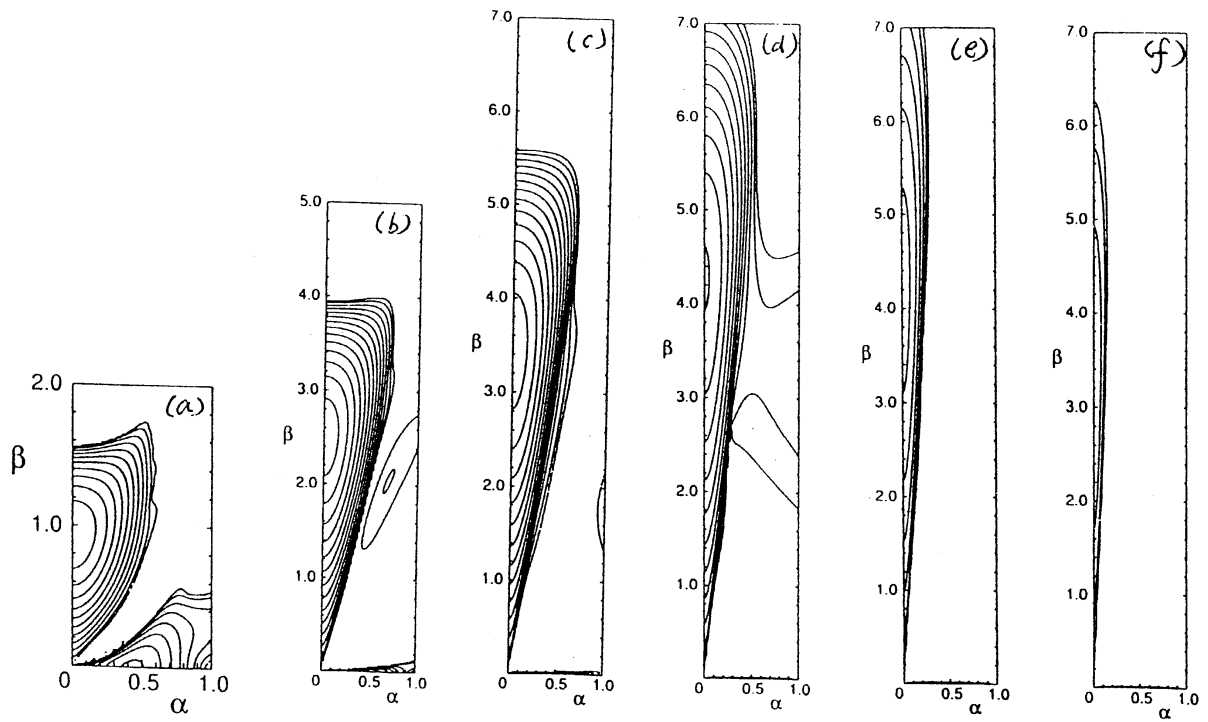


図 3 $A = 0.5$ に対する増幅率 σ の等高線. (a) $Ro = -1$, (b) $Ro = -0.2$, (c) $Ro = -0.1$, (d) $Ro = -0.05$, (e) $Ro = -0.02$ and (f) $Ro = -0.01$.

図 3(b) や 4(b) に見られる孤立した不安定領域が新しい不安定モードに対応するのか、それとも数値計算上の誤差であるのかは今のところ不明である。

シアー・コリオリ不安定に対する増幅率 σ の最大値 σ_m は $\alpha = 0, \beta = \beta_m > 0$ で実現される。 σ_m を $\sqrt{|Ro|}$ の関数として図 5 に示す。 σ_m の最大値は $A = 0.1, 0.5, 1$ の全ての場合に対して約 0.34 で、 A が大きくなるにつれて減少するロスビー数の値 $|Ro| = Ro^*$ で到達される。このことは一様磁場が強くなるにつれ、より高速度の系の一樣回転の下で最も増幅率の大きい攪乱が発生することを意味している。同じ図にケルビン・ヘルムホルツ不安定の最大増幅率を示した。この値は約 0.18 で $\alpha = 0.44, \beta = 0$ で実現される。図 5 で、ケルビン・ヘルムホルツ不安定またはシアー・コリオリ不安定に対応する増幅率曲線のどちらが上になるか下になるかに従って、どちらのモードがより早く成長するかが判断できる。

図 6 に β_m を $\sqrt{|Ro|}$ の関数として示す。 β_m の最大値は約 4.4 でケルビン・ヘルムホルツ不安定性に対応する波数の約 10 倍である。 $A = 0.1, 0.5, 1$ 全ての場合に対して、 A が大きくなるにつれて小さくなるロスビー数の値 $|Ro| = Ro^\dagger$ で達成される。このことは一様磁場が強くなるにつれて、より高速の系の一樣回転の下で最も小さな構造が発達していくことを意味している。図 5 と図 6 を比較すると $Ro^* > Ro^\dagger$ であることが分かる。従って、最も大きな増幅率を持つ不安定モードが必ずしも最も小さな構造であるとは限らないことが結論される。

2.2 固有関数

シアー・コリオリ不安定に伴う攪乱の空間構造を調べるため、最大増幅率を持つモードの固有関数を求めた。2つの場合をここで示す。一つは図 7 で $A = 0.1, Ro = -2$ で、もう一つは図 8 で $A = 0.5, Ro = -2$ である。図 7(a) と図 8(a) は ω_x の実部 (実線)、虚部 (点線) を、図 7(b) と図 8(b) は ω_y を、図 7(c) と図 8(c) は b_y を示す。

まず固有関数は $z = 0$ に関して対称または反対称であることが分かる。これはケルビン・ヘルムホルツ不安定に対応する攪乱が非対称であるのと比較すると面白い。また攪乱の分布は $z = 0$ 近傍に集中していることが分かる。

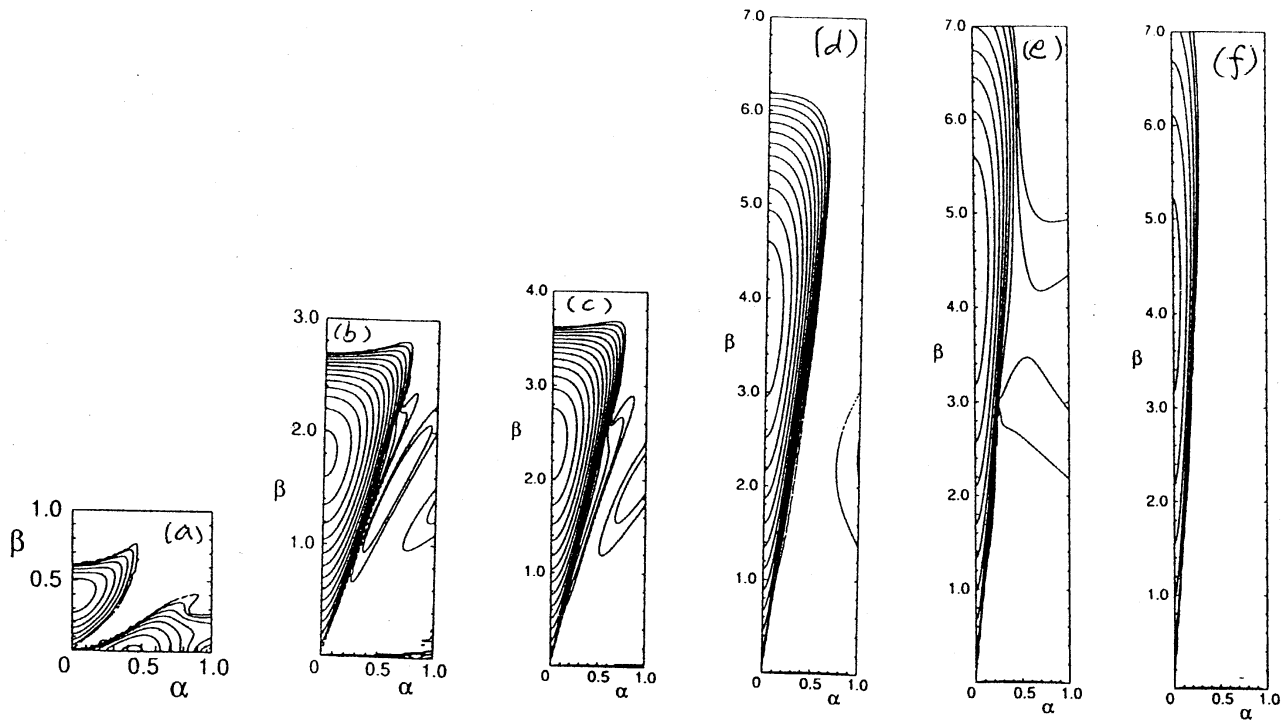


図 4 $A = 1$ に対する増幅率 σ の等高線. (a) $Ro = -1$, (b) $Ro = -0.1$, (c) $Ro = -0.06$, (d) $Ro = -0.02$, (e) $Ro = -0.01$ and (f) $Ro = -0.005$.

図 5 最大増幅率 σ_m を $\sqrt{|Ro|}$ の関数として示す. $A = 0$ (——), $A = 0.1$ (---), 0.5 (----), 1 (-----).

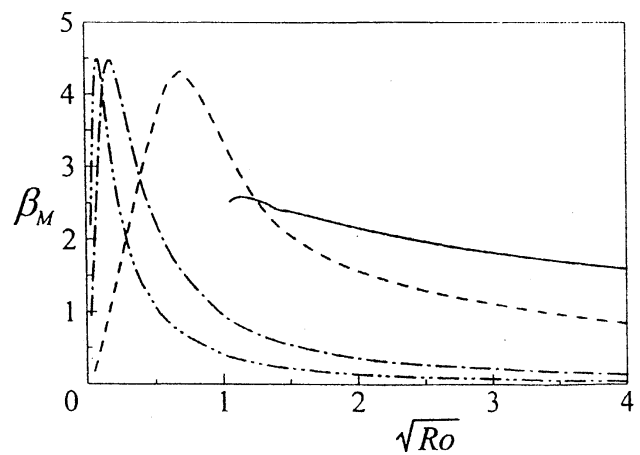
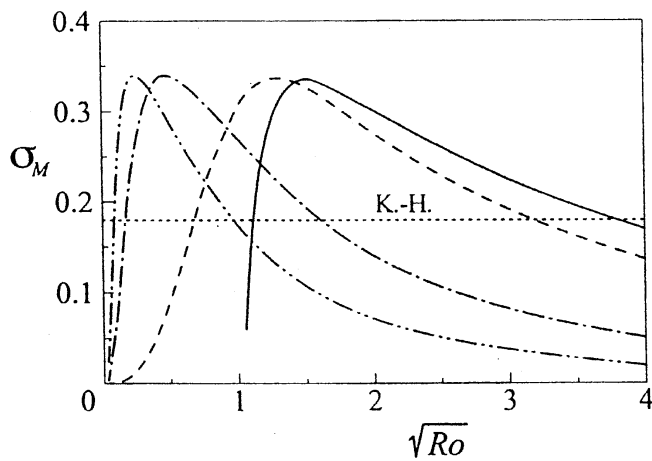


図 6 最大増幅率を与える波数 β_m を $\sqrt{|Ro|}$ の関数として示す. $A = 0$ (——), $A = 0.1$ (---), 0.5 (----), 1 (-----).

攪乱の z 方向の広がり の程度を 求めるため、攪乱の実部または虚部の絶対値が、初めてそれぞれの最大値の 1% になる点 z_0 を計算した。ここで実部と虚部の両方が存在する場合は、絶対値の大きい方を採用した。図 9(a) に ω_x に対する z_0 を $\sqrt{|Ro|}$ の関数として、図 9(b) に b_y に対する z_0 を示した。それぞれの図で $A = 0.1, 0.5, 1$ に対応する 3 本の曲線を引いた。 $|Ro|$ が最大値 4 がら減少するにつれて最初 z_0 は小さくなり、極小値を経過した後また増加することが分かる。この傾向は図 6 における β_m の変化と類似している。 z_0 の大きさが $2\pi/\beta_m$ と同じオーダーであることを考えると、シア・コリオリ不安定の不安定モードは $y-z$ 面で見ると円形からそれほど離れていない形状で発達していくことが予想される。

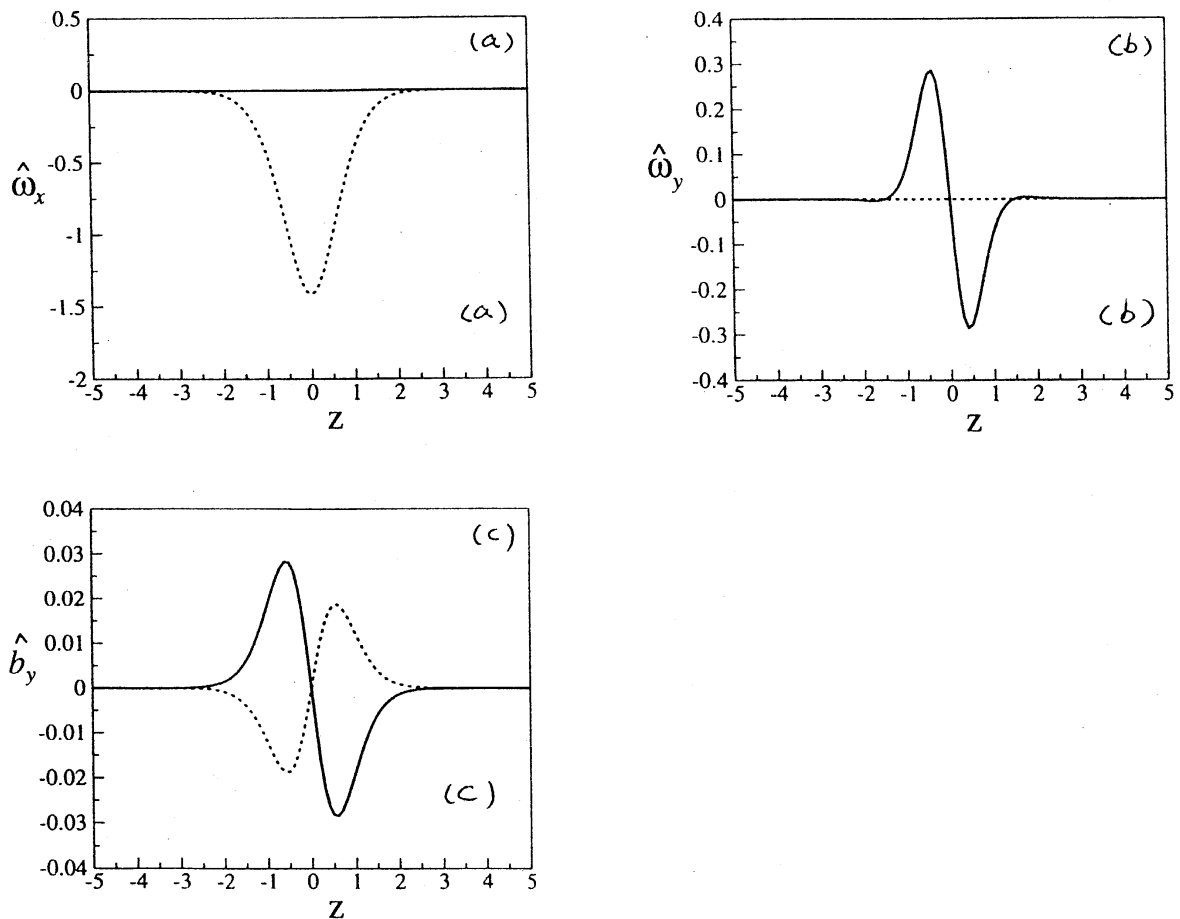


図 7 $A = 0.1, Ro = -2$ の場合の最大増幅率を持つ固有関数. (a) ω_x , (b) ω_y , (c) b_y .

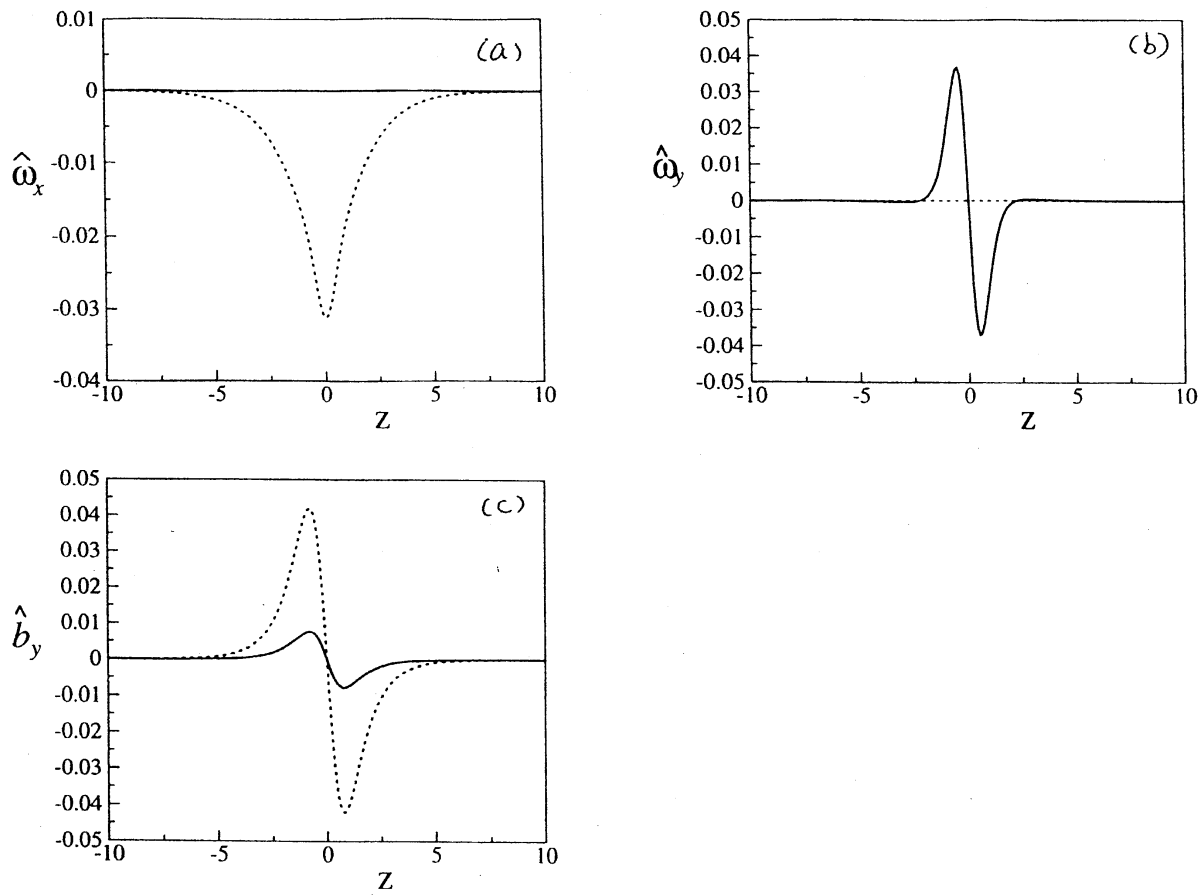


図 8 $A = 0.5, Ro = -2$ の場合の最大増幅率を持つ固有関数. (a) ω_x , (b) ω_y , (c) b_y .

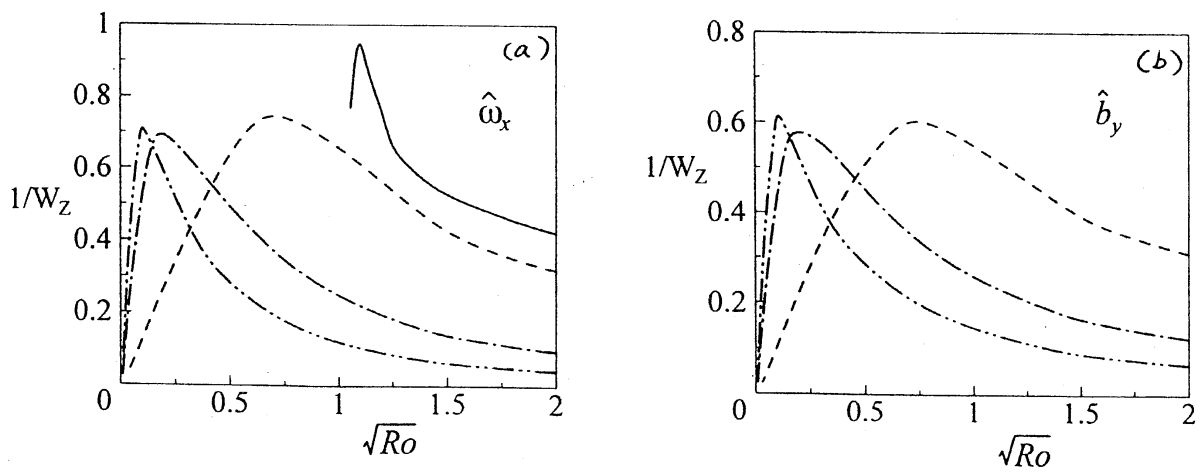


図 9 攪乱の z 方向の広がり z_0 . (a) ω_x , (b) b_y . $A = 0$ (—), $A = 0.1$ (---), 0.5 (- - -), 1 (----).

しかし $A = 1$ における ω_x と b_y に対する z_0 はかなり異なっていることに注意する必要がある. このことは特に一様磁場が強い場合に z 方向の広がり定義するのに慎重な取り扱いが必要であることを暗示している.

参考文献

- (1) P. R. Spalart, R. D. Moser and M. M. Rogers : J. Compt. Phys. **96** (1991) 297.
- (2) R. W. Metcalfe, S. A. Orszag, M. E. Brachet, S. Menon and J. J. Riley: J. Fluid Mech. **184** (1987) 207.
- (3) A. B. Cain, J. H. Ferziger and W. C. Reynolds : J. Compt. Phys. **56** (1984) 272.
- (4) S. A. Orszag : J. Fluid Mech. **50** (1971) 689.
- (5) S. Yanase, C. Flores, O. Métais and J. J. Riley : Phys. Fluids. **A5** (1993) 2725.
- (6) S. A. Balbus and J. F. Hawley : Astrophys. J. **376** (1991) 214.
- (7) T. Tajima and K. Shibata : *Plasma Astrophysics* (Addison-Wesley, Reading, 1997).
- (8) P. Bradshaw : J. Fluid Mech. **36** (1969) 177.
- (9) T. J. Pedley : J. Fluid Mech. **35** (1969) 97.
- (10) S. Leblanc and C. Cambon : Phys. Fluids **9** (1997) 1307.