

ある関数とクオーク分解に関して

東京大学・数理解析研究科 澤野嘉宏 (Yoshihiro Sawano)
 Graduate School of Mathematical Sciences,
 The University of Tokyo
 大阪教育大学・教育学部 米田剛 (Tsuyoshi Yoneda)
 Department of Mathematics,
 Osaka Kyoiku University

1 関数微分方程式 $f'(x) = f(x-1)$.

今回の研究の目的はこの微分方程式を解くことにある. 関数微分方程式 $f'(x) = f(x-1)$ は物理学, 生物学において重要な役割を果たす方程式である.

次の事実は比較的容易に示すことが出来る.

定理 1. $g(x)$ を $[0, 1]$ 上で定義された関数とする. このとき, $f'(x) = f(x-1), x \geq 1$ の解は一意的に決まる.

帰納的に, 解作用素

$$\begin{aligned} T_n : f|_{[n-1, n]} &\rightarrow f(x) := f(n) + \int_n^x f'(t) dt \\ &= f(n) + \int_n^x f(t-1) dt, x \in [n, n+1] \end{aligned}$$

で解を定めればよいからである.

初めに簡単な例を見てみることにする.

$g(x) = x^2 + 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \rightarrow f(1) &= 3 \\ \rightarrow f|_{[1, 2)} &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{2}{3} \\ \rightarrow f(2) &= \frac{16}{3} \\ \rightarrow f|_{[2, 3)} &= \frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{11}{3}x + \frac{32}{3} \\ \rightarrow &\dots \end{aligned}$$

2 特殊微分方程式 $f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$

講演者は次の結果を得ることが出来た。

定理 2. $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ かつ $f(0) = 1$ とする. f が微分可能で

$$f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$$

を満たしているとき, f は次の性質を有する.

1. $f \in C^\infty(\mathbf{R})$
2. $\text{supp}(f) = [-1, 1]$
3. $\int f(x) dx = 1$
4. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x-j) \equiv 1$

以後, この f を Y-関数と呼ぶことにする. 米田はさらに一般の方程式を

$$f^{(n)}(x) = \lambda^{n+1} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \beta_j^n \sum_{l=0}^n {}_nC_l f\left(\lambda x - \frac{l - n/2 + nk_j}{\beta_j}\right)$$

考えた. ここで, $\lambda > 1$. 詳しい計算は [Yoneda1]–[Yoneda4] でされているので一般的な理論はそちらを参照されたい. これらの根幹を成している研究としてさらに一般の関数方程式 $f'(x) = f(g(x))$ が [Kato] や [Kato-McLeod] などであげられる.

Y-関数特有な性質を見るうえで, 役に立つ等式をあげておく.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_1 * v_2 * \dots * v_m(x) = u(x), \text{ in } L^1(\mathbf{R}), \text{ uniformly}$$

ここで, $v := \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$ として dilation を $v_j(x) := 2^j v(2^j x)$, $j \in \mathbf{N}$ とおいた.

Y-関数の利点は一般の方程式 $f'(x) = f(g(x))$ とは違いグラフを簡単に描画できることである.

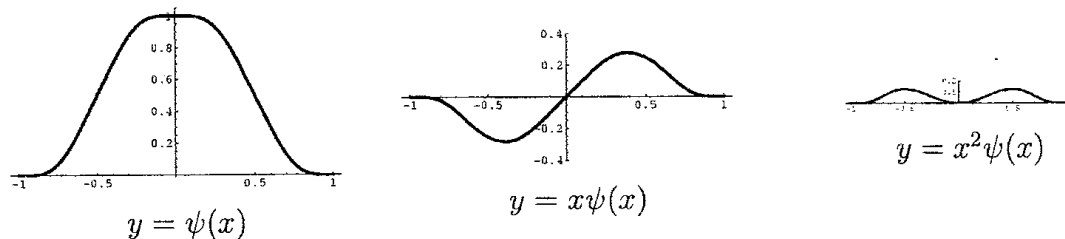


図 1:

3 クオーク分解

3.1 記号

Triebel の記号にしたがって関数空間を定義する. この分野の重要な教科書として [Triebel- β]-[Triebel- ϵ] をあげておく.

$$1. \mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots, \}$$

$$2. \psi^\beta(x) = x^\beta \psi(x) \quad \text{ここで, } \beta \in \mathbf{N}_0$$

$$3. (\beta q u)_{\nu, m}(x) = 2^{-\nu(s-n/p)} \psi(2^\nu x - m) \quad \text{ここで, } \nu \in \mathbf{N}_0 \text{ かつ } s \in \mathbf{R}, 0 < p \leq \infty$$

$$4. 0 < p \leq \infty \text{ のとき, } \chi_{\nu, m}^{(p)}(x) := 2^{\frac{\nu}{p}} \chi_{[m-2^{-\nu}, m+2^{-\nu}]}$$

$$5. 0 < p, q \leq \infty \text{ のとき, } \{f_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}_0} \text{ に対して,}$$

$$\|f_\nu : L^p(l^q)\| := \left(\int \left(\sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} |f_\nu(x)|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$6. 0 < p, q \leq \infty \text{ のとき, } \{f_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}_0} \text{ に対して,}$$

$$\|f_\nu : l^q(L^p)\| := \left(\sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \left(\int |f_\nu(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$7. 0 < p, q \leq \infty \text{ のとき, } \lambda := \{\lambda_{\nu, m}\}_{\nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}} \text{ に対して,}$$

$$\|\lambda : f_{pq}\| := \left\| \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu, m} \chi_{\nu, m}^{(p)} : L^p(l^q) \right\|$$

$$8. 0 < p, q \leq \infty \text{ のとき, } \lambda := \{\lambda_{\nu, m}\}_{\nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}} \text{ に対して,}$$

$$\|\lambda : f_{pq}\| := \left\| \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu, m} \chi_{\nu, m}^{(p)} : l^q(L^p) \right\|$$

$$9. 0 < p, q \leq \infty, \rho > 0 \text{ のとき, } \lambda := \{\lambda^\beta\}_{\beta \in \mathbf{N}_0} := \{\lambda_{\nu, m}^\beta\}_{\nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}, \beta \in \mathbf{N}_0} \text{ に対して,}$$

$$\|\lambda : f_{pq}\|_\rho := \sup_{\beta \in \mathbf{N}_0} 2^{\rho\beta} \|\lambda^\beta : f_{pq}\|$$

$$\|\lambda : b_{pq}\|_\rho := \sup_{\beta \in \mathbf{N}_0} 2^{\rho\beta} \|\lambda^\beta : b_{pq}\|$$

3.2 関数空間の定義

先ほどの記号のもと

1. $0 < p, q \leq \infty, s > (1/\min(1, p) - 1)$ とする. このとき, $B_{pq}^s(\mathbf{R})$ を $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ で

$$f = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu, m}^\beta (\beta q u)_{\nu, m}(x)$$

と分解されるものとする. ノルムは

$$\|f : B_{pq}^s(\mathbf{R})\| := \inf \|\lambda : b_{pq}(\mathbf{R})\|_\rho$$

で与えられるものとする. ここで, $\inf$ は先ほどの表現の

$$\lambda := \{\lambda_{\nu, m}^\beta\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$$

で等式を実現させるものの全体からとっているとする.

2. $0 < p, q \leq \infty, s > (1/\min(1, p, q) - 1)$ とする. このとき, $F_{pq}^s(\mathbf{R})$ を $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ で

$$f = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu, m}^\beta (\beta q u)_{\nu, m}(x)$$

と分解されるものとする. ノルムは

$$\|f : F_{pq}^s(\mathbf{R})\| := \inf \|\lambda : f_{pq}(\mathbf{R})\|_\rho$$

で与えられるものとする. ここで, $\inf$ は先ほどの表現の

$$\lambda := \{\lambda_{\nu, m}^\beta\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$$

で等式を実現させるものの全体からとっているとする.

4 応用

われわれは次の問題をクオークの言葉で表現した.

Problem 3. $f'(x) = f(x-1), x \geq 1$ を初期条件 $f(x) = g(x), x \in [0, 1]$ のもと解け. ここで,

$$g(x) := \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \lambda_{\nu, m}^\beta (\beta q u)_{\nu, m}(x) \in F_{pq}^s(\mathbf{R}) \cup B_{pq}^s(\mathbf{R})$$

$s > 0, p, q > 1$ となっているとする.

われわれは元の特殊関数方程式

$$f'(x) = 2f(2x+1) - 2f(2x-1)$$

から、先ほどの問題を解作用素を用いて

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0} \sum_{\nu \in \mathbf{N}_0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \mu_{\nu, m}^{\beta} (\beta q u)_{\nu, m}(x) \in F_{pq}^s(\mathbf{R}) \cup B_{pq}^s(\mathbf{R})$$

と $x \in [1, 2]$ で表現することが出来た。ここで、

$$\lambda := \{\lambda_{\nu, m}^{\beta}\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}} \mapsto \mu := \{\mu_{\nu, m}^{\beta}\}_{\beta \in \mathbf{N}_0, \nu \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{Z}}$$

は線形である。

5 積分作用素

5.1 モーメント計算

補題 4. $\beta \in \mathbf{N}_0$ とする。 β -次モーメントを $c_{\beta} := \int_{\mathbf{R}} x^{\beta} \phi(x) dx$ で定義する。

(1) $|c_{\beta}| \leq \frac{2}{\beta+1} c_0 = 1$ である。 β が奇数のときは $c_{\beta} = 0$ となる。

(2) 偶数次モーメント $c_{2\beta}$ は次の式を満たす。

$$c_{2\beta} = \frac{1}{(2\beta+1)(4^{\beta}-1)} \sum_{\gamma=0}^{\beta-1} 2^{\beta+1} C_{2\gamma} \cdot c_{2\gamma} \quad \text{特に } c_2 = \frac{1}{9}.$$

5.2 繰り返し積分

Y-関数は次の繰り返し積分の公式を持つ。

補題 5. $I_{\beta}(\phi)$ を帰納的に定義していく。 :

$$I_0(\phi)(x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) du, \quad I_{\beta}(\phi)(x) = \int_{-\infty}^x I_{\beta-1}(\phi)(u) du. \quad (\beta = 1, 2, \dots)$$

すると具体的に $I_{\beta}(\phi)(x) = \sum_{j_{\beta+1}=0}^{\infty} \sum_{j_{\beta}=0}^{\infty} \dots \sum_{j_1=0}^{\infty} 2^{\frac{\beta(\beta+1)}{2}} \phi\left(\frac{x-2^{\beta+1}+1}{2^{\beta+1}} - \sum_{\gamma=1}^{\beta+1} \frac{j_{\gamma}}{2^{\gamma-1}}\right)$ とかけ

る。特に $I_0(\phi)(x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) du = \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{x-1-2j}{2}\right)$ 。

5.3 モーメント関数の不定積分

定義 6. Let $\beta \in \mathbb{N}_0$.

1. 補助的なクオークの元となる関数を

$$\Psi^\beta(x) := \int_{-\infty}^x u^\beta \phi(u) du - c_\beta \sum_{l=2}^{\infty} (0qu)_{\nu,l}(x)$$

で定義する. 定義よりコンパクト台を持つとわかる.

2. 積分作用素に対応するクオークを次のように定義する.

$$(\beta qu)_{\nu,m}^* := 2^{-\nu(s-\frac{1}{p})} \Psi^\beta(2^\nu x - m).$$

部分積分の多用で次の公式がわかる.

$$\text{補題 7. } \Psi^\beta(x) = \left(\sum_{\gamma=0}^{\beta} (-1)^\gamma P_\gamma x^{\beta-\gamma} I_\gamma(\phi(x)) \right) - c_\beta \sum_{l=2}^{\infty} (0qu)_{\nu,l}(x)$$

5.4 方程式へのアプローチ

以上の準備の下次の公式を得ることが出来た.

始めに $h \in A_{pq}^s(\mathbf{R})$ は $s > 0, p, q > 1$ の条件のもと

$$h = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle h, \Phi_{\nu,m}^\beta \rangle (\beta qu)_{\nu,m}(x)$$

と表せることに注意しておく. この関数 $\Phi_{\nu,m}^\beta \in \mathbf{S}$ を用いて具体的に解を構成する.
初期条件となる関数を

$$g(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{\nu,m}^\beta (\beta qu)_{\nu,m}$$

とクオーク分解する.

補助的クオークを $\theta_{\nu,m}^\beta = c_\beta \left\langle \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=0}^{2^\nu} 2^{-\nu} \lambda_{\nu,m}^\beta (\beta qu)_{\nu,m}^*(\cdot - 1), \Psi_{\nu,m}^\beta \right\rangle$ にしたがって表せば, 解作用素は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta, \nu, m} \lambda_{\nu,m}^\beta (\beta qu)_{\nu,m} \\ & \mapsto \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \left(c_\beta \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=2}^{2^\nu} \sum_{l=0}^{m-2} \lambda_{\nu,l}^\beta 2^{-\nu} (0qu)_{\nu,m+2^\nu}(x) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \theta_{\nu,m+2^\nu}^\beta (\beta qu)_{\nu,m}(x) \right) \end{aligned}$$

参考文献

- [Frederickson1] P. O. Frederickson, *Global solutions to certain nonlinear functional differential equations*. J. Math. Anal. Appl. 33 (1971), 355–358.
- [Frederickson2] P. O. Frederickson, *Dirichlet series solutions for certain functional differential equations*. Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations (Kyoto, 1971), 249–254. Lecture Notes in Math., Vol. 243, Springer, Berlin, 1971.
- [Kato] T. Kato, *Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$* , Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972), Academic Press, New York, 1972, 197–217.
- [Kato-McLeod] T. Kato and J. B. McLeod, *The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$* , Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 891–937.
- [Frazier-Jawerth] F. Michael and J. Björn, *A discrete transform and decompositions of distribution spaces*. J. Funct. Anal. 93 (1990), no. 1, 34–170.
- [Triebel- β] H. Triebel, *Theory of function spaces I*, Birkhäuser, 1983.
- [Triebel- δ] H. Triebel, *Fractal and Spectra*, Birkhäuser, 1997.
- [Triebel- ϵ] H. Triebel, *The structure of functions*, Birkhäuser, 2001.
- [Yoneda1] T. Yoneda, *Spline functions and n -periodic points*, Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, 15 (2005), 245–252.
- [Yoneda2] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type $f'(x) = af(2x)$ with $f(0) = 0$* , to appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- [Yoneda3] T. Yoneda, *On the functional-differential equation of advanced type $f'(x) = af(\lambda x)$, $\lambda > 1$ with $f(0) = 0$* , preprint.
- [Yoneda4] T. Yoneda, *On Functional differential equations with infinite series*, preprint.