

グラフの固有値について

日本医大	秋山	仁
東海大理	恵羅	博
上智大理工	斉藤	友克
専修大経営	佐藤	創

現在にいたるまで、グラフに対する簡明な形の不変数は知られていない。知られているグラフの不変数は多くあるが、グラフの隣接行列の固有値と重複度は、グラフ理論の興味ある数多くの問題を代数的に解明することが出来る点において重要と考えられる。

§ 1. グラフの固有値

ここでグラフとは、単純グラフとする。即ち、多重辺、ループを含まない無向グラフとする。グラフ G を $G=(V, E)$ と書き、 V を G の点集合、 E を G の線集合とし、 V, E の元をそれぞれ v_i, e_j と表わす。 ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$)

(定義1)

n 個の点をもつグラフ G の隣接行列 $A = (a_{ij})$ は、 G の点に適当に標識 $(v_1, \dots, v_n)$ を付け、点 v_i と v_j が隣接しているとき $a_{ij} = 1$ 、その他の場合に $a_{ij} = 0$ となる $n \times n$ 行列である。

このとき、 A は実対称行列となるから A のすべての固有値は実数となる。

(定義2)

n 個の点、 m 個の線をもつグラフ G の接合行列 X とは、点と線を適当に標識付け $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{e_1, \dots, e_m\}$ し、点 v_i と線 e_j とが接合していれば X の (i, j) 要素 $x_{ij} = 1$ 、そうでなければ $x_{ij} = 0$ として得られる $n \times m$ 行列である。

これらよりグラフの固有値、重複度に関する多くの結果が知られている。

(命題1)

グラフ G の隣接行列を A 、接合行列を X とすると

$$A = X^t X - K$$

ここで $K = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$ k_i ; v_i の次数

特に、 G が次数 n の正則グラフならば

$$A = X^T X - nI_n \quad (I_n; \text{単位行列})$$

(定義3)

グラフ H がグラフ G の全域部分グラフであるとは、 H が G の点をすべて含む部分グラフのことである。

(定義4)

G の隣接行列 A の固有値のことをグラフ G の固有値と呼ぶ。
又 G のスペクトラムとは、 G の固有値の分布で、これを
 $\text{Spec } G = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ で表わす。ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ は s 個の
相異なる G の固有値で $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$ とし、 λ_i の重複度を m_i と
する。

$$\text{従って、} \sum_{i=1}^s m_i = n.$$

(定義5)

G の最大固有値を G のノルムと呼んで $\|G\|$ で表わす。

このとき Schwarz の不等式より $\|G\| \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$
が得られる。

(命題2)

(i) グラフ H がグラフ G の部分グラフならば

$$\|H\| \leq \|G\|$$

(ii) グラフ G が連結ならば、最大固有値の重複度は 1 である。

証明

(i) H が G の全域部分グラフでなければ、適当に孤立点をつけて、 G の全域部分グラフ $\bar{H}$ とすることが出来る。この操作で作った $\bar{H}$ の固有値は、つけ加えた孤立点の個数の重複度だけ 0 が増えるだけである。

G の隣接行列を A 、 $\bar{H}$ の隣接行列を B とすると、各成分ごとに $a_{ij} \geq b_{ij}$ である。よって Perron-Frobenius の定理より、最大固有値は $\lambda_A \geq \lambda_B \geq 0$ となる。

(ii) G が連結なら隣接行列 A は非分離となるから、最大固有値の重複度は 1 となる。

(定義6)

グラフ G の固有多項式とは $\chi(\lambda, G) = \det(\lambda I_n - A)$ とする。

(命題3)

$\chi(\lambda, G)$ の n -次の係数 C_i とグラフの間には以下の関係がある。

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -m$$

$$C_3 = -2 \times (G \text{ に含まれる } 3 \text{ 角形の数})$$

$$C_4 = n_1 - 2n_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1: G \text{ に含まれる disjoint な edge} \\ \text{の pair の数} \\ n_2: G \text{ に含まれる長さ 4 の circuit} \\ \text{の数} \end{array} \right.$$

(命題4)

G を最大次数 d_1 、最小次数 d_2 のグラフとすれば

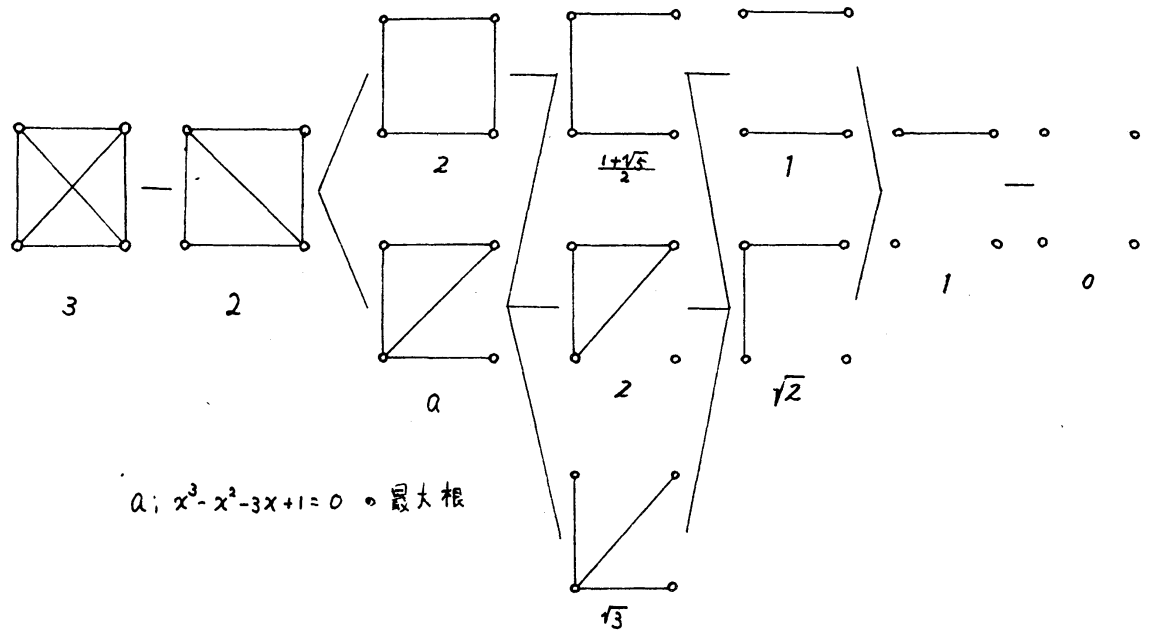
$$\max(d_2, \sqrt{d_1}) \leq \|G\| \leq d_1$$

(命題5)

G が二組グラフであるための必要十分条件は、スペクトラムが原点対称である。

(命題 6)

連結グラフ G が 2 組グラフであるための必要十分条件は、
 $\|G\|$ も G の固有値である。



§ 2. Line graph, Middle graph, Total graph の
 ノルム の 大 小 関 係

(命題 1)

$L(G)$ を グラフ G の 線グラフ とすると、 $L(G)$ の隣接行列 A_L は次の様に表わせる。

$$A_L = \tau X X - 2 I_m$$

ここで X は G の接合行列、 I_m は単位行列

(命題2)

$M(G)$ をグラフ G の中間グラフとすると、 $M(G)$ の隣接行列 A_M は次の様に表わせる

$$A_M = \begin{pmatrix} A_L & {}^tX \\ X & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} X : \text{接合行列} \\ 0 : \text{零行列} \end{array}$$

(命題3)

$T(G)$ をグラフ G の全グラフとすると、 $T(G)$ の隣接行列 A_T は次の様に表わせる。

$$A_T = \begin{pmatrix} A_L & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix}$$

(命題4)

$G, L(G), M(G), T(G)$ の間のノルムには以下の関係がある。

$$\|L(G)\| \leq \|M(G)\| \leq \|T(G)\|$$

$$\|G\| \leq \|T(G)\|$$

§ 3. $G, L(G), M(G), T(G)$ のスペクトラムの関係

(命題 1)

G を ℓ 次正則グラフとすると $L(G)$ 、 G の間の固有値と重複度の間には、以下の関係がある。 $L(G)$ 、 G の固有値をそれぞれ ρ 、 λ とすると

- (i) $\rho \neq -2$ 、 $\lambda \neq -\ell$ の固有値は $\lambda - \rho = 2 - \ell$ 対応し、重複度も一致する。
- (ii) $\rho = -2$ の重複度は $\dim(\text{Ker } {}^t X X)$ 、 $\lambda = -\ell$ の重複度は $\dim(\text{Ker } X {}^t X)$ で与えられる。

証明

A を G の隣接行列 $A_L \in L(G)$ の隣接行列とする。 $x \in A$ の固有値 λ に対応する固有ベクトルとする。

ただし $\lambda \neq -\ell$

よって、 $Ax = \lambda x$ となる

$$\text{又 } A = X {}^t X - \ell I_n \text{ より}$$

$$X {}^t X x = (\lambda + \ell) x$$

$$\lambda \neq -\ell \text{ より } {}^t X x \neq 0$$

両辺に ${}^t X$ をかけると

$$({}^t X X) {}^t X x = (\lambda + \ell) {}^t X x$$

$${}^t X X = A_L - 2I_m \text{ より}$$

$$A_L ({}^t X x) = (\lambda + \ell - 2) {}^t X x$$

よって、 A_L の固有値は $\lambda + k - 2$ 、固有ベクトルは tXx であたえられる。

一オ、 $P \neq -2$ なる A_L の固有値はすべて上記の式であたえられる。

なぜなら、 y を P に対応する固有ベクトルとすると

$$A_L = {}^tXX - 2I_m \text{ より}$$

$${}^tXXy = (P+2)y$$

$$P \neq -2 \text{ より } Xy \neq 0$$

$$(X{}^tX)Xy = (P+2)Xy$$

$$AXy = (P - k + 2)Xy$$

よって示された。

$$P = -2 \text{ の場合 } {}^tXXy = 0 \quad \therefore y \in \text{Ker } {}^tXX$$

同様にして

$$\lambda = -k \text{ の場合 } X{}^tXx = 0 \text{ より } x \in \text{Ker } X{}^tX$$

(命題2)

G の中間グラフ $M(G)$ と $L(G)$ の固有値の間には、以下の関係がある。

$M(G)$ 、 $L(G)$ の固有値をそれぞれ μ 、 P とすると

$$(i) \quad \mu^2 - P\mu - (P+2) = 0 \text{ の関係がある。}$$

$$(ii) \quad \mu \neq 0, P \neq -2 \text{ の場合、} \mu, P \text{ の重複度は一致する。}$$

$\mu = 0$ の場合 μ の重複度は

$$(1 + \dim(\text{Ker } {}^tX))\theta + \dim(\text{Ker } {}^tX) \delta_{0,0}$$

ここで $\theta = \dim(\text{Ker } X \cap \text{Im } {}^tX)$

$P = -2$ の場合 P の重複度は $\dim(\text{Ker } {}^tXX)$

証明

(i) A_M の固有値 $\mu \neq 0$ は、 A_L の固有値 P によって、

$$P = \frac{\mu^2 - 2}{\mu + 1} \text{ と表わせる。}$$

$$A_M \mathbb{Z} = \mu \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_1 \\ \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix} \text{ とする。 } \mathbb{Z}_1 \neq 0$$

$$A_M = \begin{pmatrix} A_L & {}^tX \\ X & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{cases} A_L \mathbb{Z}_1 + {}^tX \mathbb{Z}_2 = \mu \mathbb{Z}_1 \\ X \mathbb{Z}_1 = \mu \mathbb{Z}_2 \end{cases} \text{ がえられる。}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \frac{1}{\mu} X \mathbb{Z}_1 \text{ より}$$

$$A_L \mathbb{Z}_1 + \frac{1}{\mu} {}^tX X \mathbb{Z}_1 = \mu \mathbb{Z}_1$$

$${}^tX X = A_L + 2I_m \text{ であるから}$$

$$(1 + \frac{1}{\mu}) A_L \mathbb{Z}_1 = (\mu - \frac{2}{\mu}) \mathbb{Z}_1$$

と $\mu \neq -1$ である

$$(\because \mu = -1 \Rightarrow \mathbb{Z}_1 = 0, \mathbb{Z}_2 = 0 \text{ i.e. } \mathbb{Z} = 0)$$

$$A_L \mathbb{Z}_1 = \frac{\mu^2 - 2}{\mu + 1} \mathbb{Z}_1$$

(ii) 又、 A_L の $P \neq -2$ なる固有値 P は $\mu^2 - P\mu - (P+2) = 0$ の方程式によって A_M の固有値を表れる。

$$A_L y = P y \quad y \neq 0 \text{ とする}$$

$$z_1 = y, \quad z_2 = \frac{1}{\mu} X y \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_L & {}^tX \\ X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_L y + \frac{1}{\mu} {}^tX X y \\ X y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P + \frac{P+2}{\mu}) y \\ X y \end{pmatrix} \\ &= \mu \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{\mu} X y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで P は $\mu^2 - P\mu - (P+2) = 0$ の根

$\therefore \mu$ は A_M の固有値である

重複度も一致する。

$\mu = 0$ の場合

$\text{Ker } {}^tX \neq 0$ ならば

$$z_2 \in \text{Ker } {}^tX \quad z_2 \neq 0 \text{ とすると}$$

$$\begin{pmatrix} A_L & {}^tX \\ X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tX z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \mu = 0$ は固有値となる

$\text{Ker } X \cap \text{Im } {}^tX \neq 0$ ならば

$$z_1 \in \text{Ker } X \cap \text{Im } {}^tX \quad \text{とおくと} \quad z_1 \neq 0$$

$$X z_1 = 0 \quad {}^tX X z_1 = 0 \quad A_L z_1 = -2 z_1$$

よって、 A_L は固有値 -2 を有する

$z z_1 \in \text{Im } {}^tX$ より, ${}^tX z_2 = z z_1$ を満たすベクトル z_2 が存在する.

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$A_M z = 0$$

$\therefore \mu = 0$ は A_M の固有値

(命題3)

G を k 次正則グラフとすると G の中間グラフ $M(G)$ の固有値 μ は, 次のことが成立する.

(i) $\mu \neq -2$ は次の方程式の根である.

$$\mu^2 - (\lambda + k - 2)\mu - (\lambda + k) = 0$$

ここで λ は G の固有値

(ii) $\mu \neq -2$ の重複度は λ と一致する

$\mu = -2$ の重複度は $(1 + \dim(\text{Ker } X))\theta + \dim(\text{Ker } X)\delta_0$

$$\theta = \dim(\text{Ker } {}^tX \cap \text{Im } X)$$

(命題4)

k 次正則グラフ G の全グラフ $T(G)$ の固有値 τ は $L(G)$ の固有値 ρ によって以下のごとく表わせる.

(i) $\tau \neq -k$ であれば次の方程式の根である.

$$\tau^2 + (\ell - 2p - 2)\tau + p^2 + (1 - \ell)p - 2 = 0$$

τ の重複度は p と等しい

(iii) $\tau = -\ell$ の重複度は

$$(1 + \dim(\text{Ker } {}^tX))\varphi + \dim(\text{Ker } {}^tX) \delta_{\varphi, 0}$$

ここで φ は

$$\ell = 1 \quad \varphi = 1$$

$$\ell = 2 \quad \varphi = \dim(\text{Ker } X) + \dim((p=1 \text{ の固有空間}) \cap \text{Im } {}^tX)$$

$$\ell = 3 \quad \varphi = \dim((p=2 \text{ の固有空間}) \cap \text{Im } {}^tX)$$

$$\ell \geq 4 \quad \varphi = \dim(\text{Ker } X \cap \text{Im } {}^tX)$$

証明

$$1. \quad A_T w = \tau w \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$A_T = \begin{pmatrix} A_L & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{cases} {}^tX X w_1 + {}^tX w_2 = (\tau + 2) w_1 & \text{--- ①} \\ X w_1 + X {}^tX w_2 = (\tau + \ell) w_2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

②に tX を左からかけると

$${}^tX X w_1 + {}^tX X {}^tX w_2 = (\tau + \ell) {}^tX w_2$$

①より

$${}^tX w_2 = -{}^tX X w_1 + (\tau + 2) w_1 \text{ を代入して整理すると}$$

$${}^tX X {}^tX X w_1 - (2\tau + k - 3) {}^tX X w_1 + (\tau + 2)(\tau + k) w_1 = 0$$

(1) $w \neq 0$ ならば w_1 は ${}^tX X$ の 1 次元以下 A_L の固有ベクトルである。対応する固有値を P とすれば

$${}^tX X w_1 = (P + 2) w_1$$

$$\therefore (P + 2)^2 - (2\tau + k + 3)(P + 2) + (\tau + 2)(\tau + k) = 0$$

$$\therefore \tau^2 - (2P - k + 2)\tau + P^2 + (1 - k)P - 2 = 0 \dots (*)$$

$$w_1 = y \quad A_L y = P y \quad \text{とおけば}$$

$$\begin{cases} (P + 2) y + {}^tX w_2 = (\tau + 2) y & \therefore {}^tX w_2 = (\tau - P) y \\ X y + X {}^tX w_2 = (\tau + k) w_2 \end{cases}$$

$$\therefore X y + (\tau - P) X y = (\tau + k) w_2$$

$$(1 + \tau - P) X y = (\tau + k) w_2$$

$$(1.1) \quad \tau \neq -k \quad \text{ならば} \quad w_2 = \frac{1 + \tau - P}{\tau + k} X y$$

$$(1.2) \quad \tau = -k \quad \text{ならば}$$

$${}^tX w_2 = -(P + k) y, \quad (1 - k - P) X y = 0$$

$$(P + 2)(P + k - 1) = 0$$

$$\bullet P = -2 \quad \text{ならば} \quad {}^tX w_2 = (2 - k) y$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 0 \quad \text{or} \quad w_2 \in \text{Ker } {}^tX \neq 0$$

$$\begin{matrix} k \neq 2 \\ k \neq 3 \end{matrix} \Rightarrow y \in \text{Ker } X \cap \text{Im } {}^tX \neq 0$$

$$\bullet P = 1 - k \quad \text{ならば} \quad {}^tX w_2 = -y$$

$$y \in (P = 1 - k \text{ の固有空間}) \cap \text{Im } {}^tX$$

(2) $w_1 = 0$ ならば

$$\begin{cases} {}^tX w_2 = 0 \\ X {}^tX w_2 = (\tau + \ell) w_2 \end{cases}$$

$$0 \neq w_2 \in \text{Ker } {}^tX \neq 0$$

$$\tau = -\ell$$

2. (1) $A_L y = \rho y$ $y \neq 0$ とすると

τ は (*) によって決定される $\tau \neq -\ell$ なる根とする。

$$w_1 = y \quad w_2 = \frac{1 + \tau - \rho}{\tau + \ell} X y \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

(*) の関係より $A w = \tau w$ である

(したがって $\tau (\neq -\ell)$ は A_T の固有値である)

(2) $\ell \neq 3$ $\text{Ker } X \neq 0$ ならば

$$0 \neq y \in \text{Ker } X \text{ とする} \quad X y = 0$$

$w_2 \in {}^tX w_2 = (2 - \ell) y$ を満たすベクトルとす

れば $A_T \begin{pmatrix} y \\ w_2 \end{pmatrix} = -\ell \begin{pmatrix} y \\ w_2 \end{pmatrix}$ が成り立つ

よって $-\ell$ は A_T の固有値である。

(3) $A_L y = (1 - \ell) y$ $y \neq 0$ なる A_L の固有ベクトルが存在したとする。 $w_2 \in {}^tX w_2 = -y$ を満たすベクトルをすれば

$$A_T \begin{pmatrix} y \\ \omega_2 \end{pmatrix} = -\ell \begin{pmatrix} y \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{が成り立つ}$$

よって $-\ell$ は A_T の固有値である。

(4) $\text{Ker } {}^tX \neq 0$ ならば $0 \neq \omega_2 \in \text{Ker } {}^tX$ とし

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{とすれば}$$

$$A_T \omega = -\ell \omega \quad \text{が成り立つ}$$

よって $-\ell$ は A_T の固有値である。

(命題5)

ℓ 次正則グラフ G の全グラフの固有値 τ は G の固有値 λ によって次の様に表わせる。

(i) $\tau \neq -2$ の重複度は λ と一致する

$\tau = -2$ の重複度は

$$(1 + \dim(\text{Ker } X))\varphi + \dim(\text{Ker } X)\delta_{\varphi, 0}$$

$$\ell = 1 \quad \varphi = 1$$

$$\ell = 2 \quad \varphi = \dim((\lambda = -1 \text{ の固有空間}) \cap \text{Im } X) + \dim(\text{Ker } {}^tX)$$

$$\ell = 3 \quad \varphi = \dim((\lambda = -1 \text{ の固有空間}) \cap \text{Im } X) + \dim(\text{Ker } {}^tX \cap \text{Im } X)$$

—参考文献—

- [1] J. Akiyama, T. Hamada, I. Yoshimura ;
Miscellaneous Properties of Middle Graphs, TRU
Math. Vol. 10 (1974) 41-53
- [2] N. Biggs ; Algebraic Graph Theory, Cambridge
Univ. Press, Reading (1974)
- [3] M. Dool ; Eigenvalues of a Graph and its
Imbeddings, J. Combi. Theory, Ser B, Vol. 17.
No. 3 (1974) 244-248
- [4] F.R. Gantmacher, "Theory of Matrices," Chelsea,
1959
- [5] F. Harary ; "Graph Theory" Addison-Wesley (1969)
- [6] A.J. Hoffman ; On the polynomial of a graph,
Amer. Math. Monthly 70 (1963) 30-36
- [7] ——— ; Some recent results on spectral
properties of graphs, Beiträge zur Graphentheorie,
PP 75-80 Leipzig (1968)
- [8] L. Lovász and J. Pelikán ; On the eigenvalues
of trees, Periodica Math. Hung. : Vol 3
(1-2), (1973) 175-182