

Capillary problem for singular degenerate parabolic equations in a general domain

東京都立大・理 石井 仁司 (Hitoshi Ishii)

室蘭工大・工 佐藤 元彦 (Moto-Hiko Sato)

§.0 序

次の境界値問題を考える。

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } Q \equiv (0, T) \times \Omega \quad (0.1)$$

$$B(x, \nabla u) = 0 \quad \text{on } S \equiv (0, T) \times \partial\Omega \quad (0.2)$$

ここで、 Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域、 T を正値とする。(0.1) の方程式は平均曲率流方程式を含む退化放物型方程式である。また、境界条件 (0.2) は capillary boundary condition.

$$\langle \nu(x), \nabla u \rangle - k(x) |\nabla u| = 0 \quad (0.3)$$

(ここで、 ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法ベクトル)

を含む境界条件である。本稿で示したいことは、境界値問題 (0.1)-(0.2) に対する粘性解の比較定理を証明することである。

(0.3) において $k(x) = 0$ の場合はリイマニ問題となり、[6]

ですでに証明されている。また k が定数で Ω が半空間の場合には、[8] で示されている。(0.1) の方程式において ∇u に関して連

績性がある場合は、[1][7]などで、扱われている。Fが空間に依っている一般化された曲率流方程式の定常曲面の解の安定性の結果[5]に対して、本稿の比較定理の考えが用いられている。

§1. 比較定理

まず Ω, B, F に対する仮定を列挙する。

($\Omega 1$) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界な開集合

($\Omega 2$) $\partial\Omega$ は C^1 級の曲面

($B 1$) $B \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$

($B 2$) $B(x, \lambda p) = \lambda B(x, p), \forall \lambda \geq 0$

($B 3$) $\exists \theta > 0$ s.t. $\langle \nu(z), D_p B(z, p) \rangle \geq \theta, \forall z \in \partial\Omega$

($\nu(z)$ は $\partial\Omega$ 上の点 z での外向き法ベクトル)

($F 1$) $F \in C((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{B}^n)$

($F 2$) $\exists K > 0$ s.t.

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \nu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \nu \geq 0, \mu \geq 0$$

を満すとき任意の $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して

$$F(p, X) - F(q, -Y) \geq -K(\nu|\bar{p} - \bar{q}|^2 + \mu + |p - q|)$$

が成り立つ。

Remark 1.1

($F 2$) の仮定は次の仮定 (i) (ii) を含んでいる。

(i) F が退化楕円型

$$(ii) -\infty < F_*(0,0) = F^*(0,0) < \infty$$

ここで F_*, F^* は、それぞれ下半(上半)連続包を意味する。

F_*, F^* の定義は [2][4] を参照

我々の目標は次の定理を示すことである。

定理 1.1

$(Q1)-(Q2), (B1)-(B3), (F1)-(F2)$ を仮定する。 u, v をそれぞれ $(Q1)-(Q2)$ の粘性劣(優)解とする。 $u^*(0,x) \leq v_*(0,x)$ on $\overline{\Omega}$

$$\Rightarrow u^* \leq v_* \quad \text{on } (0,T) \times \overline{\Omega}$$

Remark 1.2 境界条件が $(Q3)$ の場合には、 v が定義されるために $(Q2)$ の仮定は $\partial\Omega \in C^{2,1}$ の Regularity が必要になる。

定理 1.1 の証明において、境界条件 $(Q2)$ を考慮したテスト関数を構成することが key になる。

補題 1.1 $(Q1)-(Q2), (B1)-(B3)$ を仮定する。 $\overline{\Omega}$ の近傍 U と次のような $v \in C(U \times \mathbb{R}^n)$ と $\delta > 0$ が存在する。

$$(1.1) \quad v(x, \lambda \xi) = \lambda^2 v(x, \xi) \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$(1.2) \quad v \in C^{1,1}(U \times \mathbb{R}^n)$$

$$(1.3) \quad v(x, \xi) > 0 \quad \forall \xi \neq 0$$

$$(1.4) \quad x \in \partial\Omega, \quad \langle v(x, \xi), \xi \rangle \geq -\delta |\xi|$$

$$\Rightarrow B(x, \nabla_{\xi} v(x, \xi)) \geq 0$$

$$(1.5) \quad x \in \partial\Omega, \quad \langle \nu(x), \xi \rangle \leq \delta |\xi|$$

$$\Rightarrow B(x, \nabla_{\xi} v(x, \xi)) \leq 0$$

Remark 1.3 (1.1) と (1.2) の仮定から次が成り立つ。

$\exists C_0$ s.t

$$\left. \begin{aligned} &v(x, \xi), |\nabla_x v(x, \xi)|, \|\nabla_x^2 v(x, \xi)\| \leq C_0 |\xi|^2 \\ &|\nabla_{\xi} v(x, \xi)|, \|\nabla_x \nabla_{\xi} v(x, \xi)\| \leq C_0 |\xi| \\ &\|\nabla_{\xi}^2 v(x, \xi)\| \leq C_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

補題 1.1 を用いて v が存在するとして、定理を証明するためのテスト関数を構成する。

$$g(x, \xi) = v(x, \xi)^2 + 1 \quad (1.7)$$

とおく。

$A > 0, \varepsilon > 0$ に對して、

$$W \equiv W_{\varepsilon}(x, y) = \varepsilon g(x, \frac{x-y}{\varepsilon}) e^{A(\psi(x) + \psi(y))}, \quad x, y \in \bar{\Omega} \quad (1.8)$$

とおく。ここで $\psi \in C^2(\bar{U})$ を

$$\left. \begin{aligned} &0 \leq \psi \leq 1 \quad \text{in } U \\ &\langle \nabla \psi(x), \nu(x) \rangle \geq 1 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ &|\nabla \psi(x) - \langle \nabla \psi(x), \nu(x) \rangle \nu(x)| \leq \theta/2M \quad \forall x \in \partial\Omega \\ &\text{但し } M = \sup\{|\nabla_p B(x, p)| \mid x \in \partial\Omega, p \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

定数 $A > 0$ をうまく選べば次の補題を示すことができる。

補題 1.2 $x, y \in \overline{\Omega}$, $|x - y| \leq \varepsilon$ とする。 ε に無関係な定数 C_1 が存在して、次の ① ② が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad x \in \partial\Omega \Rightarrow B(x, \nabla_x W(x, y)) \geq C_1 \varepsilon \quad (1, 10)$$

$$\textcircled{2} \quad y \in \partial\Omega \Rightarrow B(y, -\nabla_y W(x, y)) \leq -C_1 \varepsilon$$

また W の 2 階導関数を評価すると

補題 1.3 ε に無関係な定数 C_2 に対して

$$\nabla^2 W(x, y) \leq C_2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{x-y}{\varepsilon} \right|^2 \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \varepsilon \left(\left| \frac{x-y}{\varepsilon} \right|^4 + 1 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right\} e^{A(\Psi(x) + \Psi(y))}$$

$$\forall x, y \in \overline{\Omega} \quad (1, 11)$$

定理 1.1 を証明のためにいくつかの命題を述べる。

$\varepsilon, \delta > 0$ に対して

$$\Phi(t, x, y) = \varphi(t, x, y) - \Psi(t, x, y) \quad (1, 12)$$

$$\varphi(t, x, y) = u(t, x) - v(t, y) \quad (1, 13)$$

$$\Psi(t, x, y) = W_\varepsilon(x, y) + \frac{\delta}{T-t} \quad (1, 14)$$

(W_ε は (1.8) で定義したもの)

命題 1.1

$u, v \in C^{1,2}$ 上 (T) 半連続関数とする。

$$\alpha = \max_{\overline{Q}} (u - v) > 0 \text{ と仮定すると} \quad (1, 15)$$

$\exists \delta_0$ s.t. $0 < \delta < \delta_0$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sup_{\bar{U}} \Phi(t, x, y) > \frac{\alpha}{2} \quad (1.16)$$

$$:= \mathbb{R}^n \quad U = (0, T) \times \Omega \times \Omega$$

命題 1.2 u, v, δ_0 を命題 1.1 と同じものとする。 Φ が $\bar{U}$ 上、上半連続と仮定する。次の (i) - (v) が成り立つ。

(i) Φ は $\bar{U}$ 上の点 $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \in U$ で最大値を実現し、かつ $\hat{t} < T$ を満たす。

$$(ii) \sup_{\substack{0 \leq \varepsilon < 1 \\ 0 < \delta < \delta_0}} |\hat{x} - \hat{y}| < +\infty$$

$$(iii) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{0 < \delta < \delta_0} |\hat{x} - \hat{y}| = 0$$

$$(iv) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{0 < \delta < \delta_0} |\mathcal{W}_\varepsilon| = 0$$

(v)

もし $u(0, x) \leq v(0, x)$ on $\bar{\Omega}$ なる $\exists \varepsilon_0$ s.t. $0 < \delta < \delta_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して $0 < \hat{t} < T$.

定理 1.1 の証明 $\alpha > 0$ として矛盾を導く。このとき命題 1.1, 1.2

が成り立つ。 $0 < \delta < \delta_0$ を満たす δ を Fix する。補題 1.2 より、 $\mathcal{W}_\varepsilon$

は、Crandall-Ishii の lemma [3] [6] を用いることが出来ることがわかる。従って次の不等式が成り立つ。

$$\forall \lambda > 0, \exists X, Y \in \mathcal{S}^n \text{ s.t.}$$

$$\hat{\Psi}_t + F_*(\hat{\Psi}_x, X) - F^*(-\hat{\Psi}_y, -Y) \leq 0 \quad (1.17)$$

$A \geq \nabla^2 \Psi(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})$ を満たす A に対して

$$-\left(\frac{1}{\lambda} + \|A\|\right) I_{2n} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A + \lambda A^2 \quad (1.18)$$

($\Leftarrow$ ところで $\hat{\Psi}_t = \partial_t \hat{\Psi}(t, \hat{x}, \hat{y})$, $\hat{\Psi}_x = \nabla_x \hat{\Psi}(t, \hat{x}, \hat{y})$ など)

補題13より

$$\nabla^2 W(x, y) \leq C_3 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{x-y}{\varepsilon} \right|^2 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \varepsilon \left(\left| \frac{x-y}{\varepsilon} \right|^4 + 1 \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} \quad (1.19)$$

($\Leftarrow$ ここで C_3 は C_2, A, Ψ のみによる定数)

A として (1.19) の右辺を 選ぶとする。 $\varepsilon \rightarrow 0$ として $\hat{x}$ の $\hat{\Psi}_x, -\hat{\Psi}_y$ の挙動によつて 2つのケースに場合分けし、いずれの場合も $\rho \rightarrow \infty$ となつて ≤ 0 となり矛盾となることを示す。

Case I $\exists \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ s.t. $\hat{\Psi}_x(\varepsilon) = 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$\hat{\Psi}_x(\varepsilon) = 0$ または $\hat{\Psi}_y(\varepsilon) = 0$ のとき、 $\hat{x}(\varepsilon) = \hat{y}(\varepsilon)$ であることがわかる。したがって (1.18) の 2つ目の不等式から

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{という関係式が導かれる。}$$

Remark 1.1 より F は 退化 楕円型 かつ $-\infty < F_x(0,0) = F^*(0,0) < \infty$ なので $\delta T^{-2} + F_*(0,0) - F^*(0,0) \leq 0$ $\delta \leq 0$ となり矛盾。

Case II $\exists \varepsilon_j \downarrow 0$ s.t. $\hat{\Psi}_x(\varepsilon_j) \neq 0$ ($\forall j \geq 1$)

(1.18) の $\lambda = |\hat{x} - \hat{y}|^4$ とおくと、

(1.18) の 2つ目の不等式は、

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq C_4 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^2 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \varepsilon \left(\left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 + 1 \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} \quad (1.20)$$

(こゝで C_4 は C_2, C_3, A, ψ のみによる定数)

$$\nu = \frac{C_4}{\varepsilon} \left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^2, \quad \mu = C_4 \varepsilon \left(\left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 + 1 \right) \quad \text{として仮定 (F2) より}$$

$$F(p, X) - F(q, Y) \geq -K (\nu |\bar{p}-\bar{q}|^2 + \mu + |p-q|) \quad (1.21)$$

$$p = \frac{\hat{x}}{|\hat{x}|}, \quad q = -\frac{\hat{y}}{|\hat{y}|}, \quad \bar{p} = \frac{p}{|p|}$$

$$|\bar{p}-\bar{q}| \leq \frac{2}{|p|} |p-q| \quad \text{に注意すると } \varepsilon \text{ に無関係な定数 } C_5, C_6 \text{ が存在して}$$

$$|p-q| \leq C_5 \left(\varepsilon \left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 + \frac{|\hat{x}-\hat{y}|^3}{\varepsilon} + \varepsilon |\hat{x}-\hat{y}| \right)$$

$$|\bar{p}-\bar{q}| \leq C_6 |\hat{x}-\hat{y}| \quad \text{となる。したがって (1.21) は、}$$

$$F(p, X) - F(q, Y) \geq -K \left\{ C_4 C_6^2 \varepsilon \left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 + C_4 \varepsilon \left(\left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 + 1 \right) + C_5 \varepsilon \left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 + \frac{C_5}{\varepsilon} |\hat{x}-\hat{y}|^3 + C_5 |\hat{x}-\hat{y}| \right\} \quad (1.22)$$

命題 1.2 (iv) より $\varepsilon \left| \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon} \right|^4 \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$ となるので (1.22) の右辺にお

いて $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(\frac{\hat{x}}{|\hat{x}|}, X) - F(-\frac{\hat{y}}{|\hat{y}|}, -Y)) \geq 0$$

故に (1.17) において $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $\gamma T^{-2} \leq 0$ が導かれる矛盾とな

る。従って Case I, II いずれの場合も $\gamma > 0$ に矛盾することになる。

かる。 証明終り

残りは補題 1.1 をみたす関数 ψ の存在を示せばよい。

§2. 補題 1.1 の証明

次の補題が示せば、補題 1.1 はすぐ導くことができる。

補題 2.1 $U \subset \mathbb{R}^n$ の有界な開集合とする。

$B = B(x, p) \in C(\bar{U} \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,1}(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$, $\nu \in C^{1,1}(\bar{U}, \mathbb{S}^{N-1})$

$B(x, \lambda p) = \lambda B(x, p) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall (x, p) \in \bar{U} \times \mathbb{R}^n$ とする。

ある $\theta > 0$ に対して、 $\langle \nu(x), \nabla_p B(x, p) \rangle \geq \theta \quad \forall (x, p) \in \bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

が成り立つとする。このとき $\delta > 0$ と $v \in C^{1,1}(\bar{U} \times \mathbb{R}^n)$

が存在して次が成り立つ。

$$v(x, \lambda \xi) = \lambda^2 v(x, \xi) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall (x, \xi) \in \bar{U} \times \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} (x, \xi) \in \bar{U} \times \mathbb{R}^n, \quad \langle \nu(x), \xi \rangle \geq -\delta |\xi| \\ \Rightarrow B(x, \nabla_{\xi} v(x, \xi)) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} (x, \xi) \in \bar{U} \times \mathbb{R}^n \quad \langle \nu(x), \xi \rangle \leq \delta |\xi| \\ \Rightarrow B(x, \nabla_{\xi} v(x, \xi)) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$v(x, \xi) > 0 \quad \forall (x, \xi) \in \bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad (2.4)$$

ここで δ は θ と次の量の上界の関数として取ることもできる。

$$\sup_{\bar{U} \times \mathbb{S}^{N-1}} (|B| + |\nabla_p B| + \|\nabla_p^2 B\|) \quad (2.5)$$

補題 2.1 の略証

step 1: $\delta > 0$ は後で固定する。

$$W = \{(x, \xi) \in \bar{U} \times \mathbb{R}^n \mid \langle \nu(x), \xi \rangle < \delta |\xi|\} \text{ とおく。}$$

$(x, \xi) \in W$ として 次の極値問題を考える。

$$I \equiv \sup \left\{ \langle p, \xi \rangle - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 \mid p \in \mathbb{R}^n, B(x, p) = 0 \right\} \quad (2.6)$$

ただし $\nu = \nu(x)$ とする。

$p \in \mathbb{R}^n$, $B(x, p) = 0$ とする。ある $\hat{p} \in \mathbb{R}^n$ に對して

$$\begin{aligned} 0 &= B(x, p) = B(x, 0) + \langle \nabla_p B(x, \hat{p}), p \rangle \\ &= \langle \nabla_p B(x, \hat{p}), p - \langle p, \nu \rangle \nu + \langle p, \nu \rangle \nu \rangle \\ &\geq \langle p, \nu \rangle \langle \nabla_p B(x, \hat{p}), \nu \rangle - A_1 |p - \langle p, \nu \rangle \nu| \\ &\geq 0 |\langle p, \nu \rangle| - A_1 |p - \langle p, \nu \rangle \nu| \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\text{そこで } A_1 = \sup_{\nu \in S^{n-1}} |\nabla_p B|$$

(2.7) 式より $|p|^2 = \langle p, \nu \rangle + |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2$ より

$$|p| \leq A_2 |p - \langle p, \nu \rangle \nu| \quad (2.8)$$

(A_2 は A_1 と 0 の間にある定数)

$$\begin{aligned} \langle p, \xi \rangle - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 &\leq |B| |p| - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 \\ &\leq A_2 |B| |p - \langle p, \nu \rangle \nu| - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 \\ &\leq A_2^2 |B|^2 + \frac{1}{4} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 \\ &\leq -\frac{1}{4} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 + A_2^2 |B|^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(2.9) \text{ 式より } I \leq A_2^2 |B|^2$$

$$\text{さらに } B(x, p) = 0, \langle p, \xi \rangle - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |p| \leq 2 A_2^2 |B|$$

従って

$$I = \max \{ \langle p, \xi \rangle - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu \rangle \nu|^2 \mid p \in B(0, 2 A_2^2 |B|), B(x, p) = 0 \}$$

$u: W \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$u(x, \xi) = \max \{ \langle p, \xi \rangle - \frac{1}{2} |p - \langle p, \nu(x) \rangle \nu(x)|^2 \mid p \in \mathbb{R}^n, B(x, p) = 0 \} \quad (2.10)$$

Step 2: $z \in \overline{U}$ を固定する。 $\eta > 0$ とし η を十分小と仮定すると次のような正規直交基底 $e_1(x), \dots, e_n(x), x \in \overline{U} \cap B(z, \eta)$ がとれる。

$$e_n(x) = \nu(x)$$

$$e_i \in C^{1,1}(\overline{U} \cap B(z, \eta)) \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\tilde{B}(x, q) = B(x, q_1 e_1(x) + \dots + q_n e_n(x)) \quad (2.11)$$

とおく。このとき $\tilde{B} \in C((\overline{U} \cap B(z, \eta)) \times \mathbb{R}^n)$

$\tilde{B} \in C^{1,1}((\overline{U} \cap B(z, \eta)) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ である。

(2.5) より $\sup (|B| + |\nabla_p B| + |D_p^2 B|) \leq A_3$ とすると、このとき

$$\sup_{(\overline{U} \cap B(z, \eta)) \times \mathbb{S}^{n-1}} (|\tilde{B}| + |\nabla_{\tilde{p}} \tilde{B}| + |\nabla_{\tilde{p}}^2 \tilde{B}|) \leq A_3 \text{ となる。}$$

$V = \overline{U} \cap B(z, \eta)$ と書くことにする。

補題の仮定から

$$\frac{\partial}{\partial p_n} \tilde{B}(x, p) = \langle \nu(x), \nabla_p B(x, \sum p_i e_i(x)) \rangle \geq 0.$$

したがって、これをみたす $H: V \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ が一意に定まる。

$$\tilde{B}(x, p) = 0 \Leftrightarrow p_n + H(x, p_1, \dots, p_{n-1}) = 0$$

$$\text{また, } \tilde{B}(x, p) > 0 \Leftrightarrow p_n + H(x, p_1, \dots, p_{n-1}) > 0$$

$$\tilde{B}(x, p) < 0 \Leftrightarrow p_n + H(x, p_1, \dots, p_{n-1}) < 0$$

B の斉次性と H の一意性から

$$H(x, \lambda q) = \lambda H(x, q) \quad \lambda \geq 0, q \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

陰関数定理より $q \neq 0$ として、

$B \in C^2(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ なる

$$\nabla H(x, q) = \tilde{B}_t(x, q, t)^{-1} \nabla_{x, q} \tilde{B}(x, q, t), \quad t = -H(x, q)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 H(x, q) = \tilde{B}_t^{-1} (\nabla_{x, q}^2 \tilde{B} - \nabla_{x, q} \tilde{B}_t \otimes \nabla H - \nabla H \otimes \nabla_{x, q} \tilde{B}_t \\ + B_{tt} \nabla H \otimes \nabla H) \end{aligned}$$

がわかる。また、 $A_3 < 0$ だけから定まる定数 A_4 が存在して

$$\sup_{V \times \mathbb{S}^{n-2}} (|H| + |\nabla_q H| + \|\nabla_q^2 H\|) \leq A_4$$

さらに $H \in C^{1,1}(V \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$ も分かる。

(2.10) の U の定義から

$$\begin{aligned} U(x, \xi) &= \max_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i, \omega - H(x, \xi) e_n(x), \xi \right\rangle - \frac{1}{2} |\xi|^2 \mid \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \\ &= \max_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \langle e_i(x), \xi \rangle - H(x, \xi) \langle e_n(x), \xi \rangle - \frac{1}{2} |\xi|^2 \right\} \\ \xi &= \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i e_i(x) \text{ とする } \end{aligned}$$

$(x, \xi) \in W, \lambda \in V \Leftrightarrow |\eta| < \delta |\eta_n|, \lambda \in V$ となる。

$\tilde{W} = \{(x, \eta) \in V \times \mathbb{R}^{n-1} \mid |\eta| < \delta |\eta_n|\}$ とおく。

$\tilde{U}: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\tilde{U}(x, y, t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \langle \xi, y \rangle - t H(x, \xi) - \frac{1}{2} |\xi|^2 \right\} \quad (2.12)$$

と定義する。 $[7]$ と同様の議論から (2.12) における最大値は、

ただ 1 点 $\xi = p(x, y, t)$ において実現することがわかる。また

$$\begin{cases} \tilde{U} \in C^{1,1}(\tilde{W}) \\ \tilde{U}_t(x, y, t) + H(x, \nabla_y \tilde{U}(x, y, t)) = 0 \end{cases}$$

となることも確かめることができる。

$\tilde{B} \subset H$ の定義から、 $0 < \delta \leq \frac{1}{3(A_0+1)}$ に固定すると次の (i)-(iv) がいえる。
 $\varepsilon = \delta$

$$(i) \quad u \in C^{1,1}(W)$$

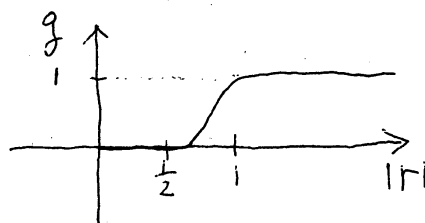
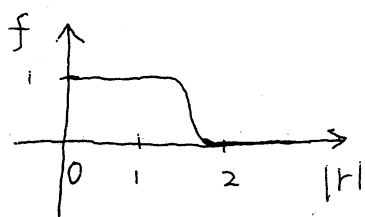
$$(ii) \quad B(x, \nabla_{\xi} u(x, \xi)) = 0 \quad \forall (x, \xi) \in W$$

$$(iii) \quad u(x, \xi) \geq \frac{1}{q} |\xi|^2 \quad \forall (x, \xi) \in W$$

$$(iv) \quad u(x, \xi) \leq 2|\xi|^2 \quad \forall (x, \xi) \in W$$

step 3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$(i) \quad f, g \in C^\infty$$



$$(ii) \quad f(-r) = f(r) \quad g(-r) = g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad f(r) = 1 \quad (r \geq 1), \quad f(r) = 0 \quad (r \geq 2)$$

$$g(r) = 1 \quad (r \geq 1), \quad g(r) = 0 \quad (0 \leq r \leq \frac{1}{2})$$

$$(iv) \quad f'(r) \leq 0 \quad (r \geq 0) \quad g'(r) \geq 0 \quad (r \geq 0)$$

$$0 < \alpha \leq \frac{\delta}{3} < L$$

$$f_\alpha(x, \xi) = \begin{cases} f\left(\frac{\langle \xi, \nu(x) \rangle}{\alpha |\xi|}\right) & (\xi \neq 0) \\ 0 & (\xi = 0) \end{cases}$$

$$g_\alpha(x, \xi) = \begin{cases} g\left(\frac{\langle \xi, \nu(x) \rangle}{\alpha |\xi|}\right) & (\xi \neq 0) \\ 0 & (\xi = 0) \end{cases}$$

$\chi \quad f_\alpha: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_\alpha: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する。

$$v(\alpha, \xi) = f_\alpha(\alpha, \xi) u(\alpha, \xi) + g_\alpha(\alpha, \xi) \frac{\langle \xi, v(\omega) \rangle^2}{\beta}$$

と定義すると

$$v(\alpha, \lambda \xi) = \lambda^2 v(\alpha, \xi) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall (\alpha, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$$

$v \in C^{1,1}(U \times \mathbb{R}^n)$ が分かる。

また、 $\sup(|f'_\alpha| + |g'_\alpha|) \leq A_5$ に対し

$$\alpha = \frac{\theta^R}{2A_4}, \quad \beta = \frac{\theta^3}{16A_4^3 A_5} \quad \text{と固定すると}$$

$$\langle v(\omega), \xi \rangle \geq 0 \Rightarrow B(\alpha, \nabla_\xi v(\alpha, \xi)) \geq 0 \quad \forall (\alpha, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$$

$$\langle v(\omega), \xi \rangle \leq 0 \Rightarrow B(\alpha, \nabla_\xi v(\alpha, \xi)) \leq 0 \quad \forall (\alpha, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$$

$$\text{また } |\langle v(\omega), \xi \rangle| \leq \frac{\alpha}{2} |\xi| \text{ かつ } B(\alpha, \nabla_\xi v(\alpha, \xi)) = 0 \quad \forall (\alpha, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$$

さらに $v(\alpha, \xi) \geq \min\left(\frac{1}{4} |\xi|^2, \frac{\alpha^2}{\beta} |\xi|^2\right)$ が示せる。二つは式

(2.1) - (2.4) を示している。

略証終り

References

1. G. Barles, *Fully nonlinear Neumann type boundary conditions for second order elliptic and parabolic equations*, J. Diff. Equations **106** (1993), 90-106.
2. Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Diff. Geometry **33** (1991), 749-786.
3. M. G. Crandall and H. Ishii, *The maximum principle for semicontinuous functions*, Differential and Integral Equations **3** (1990), 1001-1014.
4. M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.
5. S.-I. Ei, M.-H. Sato and E. Yanagida, *Stability of stationary interfaces with contact angle in a generalized mean curvature flow*, American Journal of Mathematics **118** (1996), 653-687.
6. Y. Giga and M.-H. Sato, *Neumann problem for singular degenerate parabolic equations*, Differential and Integral Equations **6** (1993), 1217-1230.
7. H. Ishii, *Fully nonlinear oblique derivative problems for nonlinear second-order elliptic pde's*, Duke Mathematical Journal **62** (1991), 633-661.
8. M.-H. Sato, *Capillary problem for singular degenerate parabolic equations on a half space*, Differential and Integral Equations(to appear)