

KeTCindyJS と Maxima の連携

沼津工業高等専門学校・教養科 鈴木正樹

Masaki Suzuki

Division of Liberal Arts, NIT(KOSEN), Numazu College

沼津工業高等専門学校・制御情報工学科 鈴木朝陽

Asahi Suzuki

Department of Control and Computer Engineering, NIT(KOSEN), Numazu College

1 はじめに

教育のデジタル化が急速に進展する中，数学分野においても ICT や Web を活用した授業が実践され，オンラインで共有可能な教材の整備が求められている．特に，図形やグラフを視覚的かつインタラクティブに提示できる数学 HTML 教材の需要は高まっており，それらの提供が期待されている．

数学 HTML 教材を作成するシステムとして，高遠節夫氏らのグループによって開発された KeTCindyJS がある ([3])．これは，動的幾何ソフトウェア Cinderella のプラグインである CindyJS と，Cinderella を基盤として TeX 文書に図を挿入するためのグラフィックコードを生成するシステム KeTCindy のライブラリを組み合わせ，図形やグラフを作成し，それらを HTML ファイルとして生成するシステムである．著者らはこれまでに，KeTCindyJS を用いていくつかの HTML 教材を作成してきた．例えば，適切な階級幅のヒストグラムや曲面の格子点における勾配， n 乗根の解分布を観察できる HTML 教材は，大日本図書のホームページにて，新数学シリーズ改訂版の Web Contents に採用されている ([6])．

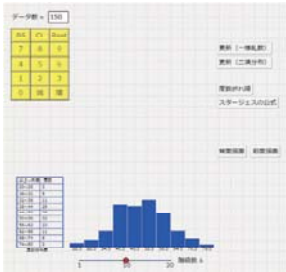


図 1: ヒストグラム

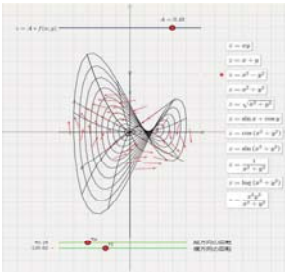


図 2: 曲面の勾配

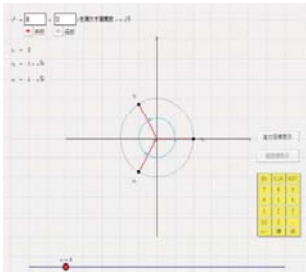


図 3: n 乗根

これらは，数学的概念を可視化できているが，KeTCindy は数値計算によって図形やグラフを描画するため，高次の微分や方程式をそのまま扱う場合，無視できない誤差が生じる．例えば，CindyJS は記号微分（代数的に正確な導関数）をサポートしておらず，数値微分による近似的な手法を用いるため，微分の次数が高くなるほど誤差が蓄積し，

精度が大きく低下する．一方，数式処理システム Maxima の微分アルゴリズムは本質的に微分の定義に基づく規則と再帰アルゴリズムで構成されているため，高次の微分を扱う場合でも問題がない．そこで，演算を Maxima で実行して，その結果を KeTCindyJS で描画することで，正確で視覚的に明瞭な HTML 教材を作成できるのではないかと，いう着想に至った．なお，図 3 の HTML 教材は KeTCindyJS のみで作成しているが， n 次の二項方程式を実際に解いているのではなく，スクリプトの工夫により正確な描画を実現している．

本稿では，可視化能力に優れ，かつインタラクティブ操作を HTML 上に実現できる KeTCindyJS に，Maxima の記号計算能力を統合して作成した HTML 教材とそれらの活用事例について報告する．

2 KeTCindyJS と Maxima の連携による教材作成

2.1 数値計算と数式処理

KeTCindyJS と Maxima の連携による教材作成に先立ち，まず，KeTCindy による数値計算の微分と Maxima による数式処理の微分の誤差の程度を，関数の n 次近似式の描画（テイラー展開）を例に確認した．

図 4 と図 5 は， $y = \sin x$ の $x = a$ における n 次近似式のグラフを表示する教材である． a と n をスライダーで変化させることができ， n 次近似式のグラフが $y = \sin x$ のグラフに徐々に近づく様子がインタラクティブに観察できる．破線が $y = \sin x$ のグラフ，黒の曲線が KeTCindy の数値微分により得られた結果を，赤の曲線が Maxima の記号微分により得られた結果を表している．数値微分の場合，第 5 次の項までは比較的精度の高い近似が得られているが，それ以降では顕著な誤差が生じることが確認できる．なお， $y = \sin x$ 以外の関数の近似式の描画も確認しているが，同様に，5 次近似式が許容できる精度の限界と考えられる．

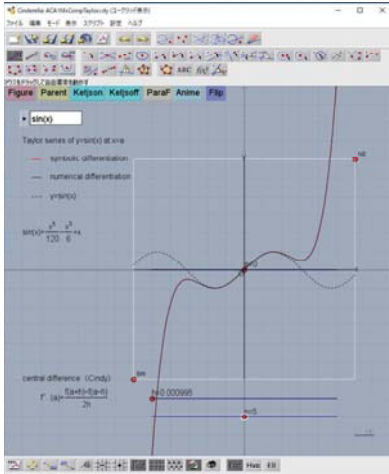


図 4: 5 次近似式

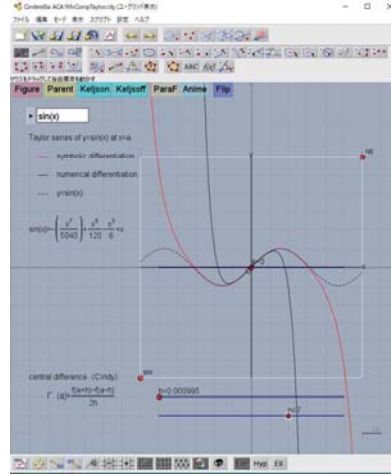


図 5: 7 次近似式

ここで、KeTCindy による微分の計算は、中心差分による数値微分、すなわち

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

に基づき行っている。これは、前方差分による数値微分では、より大きな誤差が生じたためである。他方、本教材は誤差の比較だけではなく、 h の値をスライダーで変化させることで、近似の精度も確認できる。実は、このような極限の概念を近似する場合、「無限小の h が小さければ小さいほど良い」というわけではない。極端な大きさ（小ささ）を持つ値は、数値計算の理論上、誤差を引き起こしやすく、表現限界に到達すると下位の桁が失われたり、見当違いな値になることがしばしば起こる。その際、 h の値を大きくすることで、近似の精度を維持することができる。本教材では、そのような挙動も観察できる。

2.2 HTML 教材例

KeTCindyJS と Maxima を連携して作成した HTML 教材のうち、現時点で実用に足るレベルのものは次の 5 つである。

テイラー展開 関数の n 階微分を Maxima で求め、 n 次近似式を KeTCindyJS にてグラフ化することにより、正確な近似曲線を得る。スライダー操作により、展開する点と次数を変化させることができ、近似曲線が元の関数のグラフに次第に一致していく様子を観察することができる。

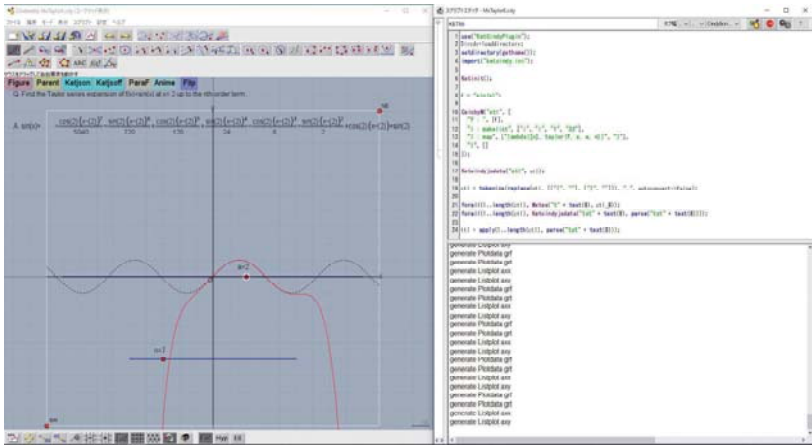


図 6: テイラー展開

n 次方程式 n 次方程式を Maxima の代数解法を利用して解析的に解き、得られた実数解、複素数解を KeTCindyJS で複素数平面上に配置することで、解の分布を可視化す

る。複素数平面上で解の対称性や係数変化に伴う分岐現象を視覚的に示せる点の特徴であり、代数方程式の解の関係性を、幾何的表現として理解することができる。

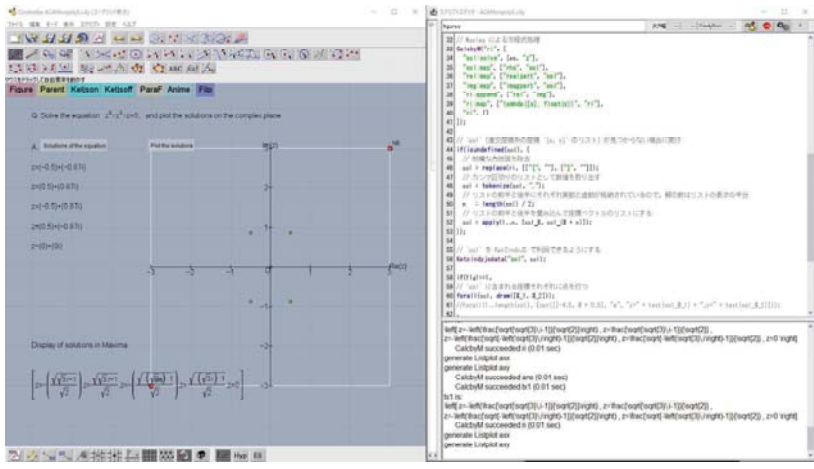


図 7: n 次方程式

増減表 関数の極値と変曲点を Maxima を用いて解析的に求め、近傍の関数値を比較することで増減や凹凸を判定し、それらを元に KeTCindyJS にて増減表とグラフを表示する。関数を変更して実行するだけで増減表とグラフが直ちに得られるため、関数の性質がパラメータにどのように依存しているかを観察しながら考察でき、試行錯誤を通じて理解を深める探究的な学習が実現する。

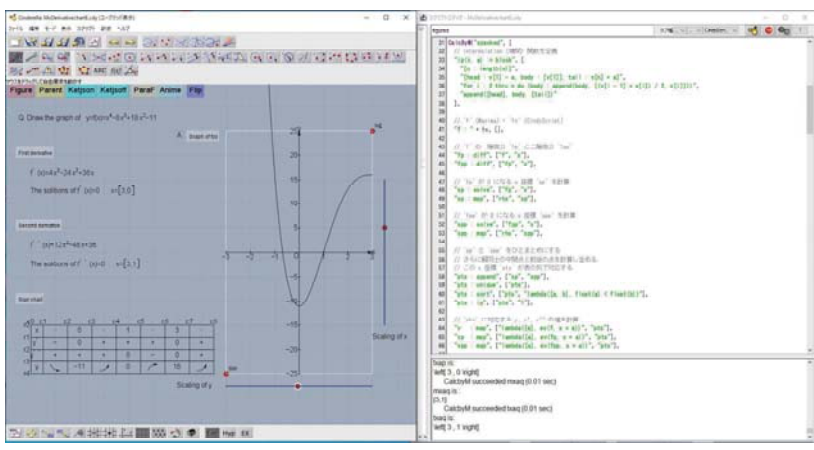


図 8: 増減表

包絡線 Maxima による偏微分と連立方程式の解法を用いて、曲線族の包絡線の方程式を導出し、KeTCindyJS にてその形状を表示する。また、曲線群のパラメータをスライ

ダーで可変にすることでグラフを逐次描画し、包絡線がそれらの接点の集合として形成される様子を動的に観察することができる。解析的導出過程と幾何的意味を同時に確認でき、数学的抽象概念を視覚的に体験させる教材として有用である。

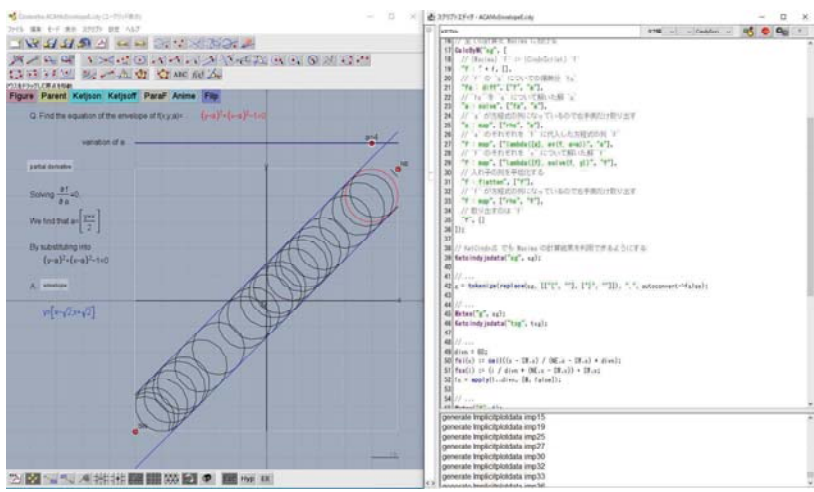


図 9: 包絡線

微分方程式 1 階および 2 階の線形微分方程式の一般解を Maxima により求め、一般解の任意定数をスライダーで変化させることで、その解曲線を KeTCindyJS により可視化する。解の族がどのように変化するかを動的に観察することができ、数学だけでなく物理や制御工学、数理モデルシミュレーションなどへと展開可能で、KeTCindyJS による応用的教材開発の可能性を示すものである。

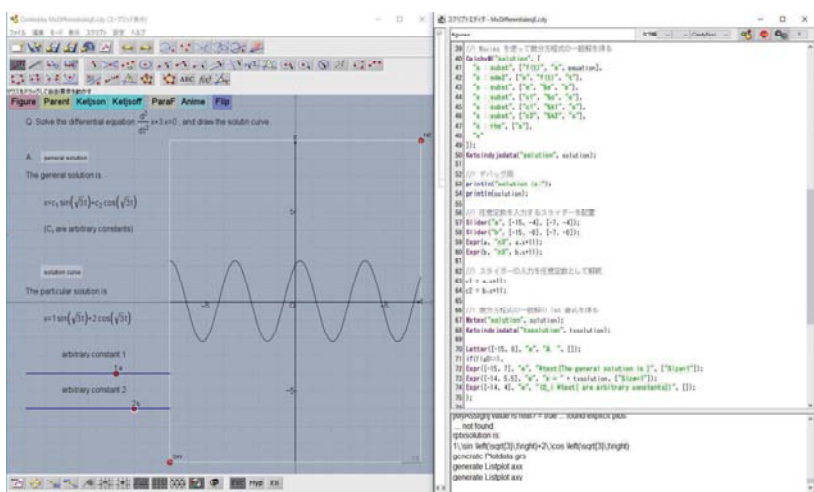


図 10: 微分方程式

2.3 スクリプト例

KeTCindy と Maxima を連携するための関数として、例えば次がある．なお、その他の関数については、KeTCindyHome 内の KeTCindy リファレンスを参照のこと ([7])．

- CalcbyM(): Maxima のスクリプトを実行する
- Mxfun(): Maxima の関数を実行する
- Mxtex(): Maxima の結果を TeX 書式にする

これらの関数を用いることで、Maxima の計算結果に基づいた正確な数学教材が KeTCindy によりいくつか作成されている ([2], [4], [5])．一方、KeTCindyJS では、Maxima の呼び出しはサポートされていない．ただ、次の関数により、Maxima の返り値などの KeTCindyJS では得られないデータを扱うことができる．

- Ketcindyjsdata(): Maxima の結果を KeTCindyJS で使えるようにする

これにより、Maxima の計算結果を KeTCindyJS の描画関数群に直接渡すことができ、HTML ベースの教材作成が可能となる．しかしながら、Maxima による計算はローカル環境で実行されるため、ブラウザ上でスライダー操作などに応じて動的に再計算することはできない．したがって、教材内で可変となるパラメータに対する計算結果は、HTML に変換する前の段階で Maxima によって、すべて事前に生成しておく必要がある．

ここでは先の制約を踏まえた具体的な実装例を、マクローリン展開に関する教材の Cindy スクリプトにて紹介する．図 11 において、8 行目から 13 行目が Maxima による処理であり、fn0 のマクローリン展開を次数 $n = 0$ から $n = 32$ まで一括計算し、その結果の一覧を Cindy スクリプトで使用できる形で li0 に取り込んでいる．15 行目から 19 行目では、Maxima が返したマクローリン展開のリスト li0 を、角カッコを削除、カンマで分割してリスト化、KeTCindyJS 用データとして登録し、スライダーで次数を変えたときに参照できる形に整えている．21 行目から 26 行目では、Maxima から得たマクローリン展開式を、HTML 上で TeX 形式の数式として表示するための処理を行っている．

```

1 Ketinit();
2
3 // fn0 = "sin(x)";
4 // fn0 = "cos(x)";
5 fn0 = "1/(1-x)";
6 // fn0 = "log(abs(1-x))";
7
8 CalcbyM("li0", [
9   "fn0:", [fn0],
10  "lin:makeList", ["n", "n", "0", "32"],
11  "li0:map", ["lambda{[n], Taylor(fn0, x, 0, n)}", "lin"],
12  "li0", []
13]);
14
15 if(isundefined(li0x), (
16   li0x = replace(li0, [{"[", ""}, [{"]", ""}]);
17   li0x = tokenize(li0x, ",", autocorvert->false);
18   Ketcindyjsdata("li0x", li0x);
19 ));
20
21 if(isundefined(li0tex), (
22   li0tex = Mxtex("li0tex", li0);
23   li0tex = replace(li0tex, [{"*left", ""}, [{"*right", ""}]);
24   li0tex = tokenize(li0tex, ",", autocorvert->false);
25   Ketcindyjsdata("li0tex", li0tex);
26 ));

```

図 11: マクローリン展開の Cindy スクリプトの一部

以上のように、0 次から 32 次までの展開式を一括して Maxima で計算し、ブラウザ側ではその計算結果を選択して表示する方式を採用している．この「事前計算→ブラウザで切り替え表示」という仕組みによって、Maxima の記号計算能力を保持しつつ、KeTCindyJS のインタラクティブ性を損なわない HTML 教材を実現している点が、本手法の重要な特徴である．

3 HTML教材の活用事例

KeTCindyJS と Maxima を連携して作成した HTML 教材は、授業支援から自学自習まで幅広く活用できる柔軟性を有している。実際に、これまでに活用した事例としては、次の通りである。

3.1 授業支援

テイラー展開の授業では、展開次数に応じた近似式のグラフを板書することは困難であるが、HTML 教材を活用することで、スライダー操作により近似式の曲線が元の関数に近づく様子を即時に確認できるため、級数近似の収束過程の理解を促すことができた。また、近似式のグラフは教科書でも提示されているが、提示されている以外の関数にも対応できる点も有意であった。その他、増減表や包絡線、微分方程式の授業では、関数や方程式を入力し、実行するだけで表やグラフ、そして解曲線や解が即時に得られるため、解説や解答の準備をする手間がなくなるだけでなく、様々な関数や方程式において、条件を比較しながら説明できる点が有用であった。

3.2 自学自習

今回作成した HTML 教材は、Maxima によって得られた計算結果をブラウザ上に記載する形式で実装しているため、解答のみでなく、導出に至る過程も確認することができる。そのため、自学自習を目的として著者らが整備を進めている学習サイトでは、解説ページを別途作成せず、HTML ファイルをサーバにアップロードし、リンクを貼るだけで済んでいる。教材の更新や追加も HTML ファイルを差し替えるだけであり、サイト全体のメンテナンス性が高く、学習環境の整備がきわめて容易である。



図 12: 学習サイト

4 おわりに

本稿では、KeTCindyJS の優れた可視化機能と Maxima の数式処理機能を連携させることで、数学的に厳密な計算結果をインタラクティブに可視化できる HTML 教材が作成できることを報告した。特に、テイラー展開、 n 次方程式、増減表、包絡線、微分方程式といった計算と可視化を統合することで理解が深まる数学トピックに対して、Maxima の計算結果を KeTCindyJS にて表やグラフとしてブラウザ上で提示できることを示した。これにより、従来の静的教材では実現できなかった、オンライン上で学習者が教材を操作しながら内容を確認し、理解を深める探究的な学習が可能となることが期待される。

今後の展開としては、まず教材内容の拡充である。Maxima の高い計算能力を活かすことで、積分や空間図形に加え、ベクトル解析やフーリエ解析、複素関数など、より広範で高度な分野への適用を考えている。カレッジ級数学を対象とした、段階的かつ体系的な教材群を作成したい。また、HTML 教材を基盤とした自学自習型のオンライン学習環境の整備も重要な課題である。現在、学習サイトとは別にオンライン上で課題の提出と回収が可能な自動採点機能を備えた数式送受 e-learning システムを開発している([1])。本システムに HTML 教材をそのまま埋め込める機能を新たに追加したことで、学習者が課題に取り組む際に、動的に変化する図形やグラフを操作できる環境を実現した。今後は、学習サイトでの自学自習と課題システムでの問題演習の両面で HTML 教材のインタラクティブ性を共有させたい。さらに、ブラウザ上で動作する数式処理システムの Algebrity や WebAssembly 版 Maxima (WasmMaxima) との連携も検討している。今回作成した HTML 教材は、Maxima で事前に計算した結果を可視化しているため、教材利用時に学習者が任意の関数や方程式を入力して再計算することはできない。一方、Algebrity や WasmMaxima を組み込むことができれば、ブラウザ上で任意の関数や方程式に対して汎用的に計算を行うことが可能である。これは、教材の柔軟性と応用範囲を大幅に広げるものであり、学習者がその場で問題に合わせて操作できるという利点は、インタラクティブ型教材の発展に向けた重要なステップとなる。

以上のように、KeTCindyJS と Maxima を連携させた HTML 教材は、視覚的な理解を促進し、学習者の主体的な探究を支援する教材として、多様な教育場面での活用が期待できる。今後も、技術的改良と教育的活用の両面から発展を図り、数学教育における ICT 活用の新たな可能性を探っていきたい。

参考文献

- [1] 鈴木正樹, 細谷真唯子, 小山田純, 黒岩佑真, 柴田 遥陽: TeX 書式で解答する数学 e-learning システム, 京都大学数理解析研究所講究録 2301, pp.90–97, 2025
- [2] 高遠節夫, 小林茂樹: KeTCindy と Maxima, Risa/Asir との連携, 京都大学数理解析研究所講究録 2022, pp.128–134, 2017
- [3] 高遠節夫: KeTCindyJS の開発と教育利用, 京都大学数理解析研究所講究録 2142, pp.123–132, 2019
- [4] Shigeki Kobayashi, Setsuo Takato: Cooperation of KeTCindy and Computer Algebra System, Lecture Notes in Computer Science 9725, Springer, pp.351–358, 2016
- [5] Setsuo Takato, Alasdair McAndrew, Jose A. Vallejo, Masataka Kaneko: Collaborative Use of KeTCindy and Free Computer Algebra Systems., Mathematics in Computer Science 11 3-4, pp.503–514, 2017
- [6] 大日本図書: https://www.dainippon-tosho.co.jp/college_math/index.html
- [7] KeTCindy Home: <https://s-takato.github.io/ketcindyorg/indexj.html>