

定曲率ヘッセ多様体の分類

福岡大学・理学部 黒瀬 俊 (Takashi Kurose)
Faculty of Science,
Fukuoka University

1970 年代の末頃、志磨裕彦氏によって定義されたヘッセ多様体は、S. Y. Cheng and S. T. Yau や P. Delanoë らの単発的な論文はあるものの、ほぼ志磨氏 (とその共同研究者) によって研究がすすめられて来た。その成果の多くは氏の著書 [1] にまとめられているが、氏らの多大な努力にもかかわらず、基本的でありながら手つかずで残されている事項も少なからずあるように見受けられる。本論文では、その一つと思われるヘッセ断面曲率が定数のヘッセ多様体の構成と分類について、古畑仁氏との共同研究で得られた結果を述べる。

1 ヘッセ多様体

まず、ヘッセ多様体についての基本事項を簡単にまとめておく (詳細は [1] をご覧下さい)。

n 次元 (連結) 多様体 M 上に、捩れを持たないアフィン接続 ∇ と (擬)リーマン計量 h が与えられているとき、 (M, ∇, h) がヘッセ多様体であるとは、

- (i) ∇ が平坦で、
- (ii) $(0, 3)$ テンソル場 ∇h が対称である

こととする。条件 (i) のもとで、条件 (ii) は

(ii)' M の各点 p のまわりで、適当な関数 φ をとると $h = \nabla d\varphi$ と表される¹ ことと同値である。

ヘッセ多様体 (M, ∇, h) に対して、 $\hat{\nabla}$ を h のレビ・チビタ接続とするとき、 $(1, 2)$ テンソル場 $K = \nabla - \hat{\nabla}$ を差テンソル²といい、 $(1, 3)$ テンソル場

$$H(X, Y)Z = -(\nabla K)(Y, Z; X)$$

をヘッセ曲率テンソルという。ヘッセ曲率テンソルを用いると、 $\hat{\nabla}$ の曲率テンソル $\hat{R}$ は

$$\hat{R}(X, Y)Z = \frac{1}{2}\{H(X, Y)Z - H(Y, X)Z\}$$

¹この φ をヘッセ多様体 (M, ∇, h) のヘッセ・ポテンシャルとよぶ。

²ここではアフィン超曲面論での定義によったため、ヘッセ幾何学における通常の規約とは符号が逆になっている。

と表わされる。

ヘッセ多様体 (M, ∇, h) に対し、 $T(M)$ を M の接束、 $\pi: T(M) \rightarrow M$ を自然な射影とする。平坦アフィン接続 ∇ に関する M のアフィン局所座標系 $(U, (u^1, \dots, u^n))$ をとり、

$$z^i = u^i \circ \pi + \sqrt{-1} du^i, \quad i = 1, \dots, n$$

によって、 $T(M)|_U$ の複素座標系 $(z^1, \dots, z^n)$ を定めよう。すると、アフィン局所座標系間の座標変換はアフィン変換で与えられるから、こうして定めた $T(M)$ の局所複素座標系間のアフィン変換に自然に拡張されて、 $T(M)$ に複素多様体の構造がはいる。さらに、 M 上のリーマン計量 g から $T(M)$ 上のリーマン計量 $g^{T(M)}$ を

$$g^{T(M)} = \sum_{i,j=1}^n (g_{ij} \circ \pi) dz^i d\bar{z}^j \quad (g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right))$$

で定めると、上の複素構造のもとでケーラー計量となる (ケーラー・ポテンシャルは $\varphi \circ \pi$ で与えられる。ここで φ は (M, ∇, h) のヘッセ・ポテンシャルである)。ケーラー多様体 $T(M)$ の微分幾何的な諸量は ∇ と h で書けるが、特に

$T(M)$ の正則断面曲率が定数 $-c$ である

$$\Leftrightarrow H(X, Y)Z = \frac{c}{2} \{h(X, Y)Z + h(X, Z)Y\}$$

が成り立つ。このとき h は定曲率 $-c/4$ のリーマン計量である。

定義 1 ヘッセ多様体 (M, ∇, h) のヘッセ断面曲率が定数 c である (あるいは略して、定曲率 c である) とは、

$$H(X, Y)Z = \frac{c}{2} \{h(X, Y)Z + h(X, Z)Y\}$$

が成り立つこととする。

2 ヘッセ多様体の例

ヘッセ多様体の例をいくつか挙げよう。まず、簡単なところから

例 1 D を $\mathbb{R}^n$ の標準的な平坦アフィン接続とすると、 $(\mathbb{R}^n, D, \sum_{i=1}^n (du^i)^2)$ はヘッセ多様体である。 $\sum_{i=1}^n (du^i)^2 = Dd(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u^i)^2)$ であり、接束はケーラー多様体として $(\mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^n |dz^i|^2)$ に同形である。

例 2 $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}; t > 0\}$ とすると、 $(\mathbb{R}^+, D|_{\mathbb{R}^+}, t^{-2} dt^2)$ はヘッセ多様体である。 $t^{-2} dt^2 = Dd(-\log t)$ であり、接束は右半平面 $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ に双曲計量をいれたものとケーラー多様体として同形である。

例 3 $\mathbb{R}^+$ 上のアフィン接続 ∇ を $\nabla_T T = -(1/t)T$ ($T = \partial/\partial t$) で定めると、 $(\mathbb{R}^+, \nabla, dt^2|_{\mathbb{R}^+})$ はヘッセ多様体である。 $dt^2 = \nabla d(t^2/4)$ であり、接束は $\widetilde{\mathbb{C}}^\times$ ($\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に計量 $|dz^2|$ を制限して入れたものの普遍被覆) にケーラー多様体として同形である。なお、このヘッセ多様体は変換 $s = \log t$ により $(\mathbb{R}, D, e^{2s} ds^2)$ と表わせる。

ヘッセ多様体が近年注目されることになった理由の一つは、それが情報幾何において自然に現れる幾何構造³であるからであった。詳しくは [1] の第 6 章にゆずることにして、ここでは、ごく大雑把に情報幾何における幾何構造の導出を見ておこう。今、 Θ を $\mathbb{R}^n$ の領域とし、 $p(\cdot; \theta)$ を $\theta \in \Theta$ でパラメータづけられた確率分布 (または確率密度関数) の族とする。このとき、パラメータ空間 Θ 上に

- フィッシャー計量と呼ばれるリーマン計量 g_F と、
- 指数型接続と呼ばれる捩れを持たないアフィン接続 $\nabla^{(e)}$

が標準的な方法で定義される。特に、 $p(\cdot; \theta)$ ($\theta \in \Theta$) が指数型と呼ばれる確率分布族であるとき、すなわち、(パラメータ θ を適当に変換して)

$$p(x; \theta) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \theta^i F_i(x) - \psi(\theta) + C(x) \right)$$

と表わされるとき、 $\nabla^{(e)}$ は θ をアフィン座標系とする平坦アフィン接続であり、 $(\Theta, \nabla^{(e)}, g_F)$ は ψ をヘッセ・ポテンシャルとするヘッセ多様体となる。

統計学で良く用いられる確率分布族で指数型になるものは多いが、とりわけ重要な指数型分布族の例を次に二つ挙げよう。

例 4 (正規分布族) $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ に対して、平均 μ 、分散 σ の正規分布 (の確率密度関数) $p(x; \mu, \sigma)$ は

$$\begin{aligned} p(x; \mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \cdot (-x^2) + \frac{\mu}{\sigma^2} \cdot x - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log(\sqrt{2\pi}\sigma) \right) \right\} \end{aligned}$$

より指数型である。この分布族から得られるヘッセ多様体 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \nabla^{(e)}, g_F)$ は定曲率 8 であり、 g_F は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上完備である。

³ただし、情報幾何で有効に使われているのは (ここでは説明していない) ヘッセ構造の「双対性」であって、ケーラー多様体の「実部」であるというヘッセ多様体の側面は、今のところ情報幾何に表だってはあらわれていないようである。

例 5 (多項分布族) $\Delta = \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n; \eta_1, \dots, \eta_n > 0, \sum_{k=1}^n \eta_k < 1\}$ とし、 $\eta \in \Delta$ に対して、 $n+1$ 点集合 $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ 上の確率分布を

$$p(x; \eta) = \begin{cases} \eta_i & (x = i) \\ 1 - \sum_{k=1}^n \eta_k & (x = n+1) \end{cases}$$

で定める。この確率分布族 $p(\cdot; \eta)$ ($\eta \in \Delta$) を $(n+1)$ 次の多項分布族という。 $\delta_i(x) = \delta_{ix}$ をクロネッカーのデルタとすると

$$p(x; \eta) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\eta_i}{1 - \sum_{k=1}^n \eta_k} \right) \cdot \delta_i(x) - \log \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \eta_k} \right)$$

となり、多項分布族も指数型である。 $(\Delta, \nabla^{(e)}, g_F)$ は定曲率 -1 のヘッセ多様体であり、 (Δ, g_F) は半径 2 の超球面の「第 1 象限」

$$\{\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; |\xi| = 2, \xi^1, \dots, \xi^{n+1} > 0\}$$

に等長である。

正規分布 (族) と多項分布 (族) は確率分布の中でも最も基本的なものであるが、上の例を見ると、「なぜ基本的な確率分布からきれいなヘッセ構造が出てくるのか」という問を発したくなる。もっともこの問は素朴に過ぎるかもしれない。そこでとりあえず「これらのヘッセ多様体はどのように特徴づけられるか」と問うことにしよう。もう少し具体的に言えば、

定曲率ヘッセ多様体にはどのようなものがあり、例 4 と例 5 で得られたヘッセ多様体は其中でどのような位置にあるか

を考えたい。これが定曲率ヘッセ多様体の構成と分類を調べる一つの動機である。

3 定曲率ヘッセ多様体の構成

ヘッセ多様体 (M, ∇, h) が定曲率 c であるとする、前節で述べたことより (M, h) は定曲率 $-c/4$ のリーマン多様体である。そこで定曲率 κ のリーマン多様体 (M, h) を先に与えておき、その上に (M, ∇, h) が定曲率 -4κ のヘッセ多様体となるようなアフィン接続 ∇ 、もしくは差テンソル $K = \nabla - \hat{\nabla}$ を構成することを考える。

命題 1 (M, h) を定曲率 κ のリーマン多様体とし、 $\hat{\nabla}$ を h のレビ・チビタ接続とする。 $(1, 2)$ テンソル場 K に対して、 $\nabla = \hat{\nabla} + K$ とするとき、 (M, ∇, h) が定曲率 -4κ のヘッセ多様体であるための必要十分条件は

- (1a) $K(X, Y) = K(Y, X)$
- (1b) $h(K(X, Y), Z) = h(Y, K(X, Z))$
- (2) $\kappa\{h(X, Z)Y - h(Y, Z)X\} + K(Y, K(X, Z)) - K(X, K(Y, Z)) = 0$
- (3) $(\hat{\nabla}K)(X, Y; V) = 2\kappa\{h(V, X)Y + h(V, Y)X\} - K(V, K(X, Y))$
 $+ K(K(V, X), Y) + K(X, K(V, Y))$

が成り立つことである。

注意 (1a) は ∇ が捩れをもたないための、(1b) は ∇h が対称であるための条件である。(3) はヘッセ多様体 (M, ∇, h) が定曲率 -4κ であるための条件であり、(2) は ∇ の曲率が 0 であるための条件を (3) を用いて書きなおしたものである。

定曲率ヘッセ多様体を構成・分類する上で鍵となるのは次の命題である。

命題 2 命題 1 で与えた条件 (1), (2), (3) について、次が成り立つ。

- (i) 条件 (3) を満たす K は、 M の一点で (1) および (2) を満たしていれば M 全体で満たす。
- (ii) 条件 (1), (2) の下で、 K に関する微分方程式 (3) は可積分である。

3.1 $\kappa = 0$ の場合

定理 3 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して、 $M = \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^+)^k$, $h = \sum_{i=1}^n (du^i)^2|_M$ とし、 ∇ を

$$K = \sum_{i=n-k+1}^n \left(-\frac{1}{u^i} \right) du^i \otimes du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}$$

を差テンソルとするアフィン接続とする。このとき、 (M, ∇, h) は定曲率 0 のヘッセ多様体である⁴。

さらに、もし (M', ∇', h') が単連結な定曲率 0 のヘッセ多様体ならば、ある k に対する (M, ∇, h) へのはめ込み写像 $\iota: M' \rightarrow M$ が存在して、 ∇', h' は ∇, h の ι による引き戻しに一致する。

⁴このヘッセ多様体は、例 1 と例 3 で与えたヘッセ多様体を用いて、 $(\mathbb{R}^{n-k}, D, \sum_{i=1}^{n-k} (du^i)^2) \times (\mathbb{R}^+, \nabla, dt^2|_{\mathbb{R}^+})^k$ と表わせる。したがって、接束は $\mathbb{C}^{n-k} \times (\widetilde{\mathbb{C}^\times})^k$ にケーラー多様体として同形である。

簡単に証明のあらましを述べよう。 $(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n (du^i)^2)$ の (原点 o を含む) 領域上に条件を満たす K を構成することを考える。 $\kappa = 0$ より 命題 1 の条件 (2)、(3) はそれぞれ、

$$(2') \quad K(Y, K(X, Z)) - K(X, K(Y, Z)) = 0$$

$$(3') \quad (\hat{\nabla} K)(X, Y; V) = -K(V, K(X, Y)) + K(K(V, X), Y) + K(X, K(V, Y))$$

となる。まず (1b) より $X \in T_o(\mathbb{R}^n)$ に対して $K(X, \cdot)$ は h に関して対称であり、(2') により任意の $X, Y \in T_o(\mathbb{R}^n)$ について $K(X, \cdot)$ と $K(Y, \cdot)$ は可換である。したがって、 $K(X, \cdot)$ ($X \in T_o(\mathbb{R}^n)$) は同時対角化可能であり、このことと (1a) を用いると、うまく直交座標系をとりかえれば、原点 o で $K_{jk}^i = c_i \delta_{ijk}$ となることが分かる。この初期条件のもとでは、微分方程式 (3') は容易に解くことができ、ヘッセ多様体として同形のものを誘導する解を除いて定理 3 の前半の結果を得る。後半の、得られたヘッセ多様体の「極大性」は、(3') の可積分性から導かれる。

3.2 $\kappa = 1$ の場合

n 次元連結多様体 M に対して、 $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}^+$ とすると、 $(p, t) \in \widetilde{M}$ における $\widetilde{M}$ の接空間は、自然に $T_p(M) \oplus T_t(\mathbb{R}^+)$ と同一視される。この同一視を用いて、 M 上のベクトル場 X を $\widetilde{M}$ に持ち上げてできるベクトル場 $(X, 0)$ を $\widetilde{X}$ とする。また、 $\mathbb{R}^+$ 上のベクトル場 $\partial/\partial t$ を $\widetilde{M}$ に持ち上げたものを $\widetilde{T}$ とする。

補題 4 定曲率 -4 のヘッセ多様体 (M, ∇, h) に対して、 $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}^+$ 上のアフィン接続 $\widetilde{\nabla}$ とリーマン計量 $\widetilde{h}$ を

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_X Y - 2th(X, Y)\widetilde{T}, \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{T} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \widetilde{X} = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \widetilde{T} = -\frac{1}{t}\widetilde{T}$$

および

$$\widetilde{h} = t^2 h + dt^2$$

で定める。このとき、 $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{h})$ は定曲率 0 のヘッセ多様体である。

そこで、定理 3 で得られたヘッセ多様体に対して、上の条件をみたす特別な接ベクトル場 $\widetilde{T}$ が存在するかどうかを調べることにより、次の定理を得る。

定理 5 $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{\alpha=1}^{n+1} (x^\alpha)^2 = 1, x^1, x^2, \dots, x^{n+1} > 0\}$ とし、 h を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的なユークリッド計量 $\sum_{\alpha=1}^{n+1} (dx^\alpha)^2$ から M 上に誘導されるリーマン計量とする。 M 上のベクトル場 $X = \sum_{\alpha=1}^{n+1} X^\alpha (\partial/\partial x^\alpha)$, $Y = \sum_{\alpha=1}^{n+1} Y^\alpha (\partial/\partial x^\alpha)$ に対して、

$$K(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ -\frac{X^\alpha Y^\alpha}{x^\alpha} + \left(\sum_{\beta=1}^{n+1} X^\beta Y^\beta \right) x^\alpha \right\} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

により M 上の $(1, 2)$ テンソル場 K を定め、 K を差テンソルとするアフィン接続を ∇ とする。このとき、 (M, ∇, h) は定曲率 -4 のヘッセ多様体である。

さらに、もし (M', ∇', h') が単連結な定曲率 -4 のヘッセ多様体ならば、 (M, ∇, h) へのはめ込み写像 $\iota: M' \rightarrow M$ が存在して、 ∇', h' は ∇, h の ι による引き戻しに一致する。

特に、

系 6 多項分布族から得られるヘッセ多様体は、定曲率 -1 のヘッセ多様体の中で「極大」な唯一のものである。

3.3 $\kappa = -1$ の場合

$\kappa = -1$ の場合にも、補題 4 と類似した次の補題が成り立つ。

補題 7 定曲率 4 のヘッセ多様体 (M, ∇, h) に対して、 $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R}^+$ 上のアフィン接続 $\widetilde{\nabla}$ とリーマン計量 $\widetilde{h}$ を

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla}_X Y + 2th(X, Y)\widetilde{T}, \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{T} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \widetilde{X} = 0, \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \widetilde{T} = -\frac{1}{t}\widetilde{T}$$

および

$$\widetilde{h} = t^2 h - dt^2$$

で定める。このとき、 $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{h})$ は定曲率 0 のヘッセ多様体である。

しかしながら、この場合には $\widetilde{h}$ が $\widetilde{M}$ 上のローレンツ計量になるため、定理 3 のような一般的な構成・分類は難しそうである。そこで、特に

$$(4) \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \widetilde{T} = -\frac{1}{t}\widetilde{T} \quad \text{かつ} \quad h(\widetilde{X}, \widetilde{T}) = 0 \quad \text{のとき} \quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{T} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \widetilde{X} = 0$$

をみたすベクトル場 $\widetilde{T}$ をもつ場合のみを考える。このような制限をつけても、次元が高い場合は容易ではないと思われるが、 $\widetilde{M}$ が 3 次元の場合には、すべて構成することができる。

定理 8 $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$, $\widetilde{h} = (dy^1)^2 - dy^2 dy^3$ とする。定数 a, b ($a \neq 1$) に対して、

$$P(y) = \left(ay^3 - y^2 - \frac{b}{2}y^1 \right)^2 - \left(4a + \frac{b^2}{4} \right) (y^1)^2$$

とおき、(1, 2) テンソル場 $\tilde{K}$ の (y^1, y^2, y^3) に関する成分を

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{11}^1 &= \frac{4ay^1 - by^2 + aby^3}{P}, & \tilde{K}_{11}^2 &= \frac{2a(ay^3 - y^2)}{P}, & \tilde{K}_{11}^3 &= \frac{-2(ay^3 - y^2)}{P} \\ \tilde{K}_{12}^1 &= \frac{ay^3 - y^2}{P}, & \tilde{K}_{12}^2 &= \frac{2ay^1}{P}, & \tilde{K}_{12}^3 &= \frac{-2y^1}{P} \\ \tilde{K}_{13}^1 &= \frac{-a(ay^3 - y^2)}{P}, & \tilde{K}_{13}^2 &= \frac{-2a^2y^1}{P}, & \tilde{K}_{13}^3 &= \frac{2ay^1}{P} \\ \tilde{K}_{22}^1 &= \frac{y^1}{P}, & \tilde{K}_{22}^2 &= \frac{2a(y^1)^2 - by^1y^2 + y^2(ay^3 - y^2)}{(ay^3 + y^2)P}, \\ & & \tilde{K}_{22}^3 &= \frac{2(y^1)^2 + by^1y^3 - y^3(ay^3 - y^2)}{(ay^3 + y^2)P} \\ \tilde{K}_{23}^1 &= \frac{-ay^1}{P}, & \tilde{K}_{23}^2 &= \frac{a^2(2(y^1)^2 + by^1y^3 - y^3(ay^3 - y^2))}{(ay^3 + y^2)P}, \\ & & \tilde{K}_{23}^3 &= \frac{2a(y^1)^2 - by^1y^2 + y^2(ay^3 - y^2)}{(ay^3 + y^2)P} \\ \tilde{K}_{33}^1 &= \frac{a^2y^1}{P}, & \tilde{K}_{33}^2 &= \frac{a^2(2a(y^1)^2 - by^1y^2 + y^2(ay^3 - y^2))}{(ay^3 + y^2)P}, \\ & & \tilde{K}_{33}^3 &= \frac{a^2(2(y^1)^2 + by^1y^3 - y^3(ay^3 - y^2))}{(ay^3 + y^2)P}\end{aligned}$$

で定める。このとき、 $\tilde{K}$ を差テンソルとするアフィン接続 $\tilde{\nabla}$ をとると、 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{h})$ は定曲率 0 のヘッセ多様体であり、 $\tilde{T} = \sum_{\alpha=1}^3 y^\alpha (\partial/\partial y^\alpha)$ は (4) をみたす。

注意 (4) をみたすベクトル場 $\tilde{T}$ を持つ定曲率 0 のローレンツ型 3 次元ヘッセ多様体は、定理 8 で与えられるもので本質的に全てである。この中からヘッセ多様体として同形であるものを除く作業は本稿を書いている時点では完了していないが、最終的には数個になると思われる。

上の注意に述べたように $\kappa = -1$ の場合の分類はまだ完成していないが、次のことは言える。

系 9 正規分布族から得られるヘッセ多様体は、定曲率 8 の 2 次元ヘッセ多様体の中で「極大」かつ計量が完備な唯一のものである。

参考文献

- [1] 志磨裕彦, ヘッセ幾何学, 裳華房, 2001. (英訳: H. Shima, *Hessian Geometry*, World Scientific, Singapore, 2007.)