

Sharp 指標と有限単純群

筑波大 飯寄 信保 (Nobuo Iiyori)

G を有限群, χ を G の一般指標とする。1904年に Blichfeldt は $b(\chi) = |G|^{-1} \prod_{x \in \chi(G^\#)} (\chi(1) - x)$ が有理整数になることを示した。 $b(\chi) = 1$ のとき指標 χ は Sharp または $\chi(G^\#)$ 型の sharp 指標と呼ばれる。又、 $|\chi(G^\#)|$ を χ の rank と言う。Sharp 指標については、Cameron, Kataoka, Kiyota, Matsuhisa によっていろいろと考察されている。

定義 (1) χ_G を G の正則指標、 n を有理整数とする。一般に $\chi_G + n1_G$ は sharp 指標であるが、これを自明な sharp 指標と呼ぶ。

(2) χ を G の (Sharp) 指標とする。 $\chi(G^\#)$ が $\mathbb{Z} - \{\chi(1) - 1, \chi(1) + 1\}$ の部分集合で又、 $\chi(G^\#) = L_1 \cup \dots \cup L_k$ (disjoint union) に分解され、 $i \neq j$ ならば $l_i \in L_i, l_j \in L_j$ は常に $(\chi(1) - l_i, \chi(1) - l_j) = 1$ となるとき χ は k -連結であると言う。

さて、Sharp 指標に関する主な問題に次のようなものがある。

問題 (1) 任意の型 L に対し、 L 型の Sharp 指標をもつ群を分類せよ。

(2) 自明でない Sharp 指標をもつ群を見つけよ。

(3) 自明でない Sharp 指標をもたない群を見つけよ。

[2] には、問題(1)について色々な結果が書れておりその中の一つに次の定理1がある。

定理1 (Cameron-Kiyota [2]) $\{-1, 1\}$ 型の Sharp 指標をもつ群は次のものに限る。

$$D_8, Q_8, S_4, \hat{S}_4, SL(2, 3), GL(2, 3), S_5, SL(2, 5) \\ PSL(2, 7), A_6, \hat{A}_7, \text{そして } M_{11}.$$

問題(2)については、あまり考察されていなか、たが、最近次の定理が Kataoka によって示された。

定理2 (Kataoka [5]) 偶数位数基本アーベル群は自明でない Sharp 指標を持たない。

Kataoka は実際は上の定理をもつと大きなクラスの群について示している。

定義 G の Prime graph $\Gamma(G)$ とは、 $V(\Gamma(G)) = \pi(G)$ で $x, y \in V(\Gamma(G))$ ($x \neq y$) に対し、 G が 1 位数 xy の元を持つとき、 $\{x, y\} \in E(\Gamma(G))$ となるようなグラフのことである。

この Prime graph と $\mathbb{R}$ -連結 Sharp 指標の概念は密接に関係している。問題(3)に関して次の結果を得た。

定理 3 (Iiyori [3]) 次の (1)、(2) は同値である。

- (1) $\Gamma(G)$ の連結成分の個数が 2 以上。
- (2) G は rank 2 の 2-連結 Sharp 指標をもつ。

(2) から (1) は Kiyota による。証明の概略を述べる。次の補題は有限群の Sharp 指標を見つける上で、重要なものである。

補題 G を有限群とし、 $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G) = \{\chi_0, \dots, \chi_r\}$ ($\chi_0 = 1_G$) とする。又、 $\{g_0, \dots, g_r\}$ ($g_0 = 1$) を G の共役類の代表系とする。 $A = (\chi_i(g_j))$ とおく。 $S = {}^t(s_1, \dots, s_r)$ が $\prod_{\sigma \in \{s_1, \dots, s_r\}} \sigma = |G|$ を満たしているとする。

もし

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = -A_{11} \begin{pmatrix} |C_G(g_1)|^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |C_G(g_r)|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^r$$

ならば、 $\chi = \sum_{i=1}^r a_i x_i + z 1_G$ ($z \in \mathbb{Z}$) は Sharp 指標である。

ここで A_{11} は A の 1 行 1 列の余因子行列とする。

さて $\Gamma(G)$ の連結成分の個数 s が 2 以上ならば、 $|G| = n_1 \cdots n_t$ ($n_i \in \mathbb{Z}$) で次の性質を満たすものがあるのが容易にわかる。

(i) $(n_i, n_j) = 1$ for $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t$ かつ $1 < t \leq s$ 。

(ii) $\tau \in G^\#$ に対しある i が存在して $|C_G(\tau)|$ は n_i を割り切る。

そこで $\Gamma_i = \{\tau \in G^\# \mid n_i \equiv 0 \pmod{|C_G(\tau)|}\} \cup \{1\}$ とおき、 $\theta \in \text{Irr}_{\mathbb{Q}}(G)$

に対し、 θ_i を

$$\theta_i(\tau) = \begin{cases} |G|\theta & \tau \in \Gamma_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とおく。 θ_i は Brauer の指標定理から一般指標になることがわかる。これと補題から

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau = 1 \\ -n_i & \tau \in \Gamma_i - \{1\} \text{ for } 1 \leq i \leq t \end{cases}$$

とおくと φ が Sharp 指標になることがわかる。従って (1) から (2) を得る。(2) から (1) は背理法を用いて示される。

定理3によ, rank 2 の 2-連結 Sharp指標をもつ群の分類は実質, Prime graph の連結成分の個数が 2 以上の有限単純群 G の分類に帰着される。この分類は Williams に始まり Yamaki と筆者によ, て完成されている。

以上.

References

- [1] H.F. Blichfeldt, A theorem concerning the invariants of homogeneous groups with some applications to substitution groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 5(1904) 461-466.
- [2] P.J. Cameron and M. Kiyota, Sharp characters of finite groups, *J. Algebra* 115(1988) 123-143.
- [3] N. Iiyori, Sharp characters and prime graphs of finite groups (preprint)
- [4] N. Iiyori and H. Yamaki, Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, (in preparation)
- [5] T. Kataoka, private communication. (1991年1月11日付)
- [6] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups. *J. Algebra* 69(1981) 487-513.