

実質強受動性について

早大・理工 松本 隆

横浜市大・文理 一乗重雄

1. まえがき.

昨年の電気回路の力学系研究集会に於て、著者の一人が提起した次のような問題が異種素子間の結合がない場合に肯定的に解けることを示す. ([1]).

問題. *regular* な回路に適当に線形抵抗を足すことによって、次の条件 (i), (ii) を満たし、かつ、そのときに得られる回路も *regular* であるように出来るか?

条件 (A) (i) 抵抗のみからなる *tree* が存在する。

(ii) キャパシタとインダクタを全て含む *tree* が存在する。

なお、この問題の肯定的な解答は次のことを意味している。
与えられた抵抗素子の数を p とすると、素子の特性によって p 次元の滑らかな (閉) 部分多様体 $\Lambda_R \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ が決まる。
抵抗の n ー を表わす関数 $W_R : \Lambda_R \longrightarrow \mathbb{R}$ を、

$$W_R(i_R, v_R) = \sum_{i=1}^p i_{Ri} v_{Ri}$$

と決める。

定義. ある compact set $\Omega_R \subset A_R$ が存在して,

$$\inf \{ W_R(i_R, v_R) \mid (i_R, v_R) \in A_R - \Omega_R \} > 0$$

が成立するとき, この回路の抵抗回路が (Ω_R に関して) 実質強受動であるという。

抵抗回路が実質強受動であるという性質は, その回路の抵抗素子のみによって決まり, キャパシタ及びインダクタと素子の接ぎ方にはよらない。

昨年の結果と合せて, 次の結果が得られる。

キャパシタとインダクタに蓄えられるエネルギー関数 E が proper, すなわち, $E^{-1}(\text{compact set}) = \text{compact}$ が成り立つとき, 次の結果が成立する。

結果. 抵抗回路が実質強受動である regular な回路に対して, 適当に線形抵抗を付け加えれば, 新しい回路は compact attractor を持つ。すなわち, 任意の初期値に対して, ある時間より後は常に一定の compact set の中に解がはいっている。

2. 準備

与えられた回路の各素子に向きをつけて得られる向きのついたグラフを G とする。電気回路の状態は各素子の電流と

電圧によって記述される。いま、素子の数を b とする。各素子の電流を成分とするベクトル $i = (i_1, \dots, i_b)$ を考えると、これは b 次元のベクトル空間 R^b の元である。このベクトル空間も $C_1(G)$ と書く。各素子の電圧を成分とするベクトルも b 次元ベクトル空間の元と考えられる。各 branch での電圧、電流を考えたのと同様に、各 node での電流、電圧も仮に考えることにする。node の数を n とすれば、各 node での電流（電圧）を成分とするベクトルは n 次元ベクトル空間 $C_0(G)$ の元である。各素子の電流、電圧は、Kirchhoff の法則を満たし、抵抗素子の特性によって抵抗素子の電圧と電流は規定される。

まず、Kirchhoff の法則を考えよう。電流に関する Kirchhoff の法則は「各 node に流れ込む電流と流れ出す電流は等しい」であった。いま、境界写像と呼ばれる線形写像

$$\partial: C_1(G) \longrightarrow C_0(G)$$

を次のように定義する。各素子の電流を表わすベクトル $i = (i_1, \dots, i_b)$ を $i_1 b_1 + \dots + i_b b_b \in C_1(G)$ と書くことにする。ここで、 b_j は j 番目の branch を、 i_j は b_j を流れる電流である。いま、 b_j が node n_j から $n_{j'}$ に向う branch であるとき、

$$\partial(i b_j) = 1 n_{j'} - 1 n_j$$

と定義し、線形に拡張して $\partial: C_1(G) \longrightarrow C_0(G)$ を得る。

すなわち,

$$\partial(\vec{i}) = \partial\left(\sum_{j=1}^b i_j b_j\right) = \sum_{j=1}^b i_j \partial(b_j) = \sum_{j=1}^b i_j (n_{j'} - n_j)$$

である。 $\partial(\vec{i})$ は、各 branch の電流 $\vec{i}$ に對して、各 node に流れ込む電流の和を表わすから、Kirchhoff の電流法則は

$$\partial(\vec{i}) = 0, \text{ あるいは, } \vec{i} \in \text{Ker } \partial$$

と表わせる。

次に、各素子の電圧 $\vec{v} = (v_1, \dots, v_b)$ に對して、 $C_1(G)$ の dual space $C^1(G)$ の元 $P_{\vec{v}}$ を次のようにして決める。 $P_{\vec{v}}: C_1(G) \rightarrow \mathbb{R}$ は線形写像で、 $\vec{i} \in C_1(G)$ に對して、

$$P_{\vec{v}}(\vec{i}) = \sum_{j=1}^b v_j i_j$$

によって定義されるものとする。 $\vec{v}$ と $P_{\vec{v}}$ も同-視^{して}、 $\vec{v}$ を $C_1(G)$ の元と考え、 $\vec{v} = v_1 b_1^* + \dots + v_b b_b^*$ と表わす、但し、 $b_1^*, \dots, b_b^*$ は $b_1, \dots, b_b$ の dual basis である、(すなわち、 $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$)

同様に、各 node での電圧 $\vec{w}$ も各 node での電力関数も仮に考えることによって、 $C_0(G)$ の dual space $C^0(G)$ の元と考えることが出来、 $\vec{w} = w_1 n_1^* + \dots + w_n n_n^*$ と表わす。

$\partial^*: C^0(G) \rightarrow C^1(G)$ も写像 $\partial: C_1(G) \rightarrow C_0(G)$ の双対写像とする、すなわち、

$$(\partial^* P_{\vec{w}})(\vec{i}) = P_{\vec{w}}(\partial \vec{i}).$$

このとき、Kirchhoff の電圧法則は、

$$\vec{v} \in \text{Im } \partial^*, \text{ あるいは, } \vec{v} = \partial^* \vec{w}, \vec{w} \in C^0(G)$$

と表わせる。ある $w \in C^0(G)$ に対して, $v = \partial^* w$ と書ける
とすると,

$$\begin{aligned} P_v(i) &= P_{\partial^* w}(i) = P_w(\partial i) \\ &= P_w\left(\sum_{j=1}^b i_j(n_{j'} - n_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^b (w_{j'} - w_j) i_j, \end{aligned}$$

となるから,

$$v_j = w_{j'} - w_j$$

となる。これは, 各 branch の電圧がその branch の両端の
電圧の差として得られることを示していることに他ならない。

結局, Kirchhoff の法則を満足する電圧, 電流 (i, v) の条
件は, $(i, v) \in \text{Ker } \partial \times \text{Im } \partial^* \subset C_1(G) \times C^1(G)$ である。
 $K = \text{Ker } \partial \times \text{Im } \partial^*$ は $C_1(G) \times C^1(G)$ の b 次元の部分空間であ
り, Kirchhoff space と呼ぶ。

次に, 抵抗の特性を考えよう。以下, 異種素子間の結合
はないものと仮定する。従って, 抵抗の branch の電圧, 電
流を v_R, i_R とすれば, 特性多様体 Λ は次の様にとえられる。

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_R \times \mathbb{R}^{b-p} \times \mathbb{R}^{b-p} \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b, \\ &= \{(i, v) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \mid (i_R, v_R) \in \Lambda_R\}. \end{aligned}$$

ただし, $\Lambda_R \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ は p 次元の部分多様体であり,
 $(i, v) = (i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C)$ とする。

K と Λ が transverse ([2]) なら,

$$\Sigma = K \cap \Lambda \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$$

は, $(b-p)$ 次元の (滑らかな) 部分多様体であり, Σ 上でダイナミクスが起こる。キャパシタの数と γ , インダクタの数と λ とすれば, $b = p + \gamma + \lambda$ である。

キャパシタの電圧, インダクタの電流に注目して, 写像

$$\pi: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda$$

を, 射影: $\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b = (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda) \times (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda$

の Σ への制限とする。すなわち, $(\dot{v}, v) = (\dot{v}_R, \dot{v}_L, \dot{v}_C, v_R, v_L, v_C)$ に対して,

$$\pi(\dot{v}, v) = (\dot{v}_L, v_C)$$

と決める。 π が diffeomorphism のとき, regular な回路と呼び, このとき, Σ 上のダイナミクスは $(v_C, \dot{v}_L)$ によって記述される。 ([3])

前にも述べたように, 抵抗のポート

$$W_R: \Lambda_R \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$W_R(\dot{v}_R, v_R) = \sum_{i=1}^p v_{Ri} \dot{v}_{Ri}$$

で定義する。次に, $\iota: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ を自然な inclusion とし,

$\pi'_R: \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ を射影, $\pi'_R(\dot{v}, v) = (\dot{v}_R, v_R)$

とする。このとき,

$$W = W_R \circ \pi'_R \circ \iota: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

W_R は回路のトポロジー, つまり素子の接ぎ方によるが, W はそうでないことに注意する。

コンパクト部分集合 $\Omega \subset \Sigma$ があって

$$\int \{W(\omega) \mid \omega \in \Sigma - \Omega\} > 0$$

回路網を, Ω に関して実質強受動という。

ト集合 $\Omega_R \subset \Lambda_R$ があって

$$\{W_R(i_R, v_R) \mid (i_R, v_R) \in \Lambda_R - \Omega_R\} > 0$$

Λ_R を, Ω_R に関して実質強受動という。

たように, 回路が実質強受動だという性質は回路-
-によっているが, 抵抗回路 Λ_R が実質強受動で
性質は Λ_R のみによっているから, 後者を調べる
よりはるかにたやすい。

regular な回路で, Λ_R がある Ω_R に関して実質
-とする。このとき, 次の成り立つ。

シタに並列, 及び, インダクタに直列に線形抵抗
条件 (A) を満たすようにできる。

できた回路も regular である。

できた抵抗の特性多様体 $\Lambda_R^\#$ はある $\Omega_R^\#$ に対して
である。

[証明] 与えられた回路から決まる (向きのついた) グラフも G とする。回路は *regular* だから, *proper tree* (すべてのキャピシタを含み, インダクタを含まない *tree*) が存在する。([4]) この *tree* を T とする。 T の (従って G の) キャピシタ全部からなる部分グラフも T_L とし, $T = T_L \cup T_{R_1}$ とする。すなわち, T_{R_1} は T に含まれる抵抗からなる部分グラフである。キャピシタに並列に線形抵抗 $f_k, k=1, \dots, r$ も加える。加えた抵抗によるグラフも $\mathcal{F}$ と書けば, $T_{R_1} \cup \mathcal{F}$ は $G \cup \mathcal{F}$ の *tree* になっている。次に $\tilde{\gamma}$ も G の T に関する *link* とする, すなわち, $G = T \cup \tilde{\gamma}$. $\tilde{\gamma}$ はキャピシタも含まないから, インダクタからなる部分グラフと抵抗からなる部分グラフに分割でき, $\tilde{\gamma} = \tilde{T}_L \cup \tilde{T}_{R_2}$ と書く。各インダクタに直列に線形抵抗 $h_k, k=1, \dots, \Delta$ を挿入する。挿入した抵抗からなる部分グラフも $\mathcal{H}$ と書く。このとき,

$$T_1^\# = T_{R_1} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$$

は連結で

$$G^\# = G \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$$

の全ての *node* を含む。また, $T_1^\#$ はループも持たないから, $G^\#$ の *tree* である。 $T_1^\#$ は抵抗のみからなる *tree* で, まえがきの中の条件(A)の(i)を満足する。次に,

$$T_2^\# = T \cup \tilde{T}_L$$

とすれば, これも $G^\#$ の tree になり, $T_2^\#$ は $G^\#$ のすべてのチャ
 ンピタとインダクタを含む。これで条件(A)の(ii)が満たされる。

さて, 定理の(iii)は, 線形抵抗を付け加えただけだから, 明
 らかに満足するので, 定理の(iv), すなわち, 新しい回路も
regular であることも言えば良い。

もとの回路には proper tree T があるから, これに関してキ
 ルヒホフの法則も, 基本カットセット行列 Q , 基本ループ行
 列 B を用いて具体的に書き下すと(1)~(4)になる。

$$v_L + F_{LR_1} v_{R_1} + F_{LC} v_C = 0 \quad \dots (1)$$

$$v_{R_2} + F_{R_2R_1} v_{R_1} + F_{R_2C} v_C = 0 \quad \dots (2)$$

$$i_{R_1} - F_{R_2R_1}^T i_{R_2} - F_{LR_1}^T i_L = 0 \quad \dots (3)$$

$$i_C - F_{R_2C}^T i_{R_2} - F_{LC}^T i_L = 0 \quad \dots (4)$$

$$(i_{R_1}, i_{R_2}, v_{R_1}, v_{R_2}) \in A_R \quad \dots (5)$$

次に,

$$T_3^\# = T \cup H$$

とみると $T_3^\#$ は $G^\#$ の proper な tree になっている。新しい回路
 に関して, Kirchhoff の法則と, 抵抗の特性条件も上と同様に
 書き下すと, 加えた線形抵抗の接ぎ方より次が得られる。

$$v_L + F_{LR_1} v_{R_1} + F_{LC} v_C + v_R = 0 \quad \dots (1)^\#$$

$$v_{R_2} + F_{R_2R_1} v_{R_1} + F_{R_2C} v_C = 0 \quad \dots (2)^\#$$

$$v_f + F_{fC} v_C = 0 \quad \dots (i)$$

$$\dot{i}_{R_1} - F_{R_2 R_1}^T \dot{i}_{R_2} - F_{L R_1}^T \dot{i}_L = 0 \quad \dots (3)^\#$$

$$\dot{i}_C - F_{R_2 C}^T \dot{i}_{R_2} - F_{L C}^T \dot{i}_L - \dot{i}_f = 0 \quad \dots (4)^\#$$

$$\dot{i}_R - F_{L R}^T \dot{i}_L = 0 \quad \dots (ii)$$

$$(\dot{i}_{R_1}, \dot{i}_{R_2}, v_{R_1}, v_{R_2}) \in \Lambda_R \quad \dots (5)^\#$$

$$v_f - f \dot{i}_f = 0 \quad \dots (iii)$$

$$v_R - h \dot{i}_R = 0 \quad \dots (iv)$$

さて、もとの回路が regular だから、 $\pi: \Sigma = K \cap \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^r$ が diffeomorphism, すなわち $\pi^{-1}: \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^r \rightarrow \Sigma$ が存在して微分可能な写像である。言いかえると、式 (1), (2), (3), (4), (5) によって、 $(\dot{i}, v) = \pi^{-1}(\dot{i}_L, v_C)$ が微分可能な写像として決まっている。新しい回路での state space $\Sigma^\# = K^\# \cap \Lambda^\#$ は、式 (1)^\# \sim (5)^\# 及び 式 (i) \sim (iv) によって与えられている。今、 $v_L' = v_L + v_R$, $\dot{i}_C' = \dot{i}_C - \dot{i}_f$ とおくと、式 (1)^\# \sim (4)^\# はそれぞれ式 (1) \sim (4) と全く同じものになり、(5)^\# は最初から (5) と同じであるから、新しい回路においても、

$$(\dot{i}_C', \dot{i}_{R_1}, \dot{i}_L, \dot{i}_{R_2}, v_C, v_{R_1}, v_L', v_{R_2}) = \pi^{-1}(\dot{i}_L, v_C)$$

が成りたっている。また、(i), (ii) より、 $v_f, \dot{i}_R$ は $\dot{i}_L, v_C$ によって (滑らかに) 決まっている。さらに、(iii), (iv) によって v_f, v_R が決まり、最後に、 $v_L' = v_L + v_R$, $\dot{i}_C' = \dot{i}_C - \dot{i}_f$ の関係から、 $v_L, \dot{i}_C$ も決まる。結局、

$$(\dot{i}^\#, v^\#) = (\pi^\#)^{-1}(\dot{i}_L, v_C)$$

と書け、今の決り方から $(\pi^\#)^{-1}$ は滑らかであり、明らかに、
 $\pi^\#: \Sigma^\# \rightarrow R^{\lambda \times R^r}$ の逆写像であるから、 π は diffeomorphism
 である。これは新しい回路が regular であることを示してい
 る。(証明終り。)

文 献

- [1] 松本隆, "電気回路網のエネルギー, パワーそして混
 合ポテンシャルについて", 数理研講究録 284, "電気回路の
 カ学系" 1976年10月, pp.1~17
- [2] S. Ichiraku, "On the transversality conditions in electrical
 circuits.", to appear in Yokohama Math. J.
- [3] S. Smale, "On the mathematical foundation of electrical
 circuit theory.", J. Differential Geometry, 7, pp.193~210, (1972).
- [4] T. Matsumoto, "On the dynamics of electrical networks.",
 J. Differential Equations, 21, pp.179~196, (1976).