

直交群の表現環について

大阪市大 南 登男

1. コンパクトLie群 G の複素表現環を $R(G)$ で表わす.

$O(2n+1)$ は $SO(2n+1)$ と Z_2 の直積であるから, $R(O(2n+1))$ は $R(SO(2n+1))$

と $R(Z_2)$ に同形である. ところが $O(2n)$ は $SO(2n)$ と Z_2 の半直積であるので少々事情が異なる. ここでは次の定理の証明の概略を述べる.

定理 1. $R(O(2n)) \cong \mathbb{Z}[\lambda^1 \bar{\rho}_{2n}, \dots, \lambda^n \bar{\rho}_{2n}, \bar{\tau}_n] / (\lambda^n \bar{\rho}_{2n} (\bar{\tau}_n - 1), \bar{\tau}_n^2 - 1)$,

ここで, $\lambda^k \bar{\rho}_{2n}$ ($k=1, 2, \dots, n$) は標準的な表現 $\rho_{2n}: O(2n) \rightarrow U(2n)$ の k 重外積巾を表わし, また $\bar{\tau}_n$ は行列式が定める 1 次元の表現を示す.

2. $\ell: H \rightarrow G$ をコンパクトLie群 G の閉部分群の包含写像

とするとき, $\ell^*: R(G) \rightarrow R(H)$ で制限写像を表わし, また $\ell_*:$

$R(H) \rightarrow R(G)$ で誘導表現写像 [1], [4] を表わす.

$SO(2n)$ 及び $O(2n-1)$ の $O(2n)$ への包含写像をそれぞれ ℓ_1 と

するとき Segal の結果 ([4], p. 119) から次の等式を与える.

$$(1) \quad i_*(1) = 1 + \bar{\epsilon}_{2n} \quad , \quad (2) \quad i_*(1) = 1 - \bar{\epsilon}_{2n} \quad .$$

$$\epsilon_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \in O(2n) \text{ とおく. } \rho \text{ を } SO(2n) \text{ の表現とすると}$$

$\rho'(g) = \rho(\epsilon_{2n} g \epsilon_{2n})$, $g \in SO(2n)$, で定義される表現 ρ' を $C_{\epsilon_{2n}}(\rho)$ で表わす.

補題 1. ρ を既約な $O(2n)$ の表現とする. このとき $i^*(\rho)$ が既約な $SO(2n)$ の表現であるか, あるいは $i^*(\rho) = \rho_1 \oplus \rho_2$, ただし ρ_k ($k=1, 2$) は既約な $SO(2n)$ の表現を示す. 更に後者の場合 $\rho_2 \cong C_{\epsilon_{2n}}(\rho_1)$ かつ $i_*(\rho_1) \cong \rho$ が成立する.

略証明. i_* は $R(O(2n))$ -準同形であるから, (1) より

$$i_*(i^*(\rho)) = \rho(1 + \bar{\epsilon}_{2n})$$

を与える. 一方 Bott による i_* の定義 ([1], p. 169) から, ρ が $\rho \oplus \bar{\epsilon}_{2n}$ に同値でないとき

$$i_*(i^*(\rho)) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{SO(2n)}(i^*(V), i^*(V))(\rho + \rho \oplus \bar{\epsilon}_{2n}) + \dots$$

を与える. したがって両者を比較すれば $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{SO(2n)}(i^*(V), i^*(V)) = 1$ がわかる. ただし, V は ρ の表現空間である. これは $i^*(\rho)$ の既約性を示す. 同様にして ρ が $\rho \oplus \bar{\epsilon}_{2n}$ に同値なるとき $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{SO(2n)}(i^*(V), i^*(V)) = 2$ をえる. これは $i^*(\rho)$ が同値でない既約表現 ρ_k ($k=1, 2$) の和に等しいことを示す. $C_{\epsilon_{2n}}(\rho_1) \cong \rho_2$ の証明については [2], 定理 (49.2) の証明及びその注意を参照されたい.

また $\lambda_*(P) \cong P$ は (1) の証明と同じ方法で示される。(終り)

Z_2 を E_m で生成される $O(2n)$ の部分群とする. E_m による $R(SO(2n))$ の共役自己同形 C_{E_m} で不変な要素から生成される部分多項式環を $R(SO(2n))^{Z_2}$ で表わす. このとき次の同形が成立する.

$$\text{補題 2. } R(SO(2n))^{Z_2} \cong Z[\lambda^{1/2} P_{2n}, \dots, \lambda^n P_{2n}] ,$$

ただし, 記号は [3] にしたがう.

証明. [3], §13 の命題 (9.4) と定理 (10.3) による.

G をコンパクト Lie 群とする. このとき Cartan 部分群 (i.e. その正規化部分群との指標が有限であるような位相的巡回群) が存在し, その共役類の個数は有限である ([4], p. 115).
而も制限写像

$$(3) \quad R(G) \rightarrow \sum_S R(S)$$

は単射である. ただし, S は Cartan 部分群の共役類の代表元を表わす. とくに $O(2n)$ については, その Cartan 部分群の共役類は 2 個で, かつ $SO(m)$ の極大輪環群を $TSO(m)$ で表わすときその代表元として $TSO(2n)$ 及び $TSO(2n-2) \times Z_2$ をとることかできる.

定理 1 の等式の右辺を R_n とおく. 最初に定理 1 において $n=1$ の場合を証明する.

$$\text{定理 2. } R(O(2)) \cong R,$$

証明. $R_2=1$ は R の定義から明らか. また (3) を用いれば

$\bar{p}_1 \bar{p}_2 = \bar{p}_2$ 及び R_1 が $R(O(2))$ の部分多環環ることかわかる. p を既約な $O(2)$ の表現とする. 補題 1 は $i^*(p)$ が 2 つの型をもつことを示す. 前者の場合, $i^*(p)$ は既約である. ところが $C_2(i^*(p)) \cong i^*(p)$, かつ $SO(2)$ が可換群であることから $i^*(p)$ は 1 次元である, したがって $i^*(p) = 1$, よって (3) を用いれば $p = 1$ または $p = \bar{p}_2$ なることが分かる. 後者の場合, $i_*(p) = p$ なる既約な $SO(2)$ の表現 p が存在する. ところで α を $SO(2)$ の標準的な自明でない 1 次元表現とするとき $i_*(\alpha^{\pm m})$ ($m \geq 0$) が R_1 に含まれることが分かる証明が終る. これは (3) 及び (2) の証明と同じ方法によって証明される.

補題 3. R_n は $R(O(2n))$ の部分多環環である ($n \geq 2$).

略証明. 包含写像 $R: SO(2n-2) \times O(2) \rightarrow O(2n)$ を考える.

$$R^*: R(O(2n)) \rightarrow R(SO(2n-2) \times O(2))$$

は $O(2n)$ と $SO(2n-2) \times O(2)$ が同一の Cartan 部分群 $TSO(2n)$, $TSO(2n-2) \times Z_2$ をもつから (3) によって単射である. ところで定理 2 及び補題 2 から R^* の像は R に含まれることが分かる. ただし, $R = \mathbb{Z}[\lambda^1 p_{2n-2}, \dots, \lambda^{n-1} p_{2n-2}, \bar{p}_2, \bar{p}_2] / (\bar{p}_2(\bar{p}_2 - 1), \bar{p}_2^2 - 1)$. ところで $R(O(2n))$ の生成元の R^* の像を調べることによって命題が証明される.

補題 4. $i^*(R_n) = R(O(2n-1))$.

証明. $O(2n-1)$ が $SO(2n-1) \times Z_2$ に同形することによる.

3. 定理1の証明

任意の $\chi \in R(O(2n))$ に対して, (1), (2) から

$$i_*(i^*(\chi)) = (1 + \bar{\gamma}_{2n})\chi, \quad j_*(j^*(\chi)) = (1 - \bar{\gamma}_{2n})\chi$$

をえる. 補題2及び補題4によって上式の左辺は R_n に含まれることが分かる. 何故ならば i^*, j^* の R_n への制限を考えると

$$i^*: R_n \rightarrow R(SO(2n))^{\mathbb{Z}_2}, \quad j^*: R_n \rightarrow R(O(2n-1))$$

は全射である. しなかつて $i^*(y_1) = i^*(\chi), j^*(y_2) = j^*(\chi)$ をええす. R_n のえ y_1, y_2 が存在する. よって

$$i_*(i^*(\chi)) = y_1(1 + \bar{\gamma}_{2n})$$

$$j_*(j^*(\chi)) = y_2(1 - \bar{\gamma}_{2n})$$

をえる. ところが $y_1(1 + \bar{\gamma}_{2n}), y_2(1 - \bar{\gamma}_{2n})$ は R_n のえである. 故に $2\chi \in R_n$ が分かる. ここで次の補題が証明されれば $\chi \in R_n$ は明らかである.

補題5. $\mathcal{A}^*(R_n)$ は R の直和因子である.

証明. R の任意のえが

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \bar{p}_2^k, \quad f_k \in \mathcal{A}^*(R_n)$$

なる型に表わされることを用いる.

文 献

[1] R. Bott : The index theorem for homogeneous differential operators,

in S. S. Cairns, Differential and combinatorial topology, a symposium
in honor of Marston Morse, Princeton, 1965. 167 - 186.

- [2] C. W. Curtis and I. Reiner : Representation theory of finite
groups and associative algebras, Pure and applied mathematics
vol. XI, J. Wiley and Sons, Inc., 1962.
- [3] D. Husemoller : Fibre bundles, MacGraw-Hill, Inc., 1966.
- [4] G. Segal : The representation ring of a compact Lie group,
Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes Scient. (Paris), 34 (1968),
113 - 128.