

マルコフ過程のポテンシャル作用素

東京教育大 理 佐藤 健一

マルコフ過程が transient ならば、ポテンシャル作用素は推移確率作用素の時間に関する積分として定義され、これについて多くの事実が知られているが、recurrent の場合には、ポテンシャル作用素をどのように定義したほうがよいのか、これはどのような性質をもつかについて、まだ残された部分が多い。すなわち、3次元ニュートンポテンシャルの理論は相当~~非常~~に面白いラスの transient なマルコフ過程へ一般化され、その本質が明かとなったが、^{部分が多い}平面における対数ポテンシャルの理論（これは2次元ブラウン運動に対応し、ブラウン運動は2次元では recurrent）の一般化はこれに比べて十分なされていない。いくつかの方向からこれに関係した研究が Kemeny-Snell, Orey, Spitzer, 佐藤, Port-Stone 等によってなされており、特にマルコフ連鎖と加法過程の場合は詳しい研究もあるが、ここでは、吉田の定義したポテンシャル作用素をとりあげて、まず、その一般的性質、これが

なり広いクラスの recurrent マルコフ過程に対しても定義されること、特にすべての時局的-様加法過程に対しても定義されることなどを示す。この部分は定理の証明を述べないが、吉田の結果の大部分は [7] またはそれに引用された論文に見ることができ、その他は (定理 3.6 を除き) [6] として出る予定である。次に、1次元安定過程のポテンシャル作用素について具体的に計算した。この部分は [6] が簡単にしか書けなかったのを、ここに完全な証明を書きこいた。

§ 1. バナッハ空間におけるポテンシャル作用素.

$\mathcal{H}$ をバナッハ空間, $T_t, t \geq 0$, を $\mathcal{H}$ 上の強連続な線型半群で $\|T_t\| \leq 1$ とする。その生成作用素を A , resolvent を $U^\lambda, \lambda > 0$, と表わす。すなわち

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (T_t f - f), \quad U^\lambda f = (\lambda - A)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt$$

($s\text{-lim}$ は強収束の極限を表わす)。

定義 (吉田) $\lim_{\lambda \downarrow 0} U^\lambda f$ の存在するような f が $\mathcal{H}$ に ∞ 個ある時, $\{T_t\}$ はポテンシャル作用素をもつといい、上の極限を Vf として定義される V をポテンシャル作用素という。 V の定義域 $\mathcal{D}(V)$ は、上の極限の存在

するような f の全体とする.

定理 1.1. (吉田) 『 $\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもつば, $\mathcal{D}(V)$ は A の値域 $\mathcal{R}(A)$ と一致し, A は 1 対 1 であり, (かつ) $V = -A^{-1}$ が成立立つ.』

$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素をもつための条件を与える次の定理も, 条件 (e) (f) (i) を除き吉田による.

定理 1.2. 『次の 9 つの条件は互いに同値である:』

- (a) $\{T_t\}$ がポテンシャル作用素をもつ.
- (b) $\mathcal{R}(A)$ が稠密.
- (c) かつ 2 の $f \in \mathcal{L}$ に対し $\lambda U^\lambda f \rightarrow 0$ (強), $\lambda \downarrow 0$.
- (d) " " (弱), "
- (e) " $\frac{1}{t} \int_0^t T_s f ds \rightarrow 0$ (強), $t \rightarrow \infty$.
- (f) " " (弱), "
- (g) A^* が 1 対 1.
- (h) かつ 2 の $\varphi \in \mathcal{L}^*$ に対し $\lambda (U^\lambda)^* \varphi \rightarrow 0$ ($\exists A$ 弱), $\lambda \downarrow 0$.
- (i) " $\frac{1}{t} \int_0^t T_s^* \varphi ds \rightarrow 0$ ($\exists A$ 弱), $t \rightarrow \infty$.』

さらに, $T_t^*, A^*, (U^\lambda)^*$ はそれぞれ T_t, A, U^λ の共役作用素であり, $\frac{1}{t} \int_0^t T_s^* \varphi ds$ とは次のような $\psi \in \mathcal{L}^*$ のことである:

$$\psi(f) = \frac{1}{t} \int_0^t (T_s^* \varphi)(f) ds, \quad f \in \mathcal{L}.$$

$U^\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt$ であるから, $\lambda \downarrow 0$ とした形式的には

$V = \int_0^\infty T_t dt$ とするが, 4.2.3 の場合は次のようにある.

定理 1.3. 『 $\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもつ時, 次の 2 つの条件は同値である:

(a) $\int_0^t T_s f ds \rightarrow u \quad (\text{弱}), \quad t \rightarrow \infty.$

(b) $f \in \mathcal{D}(V)$ かつ $Vf = u$ に対し, しかたある $g \in \mathcal{H}$ に対し $T_t u \rightarrow g \quad (\text{弱}), \quad t \rightarrow \infty.$

(a) の (弱) を (強) にかえたものは, (b) の (弱) と (強) にかえたものと同値である. ところが g は必ず 0 である.』

$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもつ時, $f \in \mathcal{D}(V)$ に対し $Vf = u$ に対し $\int_0^t T_s f ds \rightarrow u \quad (\text{強}), \quad t \rightarrow \infty$, とは保証されない (反例: deterministic 運動). しかし, $\int_0^t T_s f ds \rightarrow u \quad (\text{弱})$ と保証されない例と筆者は知らない.

一般に, $\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{M}$ が作用素 T の core であるとは, $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(T)$ であり任意の $f \in \mathcal{D}(T)$ に対し列 $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$ を適当にとると $f_n \rightarrow f \quad (\text{強})$ かつ $Tf_n \rightarrow Tf \quad (\text{強})$ が成り立つことをとする. 従って, 作用素 T は core の上だけで分れば完全に決まることになる. A あるいは V の形をその定義域全体で具体的に求めることはむづかしいことが多いが, core を見つけその上でどんな形が表れることはしばしば可能である. §4 がその例になっている.

§2. マルコフ過程半群のポテンシャル作用素.

S を局所コンパクト可算基をもつハウスドルフ空間,
 $C_0(S)$ を, S 上の実数値連続函数 f の無限遠で 0 になる
 ものの全体のつくるバナッハ空間 ($\|f\| = \max_{x \in S} |f(x)|$), C_K
 をコンパクトな (support) をもつ実数値連続函数の全体
 とする. ただし, S 自身がコンパクトの時は, $C_0(S), C_K$
 は共に S 上の連続函数の全体を表わすとする. $C_0(S)$ 上の
 強連続線型半群 T_t について $\|T_t\| \leq 1$ かつ $T_t \geq 0$ なるものが
 与えられたとする. T_t から S 上の時間的一様マルコフ過
 程が生まれ, T_t はその推移確率 $P(t, x, dy)$ による積分作
 用素とある. 任意の x と任意のコンパクト集合 B に対し
 $\int_0^\infty P(t, x, B) dt < \infty$ であるとき, このマルコフ過程は tran-
 sient であるといい, 任意の x と x を含む任意の開集合
 B に対し $\int_0^\infty P(t, x, B) dt = \infty$ であるとき recurrent とい
 う. Recurrent かつ任意の x , 任意のコンパクト
 集合 B に対し $P(t, x, B) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, の時 null
 recurrent といい, 任意の x , x を含む任意の開集合 B
 に対し $\liminf_{t \rightarrow \infty} P(t, x, B) > 0$ の時 positive recurrent
 といふ. この定義は, S が可算集合のときは, 慣用され
 ている定義と一致している. 次の定理 2.1 は 定理 1.2 から
 容易に分る.

定理 2.1. 『 Transient または null recurrent の場合, $\{T_t\}$ はポテンシャル作用素と成る. Positive recurrent の場合 T は有限不変測度と成る場合は, ポテンシャル作用素と成る. 』

Hunt が振るうような場合には好(2は, 次の二とが
いえる.

定理 2.2. 『 $\{T_t\}$ はポテンシャル作用素 V と成る,
 $\mathcal{D}(V) \supset C_K$ とする. この時, マルコフ過程は transient,
 C_K は V の core である,

$$Vf = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T_s f \, ds$$

である. 』

Transient であっても一般には $C_K \subset \mathcal{D}(V)$ とは限らない. この
時 $C_K \cap \mathcal{D}(V)$ が V の core であるのは, 加法過程の場合
以外には成らない.

§3. 加法過程のポテンシャル作用素.

S とし d 次元ユークリッド空間 R^d をとり, S 上の
conservative な確率連続加法過程 (時間的一様性) と考え
る. ^(すなわ) その推移確率は $C_0(R^d)$ 上の半群 T_t と定め, $\|T_t\|$
 $= 1$, (かつ T_t は translation に関し不変) とする. T_t
の生成作用素 A の形が core において分る, 成る.

使う2次の5つの定理が11える。

定理 3.1. 『 (i) A が2階微分の部分をもつ (すなわち, 考えている加法過程が Gaussian part をもつ), 任意の $f \in C_K$ と任意の $t > 0$ に対し

$$\|T_t f\| \leq c t^{-1/2} \|f\| \text{diam } S(f)$$

がなりたつ. c は t, f によらない定数, $\text{diam } S(f)$ は f の台の直径である. (ii) A が積分作用素の部分をもつ

ば (すなわち, 考えている加法過程が jump をもつ), 任意の $f \in C_K$ と任意の $t > 0$ に対し

$$\|T_t f\| \leq t^{-1/2} \|f\| (c_1 + c_2 \text{diam } S(f)),$$

ただし c_1, c_2 は t, f によらない定数である.』

定理 3.2. 『 A が零作用素 (すなわち対応する加法過程は静止) の場合を除き, $\{T_t\}$ はポテンシカル作用素 V をもつ.』

これは, 任意次元のブラウン運動に対しポテンシカル作用素が存在するという古典の結果の拡張である。

定理 3.3. 『 $\{Au; u \in C_K^\infty\}$ は V の core である.』 (C_K^∞ はコンパクトな台をもつ C^∞ 級関数の全体とする. C_K^∞ は $\mathcal{D}(A)$ に含まれる.)

定理 3.4. 『 $f \in \mathcal{D}(V)$ と f, Vf が共にルベグ可積分であるような f の全体を $\mathcal{M}$ とすると, $\mathcal{M}$ は V の

core である. $f \in M$ ならば $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 0$ である.』

定理 3.5. 『Lévy 測度の $\bar{\nu}$ が有界 (すなわち jump の大き
が有界) の時, $C_K \cap \partial(V)$ は V の core である.』

以上のうち, 定理 3.2 は, 定理 1.2 によつて定理 3.1 から
得られる. 定理 3.3 は C_K^∞ が A の core であること ([5] に
ある) から分り, 定理 3.4, 3.5 は定理 3.3 から分る. V の core に
関しては上の結果は満足すべきものではない.

対応する加法過程を X_t とし, $X_0 = 0$ とする. x が
possible であるとは, x の任意の開近傍 B に対してある
 $t > 0$ が存在して $P(X_t \in B) > 0$ となることとする. 以下,
この節では, possible である全体の生成される閉部分群が
 $\mathbb{R}^d$ と一致すると仮定する (そうでない場合は, $\mathbb{R}^d$ の代り
に G を S と考え, ルベーグ測度の代りに G のハール測
度と考える) (Port-Stone の最近の結果 [4]
の中に次のことがある. Transient で $d=1$ かつ $E|X_t| < \infty$
(従つて $EX_t \neq 0$) の場合を type II transient とよび, type
II transient でない transient と全部 type I transient とよぶ.
Transient の場合, $f \in C_K$ に対し

$$Uf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} U(x, dy) f(y), \quad U(x, B) = \int_0^\infty P(t, x, B) dt$$

によつて Uf を定義すると, Uf は明らかに有限, 連続となり,
これに対し次の renewal 型の定理が成り立つ.

$$(1) \quad \text{Type I transient ならば} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} Uf(x) = 0.$$

$$(2) \quad \text{Type II transient ならば} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} Uf(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} Uf(x) = \pm \int_{\mathbb{R}^1} f(y) dy / EX_1 \quad (\text{複号同順}).$$

従つて, Type I transient ならば $C_K \subset \mathcal{D}(V)$ であり, $f \in C_K$
に対し $Vf = Uf$ であり, type II transient ならば, $C_K \cap \mathcal{D}(V)$
は $\int_{\mathbb{R}^1} f(x) dx = 0$ なる $f \in C_K$ の全体と一致し, 二つとも
 f に対し $Vf = Uf$ である. 上の Port-Stone の結果を使つ
て, 更に次のことを証明することはできる.

定理 3.6. 『 $d=1$ 型 II transient の場合, $\int_{\mathbb{R}^1} f(x) dx = 0$ なる
 $f \in C_K$ の全体は, V の core である.』

Recurrent の場合を占めて Port-Stone [4] は多くの著しい
結果を得ているので, それを検討すると V についていろいろ
いえることがわかるようである.

§4. 安定過程のポテンシャル作用素.

加法過程の例として, 1次元安定過程のポテンシャル作用
素 V を求めよう. X_t を指数 α ($0 < \alpha \leq 2$) の1次元安定
過程, $X_0 = 0$ とする. Deterministic な運動は除くとして,

時間 t のはかり方を適当に定数倍すると, X_t の特性函数

$\varphi_t(\theta) = E e^{i\theta X_t}$ は次の二つに等しい:

$$(1) \quad \varphi_t(\theta) = \exp[-t|\theta|^\alpha] \quad (\alpha=2 \text{ の場合}),$$

$$(2) \quad \varphi_t(\theta) = \exp[-t|\theta|^\alpha (1 + i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \operatorname{sgn} \theta)] \quad (0 < \alpha < 1 \\ \text{または } 1 < \alpha < 2 \text{ の場合, } \beta \text{ は定数で } -1 \leq \beta \leq 1),$$

$$(3) \quad \varphi_t(\theta) = \exp[-t|\theta| (1 - i\delta \operatorname{sgn} \theta)] \quad (\alpha=1 \text{ の場合, } \\ \delta \text{ は実の定数}).$$

X_t は $1 \leq \alpha \leq 2$ では recurrent, $0 < \alpha < 1$ では transient であり, そのポテンシャル作用素 V は以下のようなになる.

ただし $\alpha=2$ すなわちブラウン運動の場合は, 簡単であるがここでは述べない. m_0 をコンパクトな台をもつ連続函数で積分が 0 とするものの全体としよう.

定理 4.1. 『指数 $1 < \alpha < 2$, 特性函数 (2) の場合,

$C_K \cap \mathcal{D}(V) = m_0$ となり, m_0 は V の core であり,

$$(4) \quad Vf(x) = \int_K k(y-x)f(y)dy, \quad f \in C_K \cap \mathcal{D}(V)$$

ただし

$$(5) \quad k(x) = \frac{|x|^{\alpha-1} (1 - \beta \operatorname{sgn} x)}{2(1+h^2) \Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha/2)}, \quad h = \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}$$

とする.』

m_0 が V の core であるという主張を除けば, 上の定理は Port [3] に証明してあるが, 定理 1.3 を使った方が [3] より

である。 $\theta \neq 0$ ならば $\int_0^t \varphi_\lambda(\theta) d\theta$ は絶対値が $\leq |\theta|^{-\alpha}$ であり、
 $t \rightarrow \infty$ の時 $|\theta|^{-\alpha} (1 + i h \operatorname{sgn} \theta)^{-1}$ は $\mathcal{O}(t^{-\alpha})$ である、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t, x) - g(t, 0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x} - 1}{|\theta|^\alpha (1 + i h \operatorname{sgn} \theta)} d\theta$$

である。右辺は

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-i\theta x} - 1}{\theta^\alpha (1 + i h)} d\theta + \int_0^\infty \frac{e^{i\theta x} - 1}{\theta^\alpha (1 - i h)} d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+h^2)} \left[\int_0^\infty \frac{\cos \theta x - 1}{\theta^\alpha} d\theta - h \int_0^\infty \frac{\sin \theta x}{\theta^\alpha} d\theta \right]$$

これは知られている定積分であり、 Γ と γ は [1] の p. 78 (3),
 p. 68 (1) と $\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \pi / \sin \pi \alpha$ を用いると

$$= \frac{|x|^{\alpha-1}}{2(1+h^2)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)} - \frac{h \operatorname{sgn} x}{\sin(\pi\alpha/2)} \right] = k(x),$$

すなわち (10) がいえる。以下、 c_j ($j=1, 2, \dots$) は t, x, y
 によらない定数とする。Port [3] によれば、2 次の微分係数
 が二つ:

$$(11) \quad |g(t, y-x) - g(t, -x)| \leq c_1 + c_2 |y|.$$

まず $t \leq 1$ ならば評価 (9) により $g(t, x)$ も (t, x) に関する
 有界であるから、 $t > 1$ とし $\int_1^t |p(s, y-x) - p(s, -x)| ds$
 を評価すれば十分である。(6) から $p(1, x)$ は x について
 微分可能で、導関数も有界である。従って (11) と $\alpha < 2$

を用いると,

$$\begin{aligned} \int_1^t |p(s, y-x) - p(s, -x)| ds &= \int_1^t s^{-1/\alpha} |p(1, (y-x)s^{-1/\alpha}) \\ &\quad - p(1, -xs^{-1/\alpha})| ds \leq \int_1^t s^{-2/\alpha} |y| \sup_{y \in \mathbb{R}} |p'(1, y)| ds \leq c_3 |y|, \end{aligned}$$

従って (11) が成り立つ. Port [3] p. 146 の次の評価を用いる:

$$(12) \quad |k(y-x) - k(-x)| \leq c_4 |y|^{\alpha-1}.$$

2° $f \in \mathcal{M}_0$ と仮定し, $f \in \mathcal{D}(V)$ とあり $\forall f$ に対して (4) を表わされることを示す. 左に於て, (4) の右辺を $u(x)$ とおくと $u \in C_0(\mathbb{R})$ であり, $\int_0^t T_s f(x) ds$ は $t \rightarrow \infty$ の時 $u(x)$ に有界収束 (絶対値が一様には定数に近づけられず各点収束) する. ことを示す (定理 1.3). まず u が連続であることは明か. したがって,

$$(13) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}} (k(y-x) - k(-x)) f(y) dy$$

であり, $x \rightarrow \infty$ の時 x に関する y に関する一様収束は

$$\begin{aligned} (14) \quad k(y-x) - k(-x) &= c_5 (|y-x|^{\alpha-1} - |-x|^{\alpha-1}) = c_5 |x|^{\alpha-1} (|1 - \frac{y}{x}|^{\alpha-1} - 1) \\ &= c_5 |x|^{\alpha-1} \left(-(\alpha-1) \frac{y}{x} + O\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \right) = o(1), \end{aligned}$$

$x \rightarrow -\infty$ の時も同様であるから, $u \in C_0$ である.

$$\int_0^t T_s f(x) ds = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(s, y-x) f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(t, y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (g(t, y-x) - g(t, -x)) f(y) dy$$

であるから, 今度は (10), (11) により (13) の右辺がゼロ
で $u(x)$ は有限で束縛する.

3° 次に $C_K \cap \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{M}_0$ を示そう. $f \in C_K \cap \mathcal{D}(V)$
とする. 定理 3.1 によって $\|T_t f\| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)
だから, 定理 1.3 により

$$Vf(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T_s f(x) ds$$

である. $x=0$ の場合と同様に

$$\int_0^t T_s f(0) ds = \int_{\mathbb{R}} (g(t, y) - g(t, 0)) f(y) dy + g(t, 0) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

右辺第1項は $\int_{\mathbb{R}} h(y) f(y) dy$ に収束するから, $g(t, 0) \rightarrow \infty$ ならば,
 $\int_{\mathbb{R}} f(y) dy = 0$ であるから $f \in \mathcal{M}_0$ である
ことが示される. $x=0$ で $g(t, 0) \rightarrow \infty$ は, (7) から

$$g(t, 0) = p(1, 0) \int_0^t s^{-1/\alpha} ds$$

であるから, (6) から

$$p(1, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\theta^\alpha} \cos(h\theta^\alpha) d\theta = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{1}{\alpha}-1} \cos hz dz > 0$$

であることがわかる.

4° 残ったのは $\mathcal{M}_0$ が V の core であることの証明だけ
である. これは安定過程の Lévy 測度 ν が $|x| \rightarrow \infty$ で
 $O(|x|^{-\alpha-1})$ とある密度を持つことを用いる. 明らかに

$$(15) \quad \nu(dx) = \begin{cases} c_6 x^{-\alpha-1} dx, & x > 0 \\ c_7 |x|^{-\alpha-1} dx, & x < 0, \end{cases}$$

c_6, c_7 は 0 の値をとる。証明は $\alpha < 2$ だけ [2], $\alpha \geq 2$ の場合は stable という語がつかないより α の意味に用いる。従って, $u \in C_K^\infty$ に対して $x \notin S(u)$ に対し

$$Au(x) = c_6 \int_0^\infty u(x+y) \frac{dy}{y^{\alpha+1}} + c_7 \int_{-\infty}^0 u(x+y) \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}}$$

がある。 $S(u) \subset [-a, a]$, $|x| \geq 2a$ とあると, $|y| \leq a$ ならば $|y-x| \geq |x|/2$ であることに注意すると

$$|Au(x)| \leq c_8 \int_{-a}^a |u(y)| \frac{dy}{|y-x|^{\alpha+1}} \leq \frac{\text{const.}}{|x|^{\alpha+1}}$$

が成り立つ。定理 3.4 により Au の積分は 0 である。従って, 定理 3.3 に注意すれば, m_0 が V の core であることはいうには, 次のことをいふだけで済むことが分る:

$\int f(x) dx = 0$ かつ $|x| \rightarrow \infty$ のとき $f(x) = O(|x|^{-\alpha-1})$ となる任意の $f \in C_0$ に対し, m_0 内の適当な列 $\{f_n\}$ をとれば $f_n \rightarrow f$ (強) かつ $\forall f_n$ がある $u \in C_0$ に強収束する。これはこの条件を代へてもらうとしよう。

$$(16) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}} k(y-x) f(y) dy$$

で u を定義する。すると (13) が成り立つから (12) と (14) を用いれば u が C_0 に属することは分る。連続関数 ρ で $0 \leq \rho \leq 1$, $[-1, 1]$ の上で 1, $[-2, 2]$ の外で 0 なるものを造り, $f_n(x) = (a_n + f(x)) \rho(x/n)$ とお

く. $\{a_n\}$ は f_n の積分が 0 とおけるように, するから $f_n \in \mathcal{M}_0$ とおけるように選ぶ.

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = c_q n a_n + \int_{-n}^n f(x) dx + \int_{|x|>n} f(x) p\left(\frac{x}{n}\right) dx, \quad c_q = \int_{\mathbb{R}} p(x) dx,$$

$$\int_{-n}^n f(x) dx = \int_{|x|>n} f(x) dx = O\left(\int_{|x|>n} |x|^{-\alpha-1} dx\right) = O(n^{-\alpha})$$

よって $\int_{|x|>n} f(x) p\left(\frac{x}{n}\right) dx \in (a) \subset \mathcal{M}$ であるから,
 $a_n = O(n^{-\alpha-1})$ である. 故に,

$$\|f_n - f\| \leq |a_n| + \|f(x) p\left(\frac{x}{n}\right) - f(x)\| \leq |a_n| + \sup_{|x|>n} |f(x)| \rightarrow 0.$$

∇f_n は (7) の形に表わされるから, (13) により

$$\nabla f_n(x) - u(x) = \int (k(y-x) - k(-x))(f_n(y) - f(y)) dy,$$

故に (14) により

$$\|\nabla f_n - u\| \leq c_4 \int_{\mathbb{R}} |y|^{\alpha-1} |f_n(y) - f(y)| dy$$

である. $|y| \geq 2n$ には $f_n(y) = 0$ となり $|y| < 2n$ には

$$|f_n(y)| \leq |a_n| + |f(y)| \leq \text{const } n^{-\alpha-1} + |f(y)| \leq \text{const } |y|^{-\alpha-1} + |f(y)|$$

であるから

$$(17) \quad f_n(y) = O(|y|^{-\alpha-1}), \quad n \text{ に関する一様}$$

である. 従ってルビーフの収束定理を使えば $\|\nabla f_n - u\| \rightarrow 0$ と得る. 二つの定理 4.1 の証明を終る.

定理 4.2. 『指数 $\alpha=1$, 特性函数 (5) の場合, 定理 4.1 と同様の結論が成り立つ. 但し $k(x)$ は (5) ではなく

$$(18) \quad k(x) = \frac{-\log|x| + 2^{-1}\pi\gamma \operatorname{sgn} x}{\pi(1+\gamma^2)}, \quad x \neq 0$$

とする。』

証明は、前の定理と同じ考えで行かう。

1° 今度の場合 X_t の分布は Cauchy 分布であり (6) の積分が計算でき

$$(19) \quad p(t, x) = \frac{t}{\pi(t^2 + (x - \gamma t)^2)}$$

となる。 $g(t, x)$ もやはり (8) に定義する。 (19) から分かるように今度 (1) と異なり $g(t, 0) = \infty$ となるので (10) は成り立たない、この代りに

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (g(t, x) - g(t, 1)) = k(x) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma^2)}$$

が成り立つ。実際 $g(t, x)$ は具体的に求まる

$$(21) \quad g(t, x) = \frac{1}{2\pi(1+\gamma^2)} \left[\log(t^2 + (x - \gamma t)^2) + 2\gamma(\operatorname{sgn} x) \arctan \frac{(1+\gamma^2)t - \gamma x}{|x|} - \log(x^2) \right]$$

であるから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t, x) - g(t, 1)) = \frac{1}{2\pi(1+\gamma^2)} [-2\log|x| + \pi\gamma \operatorname{sgn} x - \pi\gamma]$$

である (20) である。以下 C_j ($j=1, 2, \dots$) は $t, x,$

y によらずに 正 の定数とする. 必要を評価として

$$(22) \quad |g(t, x) - g(t, 1)| \leq c_1 |\log |x|| + c_2$$

および y を拡張して

$$(23) \quad |g(t, x+y) - g(t, x)| \leq c_3 |\log |1 + \frac{y}{x}|| + c_4, \quad x \neq 0$$

を示す.

$$F(t, x) = \frac{t^2 + (x - \delta t)^2}{t^2 + (1 - \delta t)^2}$$

とあるとき (21) より

$$|g(t, x) - g(t, 1)| \leq c_5 |\log F(t, x)| + c_6 |\log |x|| + c_7$$

であるから, (22) をいふには

$$(24) \quad |\log F(t, x)| \leq c_8 |\log |x|| + c_9$$

をいふばかり.

$$(25) \quad c_{10} t^2 + c_{11} \leq t^2 + (1 - \delta t)^2 \leq c_{12} t^2 + c_{13}$$

は明らかであるから,

$$F(t, x) = |x|^2 \frac{\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 + (1 - \delta \frac{t}{|x|})^2}{t^2 + (1 - \delta t)^2} \leq |x|^2 \frac{c_{12} \left(\frac{t}{|x|}\right)^2 + c_{13}}{c_{10} t^2 + c_{11}} \leq c_{14} |x|^2 + c_{15},$$

$$F(t, x) \geq |x|^2 \frac{c_{10} \left(\frac{t}{|x|}\right)^2 + c_{11}}{c_{12} t^2 + c_{13}}.$$

故に $t \geq 1$ ならば $F(t, x) \geq c_{16}$ であり $|\log F(t, x)| \leq c_{17} + |\log (c_{14} |x|^2 + c_{15})|$

$\leq c_{18} + c_{19} |\log |x||$ である. $0 < t < 1$ ならば $F(t, x) \geq c_{20} |x|^2$

であり $|\log F(t, x)| \leq |\log (c_{20} |x|^2)| + |\log (c_{14} |x|^2 + c_{15})| \leq c_{21} + c_{22} |\log |x||$

2' あり. 24 (24) 従, 2 (22) が 1 2 7. (21) あり

$$g(t, x+y) - g(t, x) = \frac{1}{2\pi(1+\gamma^2)} \left[\log \frac{t^2 + (x+y-\gamma t)^2}{t^2 + (x-\gamma t)^2} + 2 \log \left| \frac{x+y}{x} \right| \right] + \text{有界項}$$

$$2' \text{ あり, } \frac{t^2 + (x+y-\gamma t)^2}{t^2 + (x-\gamma t)^2} = \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{x} - \gamma \frac{t}{x}\right)^2}{\left(\frac{t}{x}\right)^2 + \left(1 - \gamma \frac{t}{x}\right)^2} \quad 2' \text{ あり 215 (24) (あ}$$

3 11 2 8 の 17 子 2 11 2 12 時 の (24) と 同 じ 形 の 2 平 (12) あり

(23) あり 17 5 4 3.

2° $f \in \mathcal{M}_0$ と 仮 定 し, $f \in \mathcal{D}(V)$ と 仮 し 2 $\forall f$ あり (4)
2 表 1 2 4 3 2 と 2 11 あり. (4) の 右 辺 2 $u(x)$ と あり.

$$(26) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}} k(y) f(x+y) dy$$

2' あり u は 連続 2' あり. 2 11, u は (13) の 17 5 11 2 11 2

$$u(x) = c_{23} \int \log \left| 1 - \frac{y}{x} \right| \cdot f(y) dy + c_{24} \int (\operatorname{sgn}(y-x) - \operatorname{sgn}(-x)) f(y) dy$$

2', f は コンパクト 2 表 1 2 4 3 2 あり, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ 2' あり.

2 11 2 $u \in C_0$ 2' あり.

$$\int_0^t T_s f(x) ds = \int_{\mathbb{R}} g(t, y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (g(t, y-x) - g(t, 1)) f(y) dy$$

2' あり 215 (20), (22) 2 7 21 5 2

$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T_s f(x) ds = \int_{\mathbb{R}} \left(k(y-x) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma^2)} \right) f(y) dy = u(x)$$

2 11 2 3. (22) あり

$$\left| \int_0^t T_s f(x) ds \right| \leq \int_{\mathbb{R}} (c_1 |\log |y-x|| + c_2) |f(y)| dy$$

であり, 同様 (23) より

$$\left| \int_0^t T_\lambda f(x) ds \right| \leq \int_{\mathbb{R}} (c_3 \left| \log \left| 1 - \frac{y}{x} \right| \right| + c_4) |f(y)| dy$$

であるから $\int_0^t T_\lambda f(x) ds$ は t, x について有界である ($|x|$

が小さい時は前者, $|x|$ が大きい時は後者を用いる.) すなわち (27) は有界収束である.

3° $f \in \mathcal{D}(V) \cap C_K$ として, $\int f(x) dx = 0$ を示そう. 定理 1.3 より $\int_0^t T_\lambda f(0) ds$ は t について有界であるが,

$$\int_0^t T_\lambda f(0) ds = \int_{\mathbb{R}} (g(t, y) - g(t, 1)) f(y) dy + g(t, 1) \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

であるから (22) により有界であり, (21) より

$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, 1) = \infty$ であるから, $\int f(y) dy = 0$ であることがわかる.

4° m_0 が V の core であることの証明も定理 4.1 と同じ考えでできる. $\alpha = 1$ として前の 4° を見なおせばよい. ただし, $\int f(x) dx = 0$ より $f(x) = O(|x|^{-2})$, $|x| \rightarrow \infty$, なる $f \in C_0$ をとるとき (16) で u を定義すると $u \in C_0$ となる証明はもっと容易になる. (26) のようにかけば u の連続性は分る. $x \rightarrow \infty$ の時を考えよう. まず u を (13) の形に書く. $a > 0$ を固定すると 2° のように通り

$$\int_{-a}^a (k(y-x) - k(-x)) f(y) dy \rightarrow 0$$

2"ある.

$$\left| \int_{|y|>a} (k(y-x) - k(-x)) f(y) dy \right| \leq c_{25} \int_{|y|>a} \left| \log \left| 1 - \frac{y}{x} \right| \right| \cdot |f(y)| dy + c_{26} \int_{|y|>a} |f(y)| dy$$

2"あるが、^{右に} x が 1 程度より $(-\infty, -a)$ の部分 ~~は~~ 部分は 0 である、
 a を固定 ($x \rightarrow \infty$ の時 0 に近づく). x が 1 程度より (a, ∞)
 の部分の部分は

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \left| \log \left| 1 - \frac{y}{x} \right| \right| \cdot |f(y)| dy &\leq \text{const.} \int_a^\infty \left| \log \left| 1 - \frac{y}{x} \right| \right| \frac{dy}{y^2} \\ &\leq \frac{\text{const}}{x} \int_{\frac{a}{x}}^\infty \left| \log |1-y| \right| \frac{dy}{y^2} \leq \frac{\text{const}}{x} + \frac{\text{const}}{x} \int_{\frac{a}{x} \wedge \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \log (1-y) \right| \frac{dy}{y^2} \\ &\leq \frac{\text{const}}{x} + \frac{\text{const}}{a} \end{aligned}$$

と評価される。故に、 a を十分大きくとると $x \rightarrow \infty$ と
 なることにより $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$ が確かめられる。 $x \rightarrow -\infty$
 の時も同様であるが $u \in C_0$ である。また、 f 及び f_n を
 前の 4° のように定義するとき $\|Vf_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
 となることの証明も次のようにする必要がある。(19) に注
 意して上の証明を見ると n に依らずに $\lim_{|x| \rightarrow \infty} Vf_n(x) = 0$
 であることが分かる。従って、 a を任意に固定する時

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq a} \int_{\mathbb{R}} |k(y-x)| |f_n(y) - f(y)| dy = 0$$

をいえる。 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ と (17) により

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq a} \int_{\mathbb{R}} (|\log |y-x|| + 1) |f_n(y) - f(y)| dy = 0$$

が成り立つ。 (28) を用いて。 $\square$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq a} \int_{|y| > t} |\log |y-x|| \frac{dy}{|y|^2} = 0$$

$$\sup_{|x| \leq a} \int_{|y| \leq t} |\log |y-x|| dy < \infty$$

を用いた。定理 4.2 の証明の通り。

定理 4.3. 『指数 $0 < \alpha < 1$, 特異函数 (2) の場合, $C_K \subset \mathcal{D}(V)$ として, m_0 が V の core であり, (4) が $f \in C_K$ に対して成り立つ。 $k(x)$ は (5) と同じ式で定義される。』

証明. (6) で定義される密度函数 $p(t, x)$ に対して今度は

$$(30) \quad \int_0^\infty p(t, x) dt = k(x), \quad x \neq 0$$

が成り立つ。

$$\int_t^\infty ds \int_{\mathbb{R}} e^{-s|\theta|^\alpha} d\theta = \int_{\mathbb{R}} |\theta|^\alpha e^{-t|\theta|^\alpha} d\theta < \infty$$

であるから積分の順序交換が (2)

$$\int_t^\infty p(s, x) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x} \frac{e^{-t|\theta|^\alpha(1+i\kappa \operatorname{sgn} \theta)}}{|\theta|^\alpha(1+i\kappa \operatorname{sgn} \theta)} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\theta x - t\theta^\alpha(1+ik)}}{\theta^\alpha(1+ik)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{i\theta x - t\theta^\alpha(1-ik)}}{\theta^\alpha(1-ik)} d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \Re \left(\int_0^\infty \frac{e^{-i\theta x - t\theta^\alpha(1+ik)}}{\theta^\alpha(1+ik)} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{\pi(1+k^2)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-t\theta^\alpha}}{\theta^\alpha} \cos(\theta x + t\theta^\alpha k) d\theta - k \int_0^\infty \frac{e^{-t\theta^\alpha}}{\theta^\alpha} \sin(\theta x + t\theta^\alpha k) d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi(1+k^2)} (I_1 - I_2 - k I_3 - k I_4), \quad F \in \mathcal{C}
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-t\theta^\alpha}}{\theta^\alpha} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \\ \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \theta x \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \\ \cos \\ \sin \end{Bmatrix} t\theta^\alpha k \cdot d\theta$$

である. $\lim_{t \rightarrow 0} I_1$ を計算しよう. 変数変換 $\theta^\alpha = \psi$ により

$$I_1 = \int_0^\infty F(\psi) dG(\psi) = - \int_0^\infty F'(\psi) G(\psi) d\psi$$

$$F(\psi) = e^{-t\psi} \cos t k \psi, \quad G(\psi) = \int_0^{\psi^{1/\alpha}} \psi^{\frac{1}{\alpha}-2} \cos x \psi^{\frac{1}{\alpha}} d\psi$$

$$= \int_0^{\psi^{1/\alpha}} \frac{\cos x \theta}{\theta^\alpha} d\theta, \quad \text{従って } \psi \rightarrow \infty \text{ の時 } G(\psi) \text{ は有限と無限}$$

$G(+\infty)$ をとる. $|F'(\psi)| \leq t e^{-t\psi} (1+|k|)$ であるから, 任

意の $\psi_0 > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
|I_1 - G(+\infty)| &= \left| \int_0^\infty F'(\psi) (G(+\infty) - G(\psi)) d\psi \right| \\
&\leq (1+|k|) \left[t \int_0^{\psi_0} e^{-t\psi} |G(+\infty) - G(\psi)| d\psi + \sup_{\psi \geq \psi_0} |G(+\infty) - G(\psi)| t \int_{\psi_0}^\infty e^{-t\psi} d\psi \right]
\end{aligned}$$

したがって $I_1 \rightarrow G(+\infty)$ ($t \downarrow 0$) である。 I_2, I_3, I_4 にも
同様の計算ができて、 $t \downarrow 0$ のとき

$$I_1 \rightarrow \pi [2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \cdot |x|^{1-\alpha}]^{-1}$$

$$I_2 \rightarrow 0$$

$$I_3 \rightarrow 0$$

$$I_4 \rightarrow \pi [2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cdot |x|^{1-\alpha} \operatorname{sgn} x]^{-1}$$

を得る。 二つ $\lim_{\theta_0 \rightarrow \infty} \int_0^{\theta_0} \frac{\cos x\theta}{\theta^\alpha} d\theta$, $\lim_{\theta_0 \rightarrow \infty} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin x\theta}{\theta^\alpha} d\theta$ の
値は $\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \pi / \sin \pi\alpha$ (たとえば [1] p. 10 (1), p. 68 (1) と $\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)$
= $\pi / \sin \pi\alpha$ による) を用いる。 二つ (30) の証明された。
 $f \in C_K$ とし $u(x)$ を (4) の右辺に定義すると $u \in C_0$ が
示される。 (30) の右辺 $\int_0^t T_s f(x) ds$ が $t \rightarrow \infty$ の時
 u に有界収束する。 従って定理 1.3 より $f \in \mathcal{D}(V)$,
 $Vf = u$ である。 定理 2.2 を使えば C_K が V の core であり、
定理 3.6 を使えばもっと詳しく $\mathcal{M}_0$ が V の core であるから、
定理 4.3 の証明を終る。

引用文献

- [1] A. Erdélyi 他, Tables of integral transforms, Vol. I,
McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1954.
- [2] B.V. Gnedenko - A.N. Kolmogorov, Limit distributions for
sums of independent random variables, English trans-

lation, Revised edition, Addison-Wesley, 1968.

- [3] S. C. Port, Potentials associated with recurrent stable processes, Markov processes and potential theory edited by J. Choquet, John Wiley, 1969, pp. 135-163.
- [4] S. C. Port - C. J. Stone, Infinitely divisible processes and their potential theory, to appear in Ann. Inst. Fourier.
- [5] K. Sato, Semigroups and Markov processes, Lecture Notes, University of Minnesota, 1968.
- [6] K. Sato, Potential operators for Markov processes, to appear in Proc. Sixth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability.
- [7] 吉田耕作, Abel 型エルゴード定理と Hunt のポテンシャル論, 数学 22 巻 2 号 (1970), pp. 81-91.