

- 2) T.Hashimoto and I.Ichitsubo; J.Phys. Soc. Japan 33 (1972) 1341
- 3) T.Hashimoto, A.Sato and Y.Fugiwara; J.Phys. Soc. Japan 35 (1973) 81
- 4) K.Nishikawa; Progr. Theor. Phys. 38 (1967) 305
- 5) I.Yamada; J.Phys. Soc. Japan 28 (1970) 1585
- 6) I.Yamada; J.Phys. Soc. Japan 33 (1972) 979
- 7) H.B.G.Casimir and F.J.Du Pré; Physica 5 (1938) 507
- 8) P.W.Mason; Phys. Rev. 72 (1947) 854
- 9) T.Matsubara and K.Yoshimitsu; Progr. Theor. Phys. 37 (1967) 634
- 10) L.D.Landau and E.M.Lifshitz; Statistical Physics (Addition Wesley Reading, Massathusetts, 1958)

「 λ 転移点に於ける密度のゆらぎ」

東大理 田 中 文 彦

静的臨界現象においてはユニヴァーサリティ (普遍性) の概念はほぼ確立されている。即ち臨界指数は対象となる系の詳細な構造には依存せず、次元 d , 内部対称性 n , 相互作用距離 σ 等の基本的なパラメータのみにより決まるというのである。これに対して相転移の動的特性は系のやや詳細な構造に依存することが、特に秩序パラメータ ($O. P.$) とエネルギー密度の保存則に関連して、くり込み群の方法で詳細に調べられてきた。¹⁾ 同じ静的ユニヴァーサリティクラスに属する系から出発しても、ダイナミックスの入り方は一意的でないのである。ここでは、近距離相互作用 ($\sigma=2$) をする m 成分 ($n=2m$) のボーズ粒子系²⁾ :

$$\mathcal{H} = \sum_k \sum_{\sigma=1}^m (k^2 + r_0) a_{k,\sigma}^+ a_{k,\sigma} + u \sum_k \rho_k^+ \rho_k \quad (1)$$

を例としてとり，保存則の役割を議論したい。ここで ρ_k は密度演算子

$$\rho_k \equiv \sum_{\sigma=1}^m \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\sigma}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{k},\sigma} \quad (2)$$

で， $r_0 = -\mu$ （化学ポテンシャル）である。動的スケーリング則（DS）の仮定³⁾によると，物理量 A の時間相関関数は臨界点近傍で

$$C^A(k, \omega) = 2\pi [\omega^A(k)]^{-1} C^A(k) f^A(\omega/\omega^A(k)) \quad (3)$$

の如く，ある特性周波数 $\omega^A(k)$ によってスケールされた形に書け，更に

$$\omega^A(k) = k^z \Omega(k\xi) \quad (4)$$

としたとき， z^A がここで問題とする動的臨界指数である。ここでは m は大きいとして m^{-1} で指数を展開する方法⁴⁾を用いる。 $A = \psi(OP)$ のときは既に結果が得られており²⁾

$$z^\psi = 2 - c\eta \quad (5)$$

$$c = \frac{4}{4-d} \{1 - \theta(d-3) 2^{1-d} [1 - \cos \pi(3-d)]\}$$

η は相関関数に関する静的臨界指数である。この系では O.P. に関する保存則はないが，保存則を満たしている簡単な量 ρ_k があるので z^ρ を計算して (5) の結果と比較してみる。さて問題となる相関関数は遅延応答関数

$$\chi^R(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} [-i\theta(t) \langle [\delta \rho_k(t), \delta \rho_k^+] \rangle] \quad (6)$$

$$\delta \rho_k \equiv \rho_k - \langle \rho_k \rangle$$

であるが，この計算には温度グリーン関数

$$\chi(k, i\omega_n) = - \int_0^1 d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle T_\tau \delta \rho_k(\tau) \delta \rho_k^+ \rangle \quad (7)$$

$$\omega_n = 2\pi n, \quad (\beta \equiv 1)$$

を摂動論で計算して、これを上半平面に解析接続する方法を用いる：

$$\chi^R(k, \omega) = \chi(k, i\omega_n = \omega + i\delta) \quad (8)$$

さて m^{-1} を摂動パラメータにとり $u = O(m^{-1})$ と仮定⁴⁾すると、 $O(m^{-1})$ までの範囲で

$$\chi(k, i\omega_n) = \chi_0(k, i\omega_n) + \chi_1(k, i\omega_n) \quad (9)$$

ここに

$$\begin{aligned} \chi_0(k, i\omega_n) &= \text{bubble diagram} + \text{two-bubble diagram} + \dots \\ &\equiv \text{wavy line} \\ &= \frac{m \Pi(k, i\omega_n)}{1 + m u \Pi(k, i\omega_n)} \\ &\approx \text{const.} - m (m u)^{-2} \frac{1}{\Pi(k, i\omega_n)} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで Π は単位バブルの寄与で次の様に表わせる：

$$\Pi(k, i\omega_n) \equiv \sum_{i\nu_m} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \mathcal{S}^0(p, i\nu_m) \mathcal{S}^0(k+p, i\nu_m + i\omega_n) \quad (11)$$

以下、簡単のため T_λ 直上 ($r \equiv r_0 - \Sigma(0,0) = 0$) での議論にする。(11) は

$$\Pi(k, i\omega_n = \omega + i\delta) = \Pi(1) k^{d-4} f(\bar{\omega}) \quad (12)$$

$$\Pi(1) = \frac{1}{2} K_d \pi \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \operatorname{cosec} \pi \left(\frac{d}{2} - 1 \right) B \left(\frac{d}{2} - 1, \frac{d}{2} - 1 \right)$$

$$\bar{\omega} = \omega/k^2$$

$$f(\bar{\omega}) = \frac{(\bar{\omega}-1)^{d-3} - (\bar{\omega}+1)^{d-3}}{(-1)^{d-3} - 1}$$

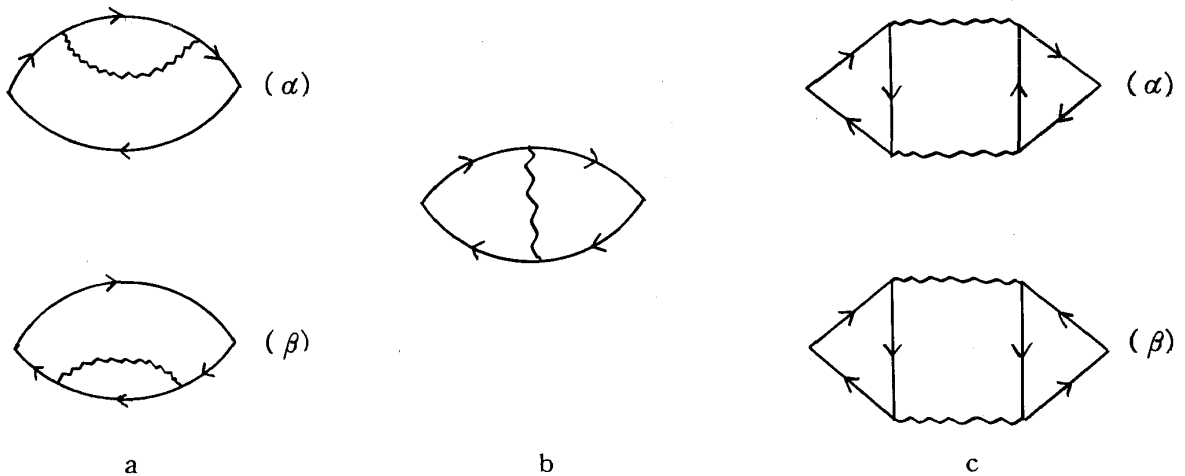
となる。B はベータ函数, $K_d \equiv 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} \Gamma(d/2)^{-1}$ 。但し (10) では k, ω は小さいとして $\Pi^{-1} (\ll 1)$ で展開した。

χ_1 は (10) のバブルの一つを (図 1) のいずれかで置きかえたもので

$$\begin{aligned} \chi_1(k, i\omega_n) &= \frac{m \Pi_1(k, i\omega_n)}{[1 + m u \Pi(k, i\omega_n)]^2} \\ &\approx m (m u)^{-2} \frac{\Pi_1(k, i\omega_n)}{\Pi(k, i\omega_n)} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Pi_1(k, i\omega_n) = \Pi_a + \Pi_b + \Pi_c = O(m^{-1})$$

$$\Pi_a = \Pi_a^{(\alpha)} + \Pi_a^{(\beta)}, \quad \Pi_c = \Pi_c^{(\alpha)} + \Pi_c^{(\beta)}$$



(図 1)

DS によって

$$\begin{aligned}\chi^R(k, \omega) &= \text{const.} + k^\lambda \Phi(\omega/\omega_k^\rho) \\ &= \text{const.} + c_0 k^\lambda + c_1' k^\lambda \frac{\omega}{\omega_k^\rho} + \dots\end{aligned}\quad (14)$$

と展開できる。 λ は静的臨界指数で $M_a^{(4)}$ によって

$$\begin{aligned}\lambda &= 4 - d + \lambda_1 \\ \lambda_1 &= - \frac{4(2/d + d - 3)K_d}{m \Pi(1)}\end{aligned}\quad (15)$$

と求められている。 $\omega_k^\rho \sim k^{2-\zeta}$ ($\zeta \equiv 2 - \zeta$) とすると,

$$\chi^R(k, \bar{\omega}) \Big|_{\omega \text{ の一次}} = c_1 k^{4-d} \bar{\omega} [1 + (\lambda_1 + \zeta) \ell_n k + \dots]\quad (16)$$

となるから、他方 (10), (13) を ω で巾展開して一次の項を拾うと

$$\chi^R(k, \bar{\omega}) \Big|_{\omega \text{ の一次}} = \frac{m a_1 k^{4-d}}{(m u)^2 \Pi(1)} \left[1 + \frac{k^{4-d}}{\Pi(1)} \left(\frac{\Pi_{1,1}}{a_1} - 2 \Pi_{1,0} \right) \right] \bar{\omega}\quad (17)$$

$$f(\bar{\omega}) = 1 + a_1 \bar{\omega} + \dots$$

$$a_1 = i(d-3) \cot \frac{\pi}{2} (d-3) \equiv i a$$

$$\Pi_1(k, \bar{\omega}) = \Pi_{1,0}(k) + \Pi_{1,1}(k) \bar{\omega} + \dots$$

$\Pi_{1,0}(k) \sim -\Pi(1) \lambda_1 k^{d-4} \ell_n k$ であるから⁴⁾, (16), (17) を比較して、もし

$$\text{Im } \Pi_{1,1}(k) \sim B k^{d-4} \ell_n k\quad (18)$$

と $\ell_n k$ の係数 B が求まれば

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \zeta &= \frac{1}{\Pi(1)} \left(\frac{B}{a} + 2 \Pi(1) \lambda_1 \right) \\ \therefore \zeta &= \frac{B}{\Pi(1) a} + \lambda_1\end{aligned}\quad (19)$$

と動的臨界指数 $z^\rho \equiv 2 - \zeta$ が求まる。

1) Π_a の計算；

$$\Pi_a^{(\alpha)}(k, i\omega_n = \omega + i\delta) \equiv P_0^{(\alpha)}(k) + P_1^{(\alpha)}(k) \bar{\omega} + \dots$$

$$\begin{aligned} P_1^{(\alpha)}(k) = & \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon_{p-k} - 2\epsilon_p}{\epsilon_p^2 (\epsilon_{p-k} + i\delta)(\epsilon_{p-k} - \epsilon_p + i\delta)^2} \Sigma(p, 0) \\ & + \iint \frac{d^d p d^d q}{(2\pi)^{2d}} \frac{V_{\text{eff}}(p+q; \epsilon_{p-k} - \epsilon_q + i\delta) - V_{\text{eff}}(p+q; 0)}{(\epsilon_{p-k} - \epsilon_p + i\delta)^2 (\epsilon_{p-k} + i\delta) \epsilon_q (\epsilon_{p-k} - \epsilon_q + i\delta)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{Im } P_1^{(\alpha)} = \text{Im } P_1^{(\beta)}$$

$$\Sigma(p, 0) \sim -\eta \epsilon_p \ell_n p, \quad \epsilon_p = p^2$$

$$V_{\text{eff}}(p; i\omega_n) \approx -\frac{1}{m \Pi(p, i\omega_n)}$$

$$f(-1 + i\delta) = \theta(d-3) 2^{3-d} \{ [1 - \cos \pi(3-d)] + i \sin \pi(3-d) \}$$

以上を用いて、

$$B_a/a = 3 \Pi(1) \eta + \frac{K_d}{m} \{ 1 - \theta(d-3) 2^{3-d} [1 - \cos \pi(3-d)] \} \quad (21)$$

2) Π_b の計算；

詳細は省略するが

$$B_b/a = \frac{2 K_d}{m} \quad (22)$$

3) Π_c の計算；

1), 2) の場合に反して、内部振動数の和を完全に遂行することに成功していない。

(21), (22) の結果と、 λ_1 への a, b グラフまでの寄与を用いて、(19) から、

$$\zeta = \frac{4}{4-d} \{ 1 - \theta(d-3) 2^{1-d} [1 - \cos \pi(3-d)] \} \eta$$

即ち,

$$z^\rho = z^\psi \quad (24)$$

の結果を得る。これは、この系では保存量も保存則があるにもかかわらず O.P. のタイムスケールで運動していることを意味する。一見 1) の結果と矛盾するようではあるがこの系 (1) には、Heisenberg の運動方程式に基づく内的なダイナミックスがあり、O.P. と密度とは独立な運動ができないと理解することができる。

References

- 1) B.I.Halperin, P.C.Hohenberg and S.Ma, Phys. Rev. Lett. 29, 1548 (1972).
Phys. Rev. B, (in press).
B.I.Halperin, P.C.Hohenberg and E.D.Siggia, Phys. Rev. Lett. 32, 1289 (1974)
- 2) I.Kondor and P.Szépfałusy, Phys. Lett. A47, 393 (1974)
R.Abe and S.Hikami, Phys. Lett. A47, 341 (1974)
M.Suzuki and F.Tanaka, Prog. Theor. Phys. (in press)
- 3) B.I.Halperin and P.C.Hohenberg, Phys. Rev. 177, 952 (1968)
- 4) S.Ma, Phys. Rev. Lett 29, 1311 (1972).
Phys. Rev. A7, 2172 (1973).