

非対称行列に対する Petrov-Galerkin法

とOblique Projection法について

慶應義塾大学理工学部

野寺 隆
(Takashi Nodera)1.はじめに

物理過程で生ずる数値モデルは、数理物理学の微分作用素を差分法や有限要素解析により離散近似すると、次のような大型で疎な行列を係数とする連立1次方程式：

$$A x = b \quad (1.1)$$

を生じる。

近年、(1.1)の解法として、一般共役勾配法(GCG法)や共役残差法(CR法)が高成績を修めつつある。特に、非対称な行列を係数とする連立1次方程式の解法として、いくつかのCG法に似通った反復解法が提案されている。

今までに提案された解法を大別すれば、表1のようになるが、krylov部分空間上で残差ベクトルのノルムを最小にする共役残差法を一般化する変分法的なアプローチをとるものと、Galerkin過程として共役勾配法をみなし、非対称問題に算法を一般化したものの2つに分けることができる。

では、「非対称問題において、どの解法があらゆる面で最良なのか。」と言う疑問がだれにでも生まれるのは当然のことである。しかし、残念ながら現在の所、これに明確に答える事はできない。なぜなら、与えられた解法がある問題に対しては他のものより良く働いても、別の問題に対しては、収束が問題外に遅かったり、時には発散してしまう事もよくあるからである。し

かし、多くの解法は、同じ初期値から出発し、その反復過程の続行が保証されるならば、同じ近似ベクトル列を生成するので数学的には同値な解法であると言えるものがある。これらの同値な解法のなかで、あるものはより効果的に、また経済的に働く可能性があるので、この情報は解法の選択の手助けになるであろう。

非対称行列を係数とする連立1次方程式の反復解法の多くのものは、上記の意味で、Petrov-Galerkin法またはOblique Projection法の部分集合であると思なすことができる。よって、これらの反復解法の相互関係とその体系を最近の話題を追いながら明らかにする。

2. Petrov-Galerkin法

Petrov-Galerkin法について述べることにする。まず最初に、次の事柄を仮定する。

$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n$ の ℓ_2 内積,

$\|\cdot\| : \ell_2$ ノルム

$K_m, L_m : \mathbb{R}^n$ の m 次元部分空間

x_1 : 初期値

方程式 (1.1) に対する Petrov-Galerkin近似は、次のように述べることができる。

$$(b - Ax, v) = 0, \quad \forall v \in L_m$$

$$x = x_1 + z, \quad z \in K_m \quad (2.1)$$

となる x を求める。

(1.1) の方程式を解くことは、 $Az = r_1$ ($z \in K_m$) を解くことに同値である。ただし、 $r_1 = b - Ax_1$ は初期残差ベクトルであるものとする。

よって、 z に対する Petrov-Galerkin 近似は、次のようになる。

$$\begin{aligned} (r_1 - A z, v) &= 0, \quad \forall v \in L_m \\ z &\in K_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる z を求める。ただし、 $r_1 = b - A x_1$ とする。

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 K_m の基底を $V_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$, L_m の基底を $W_m = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]$ と仮定し, (2.2) の未知数を $z = V_m y$ の形式に書くことにすれば, 次の線形方程式:

$$W_m^T (r_1 - A V_m y) = 0, \quad (2.3)$$

を解くことになる。ここで、 $W_m^T A V_m$ が正則行列であるとすれば、次のような解を得ることになる。

$$y = [W_m^T A V_m]^{-1} W_m^T r_1. \quad (2.4)$$

以上の事柄から、Petrov-Galerkin 近似が定義可能である必要十分条件は、行列 $W_m^T A V_m$ が正則であることである。

Petrov-Galerkin 近似について、次のような 2 つの重要な事柄がわかっている。

- (I) $L_m = K_m$ であれば、Galerkin 法であり、
- (II) $L_m = A K_m$ であれば、残差の ℓ_2 ノルムを最小にする $x_1 + z$ の形式の近似解を求める最小自乗法、

となることである。

Petrov-Galerkin 近似の実用面で、 V_m , W_m の基底の計算に関して、次のようないくつかの難しい問題を生ずる。

- (i) m が大きな場合には、行列 $W_m^T A V_m$ は密行列となり、その計算量が莫大なものになる可能性がある。
- (ii) 行列 $W_m^T A V_m$ の条件数が悪い可能性がある。

(iii) 近似解 x を構成するのに、総てのベクトル v_i ($i=1,2,\dots, m$) を記憶する必要がある。

これらの問題点は K_m として Krylov 部分空間 $K_m = \text{span} \{r_1, A r_1, \dots, A^{m-1} r_1\}$ を用いても、直接上記の公式を用いれば同様な現象を生ずる。それでも、非対称行列問題に対して Krylov 部分空間をエレガントに用いるいくつかの方法があり、それらは大変有効な解法である。Saad et al. [10] は、次のような Petrov-Galerkin 法のクラスを提案している。

2.1 Petrov-Galerkin-Krylov 法

Petrov-Galerkin-Krylov 法について述べる。最初に、次の事柄を仮定する。

$\beta(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n$ 上での双線形形式,

$\theta : 0 \leq \theta(k) \leq k+1$ の範囲で定義された単調増加な整数値関数

一般 Petrov-Galerkin-Krylov 法のアルゴリズムは、次のように述べることができる。

[ALGORITHM PGK(β, θ)]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - A x_1$$

を計算し、 $p_1 = r_1$ と置く。

(2) 次の手順を繰り返す。($k=1,2,\dots$)

$$x_{k+1} = x_1 + \sum_{j=1}^k a_{j,k} p_j, \quad (2.5a)$$

$$r_{k+1} = r_1 - \sum_{j=1}^k a_{j,k} A p_j, \quad (2.5b)$$

ただし、 $\{a_{j,k}\}$ は、次の条件のどちらかを満たすように選ぶ。

$$(i) \quad (r_{k+1}, p_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq k \quad (2.5c)$$

$$(ii) \quad (r_{k+1}, Ap_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq k \quad (2.5d)$$

次の式のどちらかで、 p_{k+1} を計算する。

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \sum_{j=\theta(k)}^k c_{j,k} p_j, \quad (2.5e)$$

$$c_{k+1,k} p_{k+1} = Ap_k + \sum_{j=\theta(k)}^k c_{j,k} p_j, \quad (2.5f)$$

ただし、 $c_{j,k}$ は、次の条件を満たすように選ぶ。

$$\beta(p_{k+1}, p_j) = 0, \quad \theta(k) \leq j \leq k. \quad (2.5g)$$

また、(2.5a) と (2.5b) は、次のように書くこともできる。

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{j=1}^k a_{j,k} p_j, \quad (2.5h)$$

$$r_{k+1} = r_k - \sum_{j=1}^k a_{j,k} Ap_j, \quad (2.5i)$$

上記の2つの表現を用いれば、次のような PGK(β, θ) アルゴリズムの打ち切り版を構成することができる。 ϕ は θ と同様な仮定をとるものとする。

[ALGORITHM TPGK(β, θ, ϕ)]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - Ax_1$$

を計算し、 $p_1 = r_1$ と置く。

(2) 次の手順を繰り返す。($k = 1, 2, \dots$)

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{j=\phi(k)}^k a_{j,k} p_j, \quad (2.6a)$$

$$r_{k+1} = r_k - \sum_{j=\phi(k)}^k a_{j,k} Ap_j, \quad (2.6b)$$

ただし、 $\{a_{j,k}\}$ は、次の条件のどちらかを満たすように選ぶ。

$$(a) \quad (r_{k+1}, p_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq k \quad (2.6c)$$

$$(b) \quad (r_{k+1}, A p_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq k \quad (2.6d)$$

以下、PGK法のアルゴリズムと同じステップを行う。

上記のアルゴリズムからもわかるように、 $TKGK(\beta, \theta, 1) = PGK(\beta, \theta)$ となる。

次に、PGK法のリスタート版に付いて述べることにする。アルゴリズムは、次のようになる。

[ALGORITHM RPGK(β, θ)]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - A x_1$$

を計算し、 $p_1 = r_1$ と置く。

(2) $PGK(\beta, \theta)$ を m 回実行する。

(3) $\|r_m\| \leq \varepsilon$ ならば、反復を終了する。そうでないならば、

$$x_1 = x_m, \quad p_1 = r_1 = r_m$$

と置き、ステップ (2) へ戻る。

$PGK(\beta, \theta)$ アルゴリズムの各反復で x_{k+1} を計算する理由は殆どない。すべて、収束が完了した後で、 x_{k+1} を計算すればよい。もし、 PGK アルゴリズムにおいて (2.5f) 式で計算を行うならば、各反復で残差を計算することもない。その代わり $RPGK$ のステップ (3) で各 m 回の反復のあとに収束をチェックしながら残差を計算することになる。また、 $TPGK(\beta, \theta, \phi)$ アルゴリズムにおいても、 x_{k+1} や r_{k+1} を毎回計算する必要はない。また、(2.5f) の代わりに、同じ Krylov 空間を生成する次の式を用いて計算してもかまわない。

$$p_{k+1} = A^k p_1 + \sum_{j=\theta(k)}^k c_{j-k} p_j \quad (2.7)$$

この式は、方向ベクトル $\{A^k p_1\}$ を一度に計算できるようなベクトル計算機に対しては、大変利用価値が高い。

双線形形式として、次の3つの場合を考えることにする。

$$\beta_1(u, v) = (u, v), \quad (2.8a)$$

$$\beta_2(u, v) = (u, Av), \quad (2.8b)$$

$$\beta_3(u, v) = (Au, Av). \quad (2.8c)$$

次の節では、既に良く知られている非対称行列の反復解法が、上記の PGK 法のクラスの一つであることを述べることにする。

3. 非対称行列系の反復解法あれこれ

線形方程式の解を求めるための反復解法の多くのものは、ベクトルの直交性を利用した projection 法であるが、特に、非対称行列を係数とする線形方程式に対して、不完全な直交性を用いる oblique projection 法が近頃話題を集めている。特に、Hestenes の提案した共役残差法 (CR 法) は大型の疎行列問題に対してかなり有効に働くことがわかり、再び注目されてきている。

本節では、CR 法を含むいくつかの反復解法が Petrov-Galerkin-Krylov 法のクラスに属することについて述べることにする。また、ここで述べるいくつかのアルゴリズムの簡単な紹介が、野寺 [7] にあるので参照されたい。

3.1. GCR 法

GCR 法のアルゴリズムは次のようになる。

[ALGORITHM GCR]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - Ax_1$$

を計算し、方向ベクトルを $p_1 = r_1$ と置く。

(2) 次の反復を繰り返す。(k = 1, 2, 3, ...)

$$x_{k+1} = x_k + a_k p_k, \quad (3.1a)$$

$$r_{k+1} = r_k - a_k A p_k, \quad (3.1b)$$

$$a_k = \frac{(r_k, A p_k)}{(A p_k, A p_k)} \quad (3.1c)$$

$$p_{k+1} = p_k + \sum_{j=1}^k c_{j,k} p_j \quad (3.1d)$$

$$c_{j,k} = - \frac{(A r_{k+1}, A p_j)}{(A p_j, A p_j)} \quad (3.1e)$$

この解法は, S.C.Eisenstat et al. [4] により, 提案されたもので, PGK法において, (2.5d) と (2.5e) 式及び $\theta(k) = 1$ と, 双線形形式:

$$\beta(u, v) = (A u, A v) \quad (3.2)$$

を利用した場合である。この場合, $j \neq k$ に対して $a_{j,k} = 0$ である。明らかに, 反復回数 k が増加すれば, このアルゴリズムはコスト高になる。よって, 現実にはリスタート版と打ち切り版が有力となる。また, 次の条件が成立している。

$$(r_{k+1}, A r_j) = 0, \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (3.3)$$

このアルゴリズムは, affine部分空間 $\langle x_1 + \text{span}\{r_1, A r_1, \dots, A^k r_1\} \rangle$ 上で残差ノルムを最小にする。Elman [5] は, この性質を利用してこの解法のいろいろな収束定理を証明している。

3.2. ORTHOMIN(q)法

ORTHOMIN(q)法は, GCR法の計算量と記憶領域の節約をする為に, Vinsome [11] が提案した解法である。これはTPKG(β, θ, ϕ)アルゴリズムにおいて, 双線形形式 β をGCR法と同様に(3.2)式で決定し, $\phi(k) = k$, $\theta(k) = k - q + 1$ と置いたものである。ただし, q は予め定められた一定の整数である。依って, ORTHOMIN(q)法はGCRアルゴリズムの打

ち切り版であり $k-q \leq j \leq k$ を満たす j に対して (3.3) 式を満足する。 $q = 0$ の場合、これは $\|b - Ax\|_2$ を最小にする最急降下 (steepest descent) 法になる。

3.3. AxelssonのCG法的な方法

Axelsson [2, 3] は、CG法の次のような2つの一般化を提案した。第1の方法は最小自乗法であり、もう一つはGalerkin法のタイプのものである。

3.3.1. 最小自乗 (LS) 法

Axelsson [2] のLSアルゴリズムは、次のようになる。

[ALGORITHM AXEL-LS]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - Ax_1,$$

を計算し、 $p_1 = r_1$ と置く。

(2) 次の手順を繰り返す。($k=1,2,3,\dots$)

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{j=1}^k a_{j,k} p_j, \quad (3.4a)$$

$$r_{k+1} = r_k - \sum_{j=1}^k a_{j,k} Ap_j, \quad (3.4b)$$

ただし、スカラー $\{a_{j,k}\}_{j=1}^k$ は、 $\|r_{k+1}\|_2$ を最小にするように選ぶ。

$$p_{k+1} = r_{k+1} + c_k p_k, \quad (3.4c)$$

$$c_k = - \frac{(Ar_{k+1}, Ap_k)}{(Ap_k, Ap_k)} \quad (3.4d)$$

Axelsson [2] のLS法は、(3.2) 式で定義した双線形形式 β と (2.5e) で $\theta(k) = k$ とした PGK法である。この解法は、GCR法とORTHODIR法に数

学的に同値な解法である。また、Axelsson [2] はこのアルゴリズムの打ち切り版を提案しているが、リスタート版については、ふれていない。

3.3.2. Galerkin法

これは、Axelsson [3] が提案した方法であり、方向ベクトル $\{p_k\}$ が準共役となるように、双線形形式：

$$\beta(u, v) = (u, Av) \quad (3.5)$$

をとる解法である。 $\theta(k)$ は、 $\theta(k) = k$ とし、係数 $a_{j,k}$ は r_{k+1} がベクトル p_j ($j=1, 2, 3, \dots, k$) に直交するように決定している。当然のことながら、PGKアルゴリズムの(2.5c)式を用いて計算をおこなっている。また、Axelsson [3] はこのアルゴリズムの打ち切り版について述べているが、リスタート版についてはふれていない。

3.4. GMRES法

GMRES (Generalized Minimum Residual) 法は Saad et al. [9] により提案され、そのアルゴリズムは次のように述べることができる。

[ALGORITHM GMRES]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - Ax_1,$$

及び、

$$v_1 = r_1 / \|r_1\|_2$$

を計算する。

(2) 次の操作を繰り返す。($k=1, 2, 3, \dots, i, \dots$)

$$h_{j,k} = (Av_k, v_j), \quad j = j_k, \dots, k \quad (3.6a)$$

$$w = Av_k - \sum_{j=j_k}^k h_{j,k} v_j, \quad (3.6b)$$

$$h_{k+1,k} = \|w\|_2, \quad (3.6c)$$

$$v_{k+1} = w / h_{k+1, k}, \quad (3.6d)$$

(3) 近似解 x_1 を計算する。

$$x_1 = x_1 + V_1 y_1, \quad (3.6e)$$

ただし, y_1 は $\|\beta e_1 - \overline{H}_1 y\|_2$ を最小化するものを選ぶ。

($\beta = \|r_1\|_2$, $\overline{H}_1 : (i+1) \times i$ のヘッセンベル行列,

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$: 単位ベクトル)

このアルゴリズムは, ℓ_2 の内積として定義した双線形形式 β と, $\forall k$ に対して $\theta(k) = 1$ と置き, p_{k+1} を正規化するように $c_{j, k}$ を決定する PGK (β, θ) 法である。ベクトル p_k ($i=1, 2, \dots, m$) は Krylov 部分空間の ℓ_2 - 正規直交基底を形成するので, (2.5f) 式は, よく知られた Arnoldi [1] の反復過程である。一度, この正規直交基底が生成されれば, 近似解は (2.5a) 式から計算できる。GMRES法のリスタート版は, GCR法やORTHODIR法のリスタート版に数学的に同値な解法である。GMRES法は, 利用コストと使い安さの面で, いくつかの利点を備えている。

3.5. ORTHODIR法

ORTHODIR法のアルゴリズムは, 次のようになる。

[ALGORITHM ORTHODIR]

(1) 初期値 x_1 を選び, 残差ベクトル

$$r_1 = b - A x_1,$$

を計算し, 方向ベクトルを $p_1 = r_1$ と置く。

(2) 次の計算を繰り返す。($k=1, 2, 3, \dots$)

$$x_{k+1} = x_k + a_k p_k, \quad (3.7a)$$

$$r_{k+1} = r_k - a_k A p_k, \quad (3.7b)$$

$$p_{k+1} = A p_k + \sum_{j=1}^k c_{j,k} p_j, \quad (3.7c)$$

$$a_k = \frac{(r_k, A p_k)}{(A p_k, A p_k)}, \quad (3.7d)$$

$$b_{j,k} = - \frac{(A^2 p_k, A p_j)}{(A p_j, A p_j)}. \quad (3.7e)$$

このアルゴリズムは、Jea & Young [6] により提案された。双線形形式 β として (3.2) 式を利用し、PGK (β, θ) アルゴリズムに於いて、(2.5d) と (2.5f) 式を用いるものである。このオリジナル版では、 $c_{k+1,k} = 1$ であるが、これはオーバーフローなどを起こす危険性があるので、スケーリングが時々必要になる。(しかし、各反復ステップで毎回スケーリングを行う必要性はない。)

ORTHODIR法のリスタート版は、GCR法のリスタート版に数学的に同値な解法であるといえる。しかし、ORTHOMIN (k) 法とORTHODIR (k) 法の打ち切り版は数学的に同値ではない。ORTHODIR法の打ち切り版は、発散する可能性がある (K.C.Jea et al. [6])。

3.6 Full Orthogonalization (F.O.M.) 法

F.O.M.のアルゴリズムは、次のようになる。このアルゴリズムに於いて、 $\forall j$ に対して $j_k = 1$ ならば、F.O.M.となり、 $j_k = \max(1, k-q+1)$ ならば、I.O.M. (Incomplete Orthogonalization Method) となる。

[ALGORITHM F.O.M.]

(1) 初期値 x_1 を選び、残差ベクトル

$$r_1 = b - A x_1,$$

及び、

$$v_1 = r_1 / \| r_1 \|_2,$$

を計算する。

(2) 次の手順を繰り返す。($k=1,2,3,\dots, i, \dots$)

$$h_{j\ k} = (A v_k, v_j), \quad j = j_k, \dots, k \quad (3.8a)$$

$$w = A v_k - \sum_{j=j_k}^k h_{j\ k} v_j, \quad (3.8b)$$

$$h_{k+1\ k} = \| w \|_2, \quad (3.8c)$$

$$v_{k+1} = w / h_{k+1\ k}, \quad (3.8d)$$

(3) 近似解 x_1 を計算する。

$$x_1 = x_1 + V_1 y_1, \quad (3.8e)$$

ただし,

$$y_1 = H_1^{-1} \| r_1 \| e_1 \quad (3.8d)$$

(H_1 はヘッセンベルグ行列, $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$: 単位ベクトル)

この方法は, Saad [8] が提案した方法で, GRMES法と同様に, 双線形形式 β として ℓ_2 の内積を利用する。また, $\forall i$ に対して $\theta(k) = 1$ と置き, さらに p_{k+1} を正規化するように $b_{j\ k}$ を選ぶことである。この過程は Krylov 部分空間 $K_m = \text{span} \{ r_1, A r_1, \dots, A^m r_1 \}$ の正規直交基底 $\{ p_k \}$ ($k=1,2,\dots,m$) を構成する Arnoldi のアルゴリズムである。一度この正規直交基底が生成されれば, 近似解は, (2.5a) 式から計算できる。

この解法は, 残差ベクトルが Axelsson [3] の Galerkin 近似法と同じ条件を満足するので, 数学的にその方法に同値である。さらに, Saad [8] は, F.O.M. のリスタート版を提案し数値実験を行っている。

4. おわりに

非対称行列問題を解くためのいくつかの反復解法のアルゴリズムについて

述べてきた。特に、ここで取り扱った方法は、Petrov-Galerkin-Krylov法の打ち切り版やリスタート版のクラスに属するものであり、そのクラスを図示すると図1のようになる。

[参考文献]

- [1] W.E.Arnoldi, The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem, Quart.Appl.Math. No.9, pp.17-29 (1951).
- [2] O.Axelsson, A generalized conjugate direction method and its application to singular perturbation problem, Lec. Note. in Math. 773, pp.1-11 (1980).
- [3] O.Axelsson, Conjugate Gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations, Lin.Alg.Appl. No.29, pp.1-16 (1980).
- [4] S.C.Eisenstat et al., Variational iterative methods for non-symmetric systems of linear equations, SIAM J. of Numer. Anal. No.20, pp.345-357 (1983).
- [5] H.C.Elman, Preconditioned Conjugate Gradient methods for nonsymmetric systems of linear equations, Advances in Computer Methods for PDE IV, pp.409-417 (1981).
- [6] K.C.Jea and D.M.Young, On the symplification of generalized conjugate gradient methods for nonsymmetrizable linear system, Lin.Alg.Appl. , pp.399-417 (1983).
- [7] 野寺, 非対称行列系の反復解法, 情報処理数值解析研究会資料8-1, pp.1-10 (1984).
- [8] Y.Saad, Lanczos biorthogonalization algorithm and other oblique projection methods for solving large unsymmetric systems, SIAM J. of Numer. Anal. No.19, pp.470-484 (1982).
- [9] Y.Saad and M.H.Schults, A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, Res.Rep. Yale Univ..
- [10] Y.Saad and M.H.Schults, Conjugate gradient-like algorithms for solving nonsymmetric linear systems, Res.Rep. Yale Univ..
- [11] P.K.W.Vinsome, An iterative method for solving sparse sets of simultaneous linear equations, In Proceedings of the Fourth Symposium on Reservoir Simulation, pp.149-159 (1976).

表1. 非対称行列に対する反復解法

	方 法	収束領域	計算量
Variational Methods	正規方程式 (CG法)	一般行列	固定 $A^T A$
	GCR法	M: 正定値	増加
	ORTHOMIN (q) 法 $q \geq 0$	M: 正定値	固定
	AXELGCR (AXEL-LS) 法	M: 正定値	増加
	AXEL-GCR (q) 法 $q \geq 0$	M: 正定値	固定
	ORTHODIR法	一般行列	増加
	ORTHODIR (q) 法 $q \geq 2$	M = I	増加
	GMRES法	M: 正定値	増加
Galerkin Lanczos Methods	BCG法	一般行列	固定 $A^T A$
	AXEL-Galerkin 法	M: 正定値	増加
	GCG法	M = I	固定
	ORTHORES法	M: 正定値	増加
	ORTHORES (q) 法 $q \geq 2$	M = I, 一般行列 に対しては不明	固定
	FOM	M: 正定値	増加
	DFOM	M: 正定値	増加
	IOM (q) 法	M = I, 一般行列 に対しては不明	固定
	DIOM (q) 法		
その他	Chebyshev 法	M: 正定値	固定
	Broyden 法	一般行列	増加
	Hybrid法	M: 一般行列	固定

(注) $A = M - R$ $M = \frac{1}{2}(A + A^T)$: 行列Aの対称部 $R = -\frac{1}{2}(A - A^T)$: 歪対称部

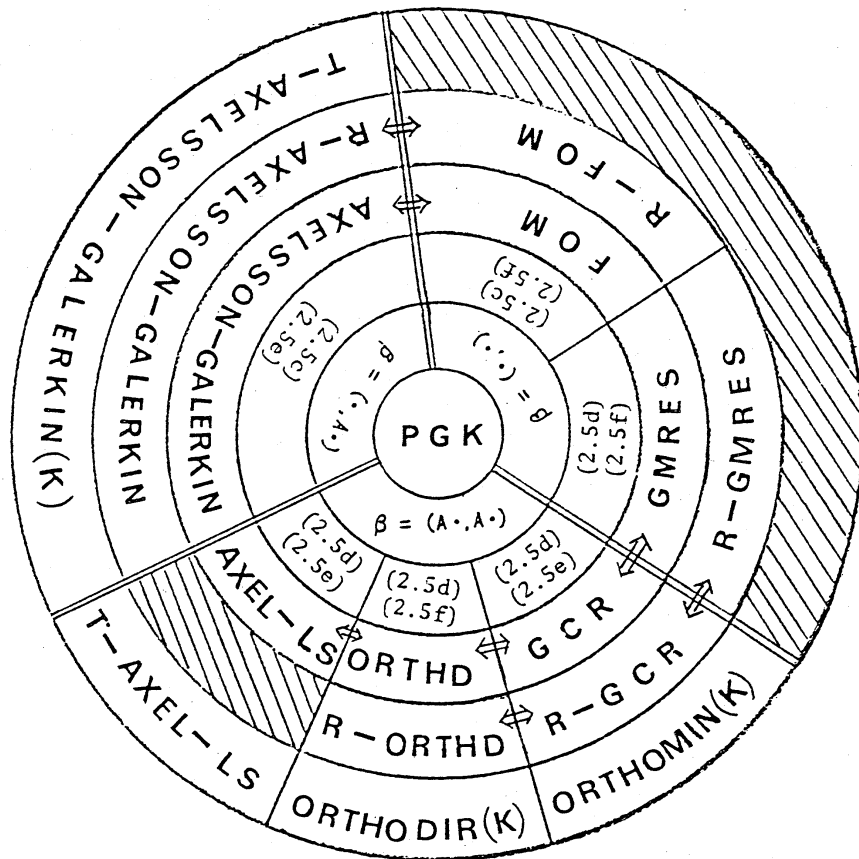


図1. PGKのクラス

R : リスタート版

T : 打ち切り版