

方程式 $u_t + uu_x = 0$ のある初期値
問題に関する数値実験

京大 工 野 木 達 夫

初期値問題

$$(1) \quad u_t + uu_x = 0, \quad u = u(t, x), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(2) \quad u(0, x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

の (弱い) 解は,

$$(3) \quad u(t, x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}, \quad t > 0$$

で与えられる.

この問題の近似解を, いろいろな差分法によつて求めてみよう.

(I) Friedrichs-Lax の正差分法 (Positive scheme)¹⁾

$$(4) \quad u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ u_{j+1}^n - \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ u_{j-1}^n + \frac{\lambda}{2} (u_{j-1}^n)^2 \right\}$$

$$u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$(5) \quad u_j^0 = \begin{cases} 1 & j \leq 0 \\ -1 & j > 0 \end{cases}$$

この差分法について, C.F.L. 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy's condition) は

$$(6) \quad \lambda \max_{n,j} |u_j^n| \leq 1$$

1) C.P.A.M. Vol 7, 159-193 (1954)

で与えられる。そこで、 $\lambda = 0.9, 1.0$ の場合の計算結果を、それぞれ図-1 図-2 に示す。ただし、差分方程式 (4) の形と初期値 (5) とから、 λ の如何によらず

$$(7) \quad u_{j+1}^n = -u_{-j}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

の成りたつことは明らかだから、 $j \leq 0$ の部分だけを示す。

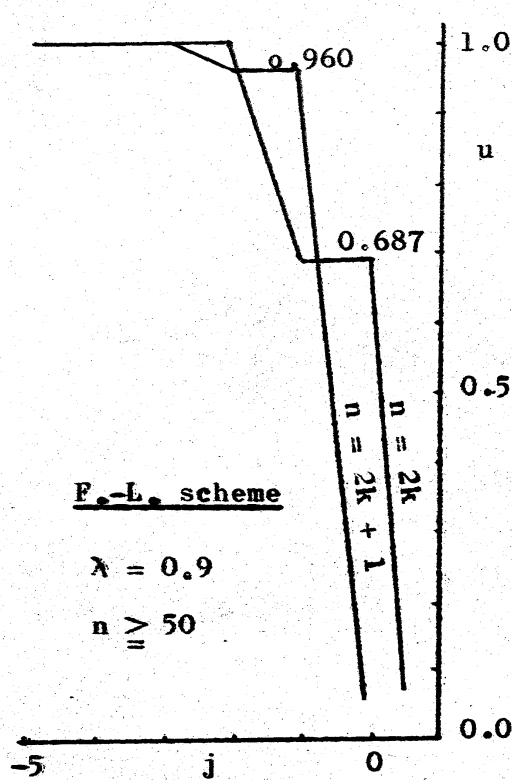


図 - 1

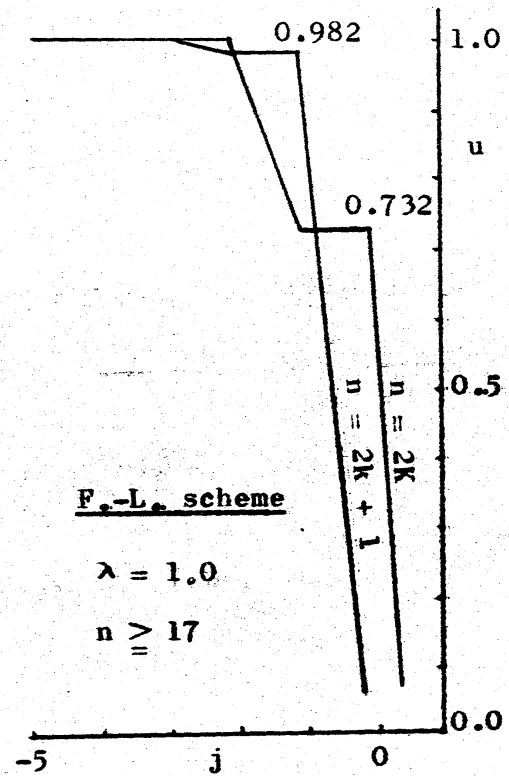


図 - 2

上図に示されている通り、 $\lambda = 0.9$ のときは n がほぼ 50 以上で、また $\lambda = 1.0$ のときは $n \geq 17$ で、2つの一定波形を交互にとるようになる。これは差分法 (4) が $j+n = \text{偶数}$ となる格子点 (n, j) と、 $j+n = \text{奇数}$ と

なる格子点での値を互いに独立に計算することによるものである。これらの2つの波形は λ を一定として $\Delta x \rightarrow 0$ とすれば、いずれも解(3)に近づいていくことが推測されるが、確かにそれが収束することは Олейник¹⁾ によつて証明された。その証明では、C.F.L. 条件がみたされていることが本質的である。(いまの例題では、 $\lambda \leq 1$ ならばみたされている。) 上図で、 $\lambda = 1.0$ の場合の方が、 $\lambda = 0.9$ の場合よりも解(3)に近いというのは、 Δt を同じにして Δx をより小さく選んだことに相当し、当然の結果である。

実際の問題では、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすることはできないから、上のように2つの漸近波形が得られるのは都合が悪い。これは Friedrichs-Lax の差分法では避けられないことなので、別の差分法を用いる必要がある。そのために精度をあげて Accuracy 2 の Lax-Wendroff の差分法が導入されたのである。

(II) Lax-Wendroffの差分法²⁾

$$\begin{aligned}
 (8) \quad u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{\lambda}{4} \{ (u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2 \} \\
 & + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ \left[(u_{j+1}^n)^2 + (u_j^n)^2 \right] \{ u_{j+1}^n - u_j^n \} - \left[(u_j^n)^2 + (u_{j-1}^n)^2 \right] \{ u_j^n - u_{j-1}^n \} \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、記号の用法及び初期値は(4),(5)と同じであるとする。また、

C.F.L.条件も(6)と同じであり、(7)の成りたつことも同様である。

$\lambda = 0.9, 1.0$ の場合の漸近波形を示すと次の通りとなる。

1) Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 12, 3-73 (1957)

2) C.P.A.M. Vol. 13, 217-237 (1960)

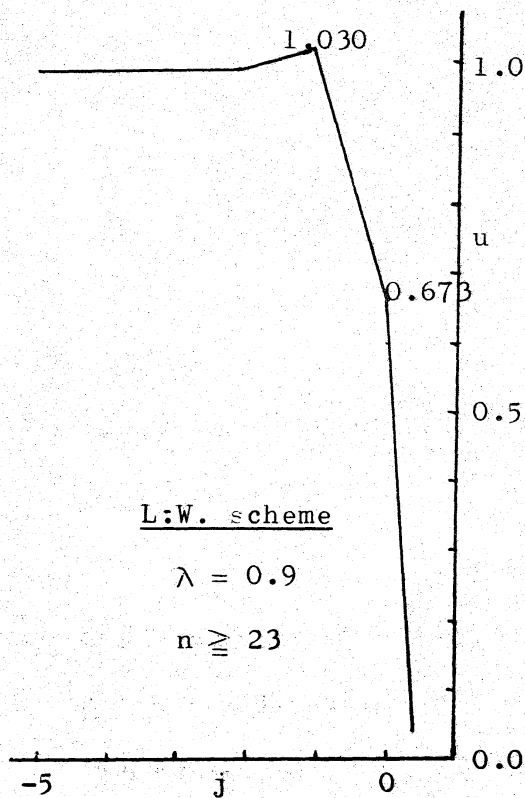


図 - 3

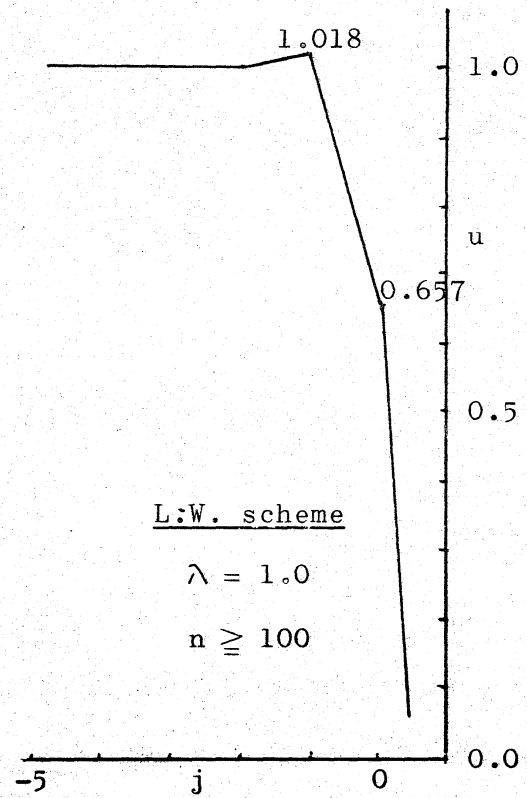


図 - 4

差分法 (8) の線形化方程式は、一般に最大値ノルムの意味で不安定であるにも拘らず、いまのような特殊な初期値に対しては、収束する様相を呈している。上の結果では、いずれの場合にも、C.F.L. 条件が破れている。このことから、いまの問題では、 $\lambda \geq 1$ に対しても漸近波形をもつことがあるのではないかという予想がたつ。実際、図 - 5 に示す通り、 $\lambda = 1.01$ でも（有効ケタ数 8 ケタ以内で）一定の漸近波形をもつことがわかる。ところがもつと大きくして $\lambda = 1.1$ とすればほぼ n が 150 以上で、2 つの一定波形を交互にとるようになり（図 - 6）、更に大きくすれば振動現象がはげしくなり、 $\lambda \geq 1.25$ では発散現象を示した。

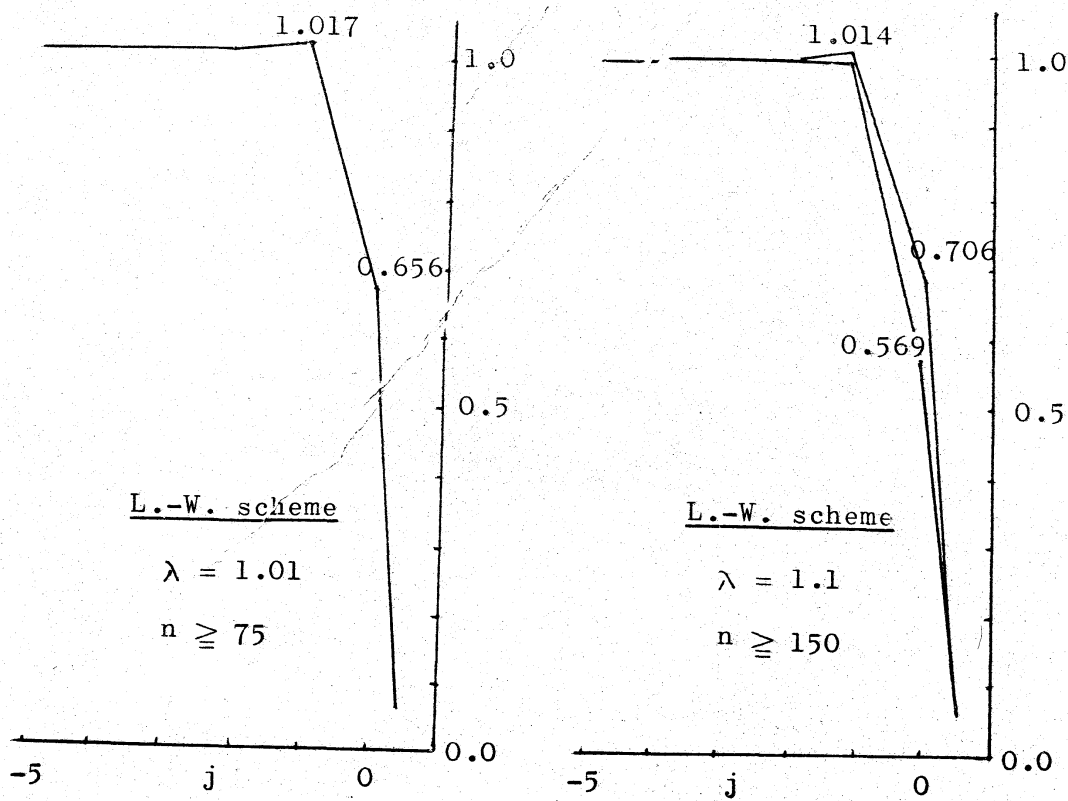


図 - 5

図 - 6

(III) Lax-Wendroff の差分法 (2) (粘性法)¹⁾

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\lambda}{4} \{ (u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2 \} \\
 (9) \quad &+ \frac{\lambda^2}{4} \left\{ \left[(u_{j+1}^n)^2 + (u_j^n)^2 \right] \left\{ u_{j+1}^n - u_j^n \right\} - \left[(u_j^n)^2 + (u_{j-1}^n)^2 \right] \left\{ u_j^n - u_{j-1}^n \right\} \right\} \\
 &+ \frac{\Delta}{4} \left[\left| u_{j+1}^n - u_j^n \right| (u_{j+1}^n - u_j^n) - \left| u_j^n - u_{j-1}^n \right| (u_j^n - u_{j-1}^n) \right]
 \end{aligned}$$

初期値等は (I) の場合と同様とする. この差分法は stationary shock の不連続が, より鋭くなるように考慮して作られたものである. この差分法の線形化方程式が安定であるための Von Neumann の必要条件は

1) C.P.A.M. Vol. 13, 217-237 (1960)

$$(10) \quad \lambda \max_{n,j} |u_j^n| \leq 0.78$$

である. $\lambda = 0.78$ の場合, 更に $\lambda = 0.8$ の場合にも一定の漸近波形を得た. その結果をそれぞれ図-7, 図-8に示す. いままでに得たものと比べると明らかな通り, やはり一番すぐれている. $\lambda = 1.0$ では発散してしまう.

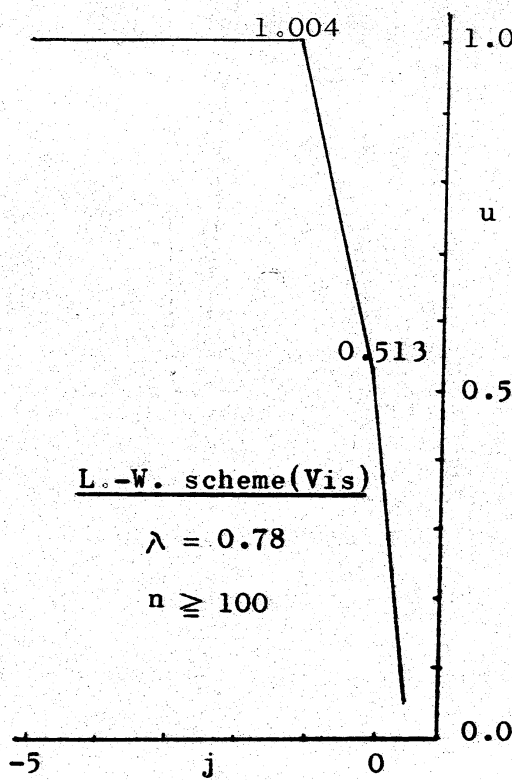


図 - 7

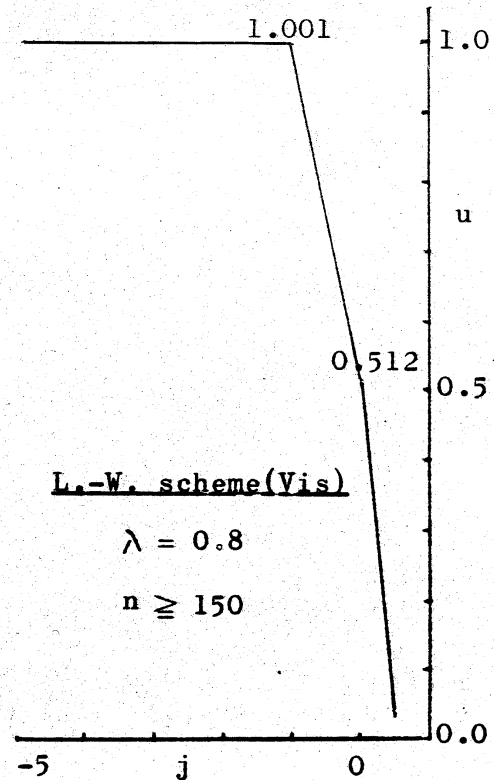


図 - 8

(IV) Richtmyer-Morton の差分法¹⁾

$$(11) \quad \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\lambda}{2} \{ (w^+)^2 - (w^-)^2 \} \\ w^+ &= \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\lambda}{4} \{ (u_{j+1}^n)^2 - (u_j^n)^2 \} \\ w^- &= \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{4} \{ (u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2 \} \end{aligned}$$

1) NYO-1480-5, New York Univ. (1964).

初期条件はいままでと同様とする。
 この差分法の Accuracy も 2 であつて、しかもきれいな形をしているので L.W.scheme よりも短時間で計算できる。しかし、 $\lambda = 1.0$ のとき図-9 に示す通り $|u|$ はどんどん増大し、発散してしまう。実はこの差分法は、初期値 (5) に対して任意の $\lambda > 0$ について発散することが証明される。

注.. Richtmyer-Morton¹⁾ は上の定義式で 4 とあるところを 2 としているが、それでは Accuracy は 1 にすぎず、Accuracy 2 とするには (11) のようにしなければならない。

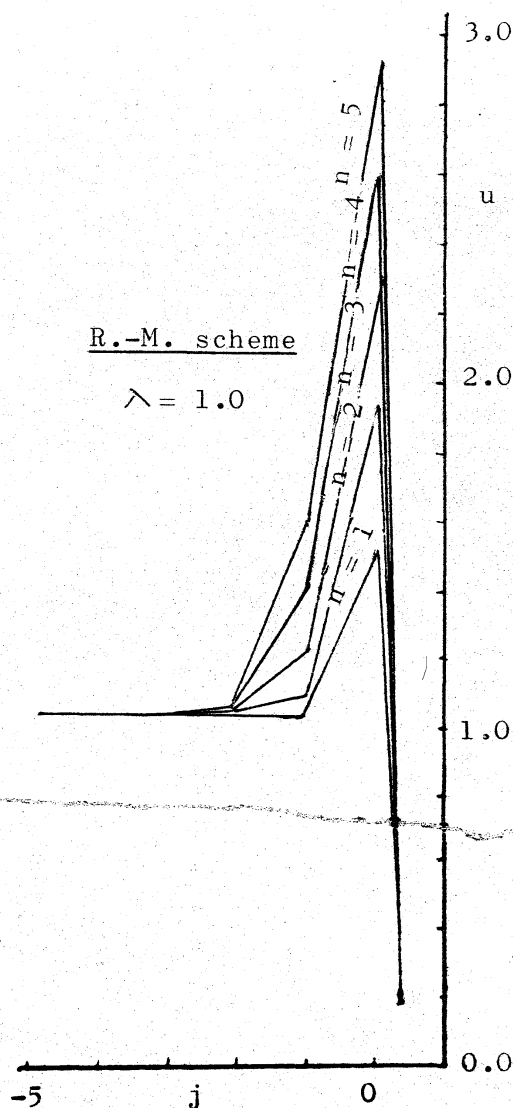


図 - 9

(V) 以上の実験では、方程式と初期値があまりにも特殊であつて、これから一般的な結論を出すことは、さし控えなければなるまい。いまの問題では、普通不安定となる差分法

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{4} \{ (u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2 \}$$

1) NYO-1480-5, New York Univ. (1964).

が，皮肉にも最良の結果，

$$(12) \quad u_j = \begin{cases} 1 & j \leq 0 \\ -1 & j > 0 \end{cases} \quad n > 0$$

を与える．勿論，初期値に少量の perturbation を加えた場合には Lax
Wendroff と (V) の scheme の差ははつきりあらわれ，L.-W. scheme
は安定， V-scheme は不安定となる．